За умови $\lambda = \text{const}$ після підстановки рівнянь (4) у формулу (3) і ряду перетворень одержимо:

$$\delta\beta = \frac{1}{\beta_0}\left(\lambda^3 k_1 + \lambda^2 k_2 + \lambda k_3 + k_4\right)\Delta\varphi_{гв}. \qquad (5)$$

В одержаному рівнянні (5) β_0 – вихідне значення коефіцієнта потужності (1) при фіксованих λ_0 і $\varphi_{гв0}$, $\Delta\varphi_{гв}$ – абсолютне відхилення кута встановлення лопатей гвинта від початкового $\varphi_{гв0}$.

Звертаючись до характеристик гвинта АВ-72, з допомогою рівняння (5) можна встановити, що, наприклад, при вихідних параметрах режиму роботи гвинта: $\lambda = 1{,}3$, $\varphi_{гв} = 35^0$, $\beta_0 = 1{,}27$.

Зменшення кута встановлення лопатей на $0{,}1^0$ (6') призводить до зменшення коефіцієнта тяги β і тягової потужності гвинта на 2,07 %, а на $0{,}5^0$ – відповідно на 10 %.

Отже, діагностична модель повітряного гвинта, що базується на вимірюванні кута встановлення лопатей, має стати невід'ємним фрагментом діагностичної моделі силової установки з турбогвинтовим або турбогвинтовентиляторним двигуном.

Список літератури

1. *Дубравский Н.Г., Мокроус М.Ф.* Параметрические методы диагностического контроля состояния авиадвигателей. Линейные диагностические матрицы: Тр. ЦИАМ. № 964. – М.: ЦИАМ, 1981. – 17 с.

2. *Дмитриев С.А.* Диагностирование проточной части ГТД на установившихся и неустановившихся режимах работ: Дис. ... д-ра техн. наук: 05.20.14. – К., 1996. – 358 с.

3. *Александров В.Л.* Воздушные винты. – М.: Оборонгиз, 1951. – 475 с.

4. *Мельников А.П., Свечников В.В.* Теория и расчет лопастей винта. – Л.: АКВВИА, 1947. – 160 с.

5. *Черкез А.Я.* Инженерные расчеты газотурбинных двигателей методом малых отклонений. – М.: Машиностроение, 1975. – 379 с.

Стаття надійшла до редакції 31.10.02.

0551.0-05-021.1+j965.02-021.1

УДК 629.7.058.004.12(045)

система сложная техническая, точность сложной системы
характеристика системы сложной
система управления автоматическая
точность системы управления
управление АД
система электронно-механ

Г.Ю. Борисюк, інж.
(Національний авіаційний університет)
О.А. Тамаргазін, д-р техн. наук, проф.
(Національний авіаційний університет)

ОЦІНКА ТОЧНОСТІ РОБОТИ СКЛАДНИХ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ ФУНКЦІОНАЛЬНОЮ НАДМІРНІСТЮ

Розглянуто інтегральні характеристики, які дозволяють оцінювати точність складних технічних систем за всіма їхніми можливими працездатними станами з урахуванням виникнення відмов і (чи) неможливості використання для розв'язання функціональної задачі частини елементів системи.

Будь-яка складна технічна система має визначену надмірність у своїй структурі, що дозволяє їй вирішувати поставлену функціональну задачу декількома способами L [1; 2]. У разі відмови і (чи) відключенні хоча б одного елемента така система переходить в інший працездатний стан з визначеним (зазвичай гіршим) рівнем точності функціонування.

Так, точність показаної на рисунку складної технічної системи в першому стані (*а*) залежить від характеристик точності елементів *1, 2, 3, 4* і *5*. У другому стані (*б*) замість елемента *4* підключається елемент *6* з іншими характеристиками точності. Наприклад, керування сучасним авіаційним двигуном може здійснюватися за допомогою електронно-механічних систем на базі мікрокомп'ютерів або механічних насосів-регуляторів.

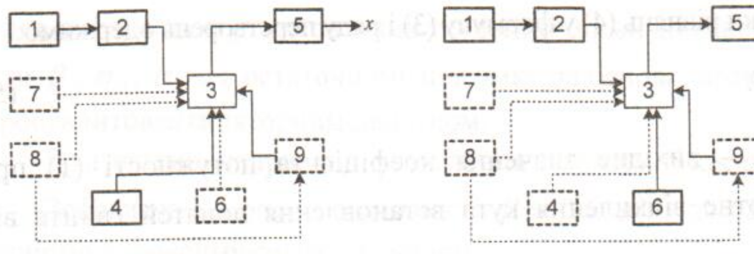

Схема станів складної технічної системи:
а – перший стан; *б* – другий стан; *1 – 9* елементи

Про стан складної технічної системи в будь-який момент часу можна надати такі взаємовиключальні гіпотези: h_i – система знаходиться в i-му працездатному стані ($i = \overline{1, L}$); h_{L+1} – система цілком непрацездатна. Ці гіпотези утворять повну групу подій, сума ймовірностей яких дорівнює одиниці.

У разі перебування системи в (L+1)-му непрацездатному стані поняття точності її функціонування позбавлено фізичного змісту, тому що система не вирішує поставлену перед нею функціональну задачу. Тому, розглядаючи тільки працездатні стани технічної системи, оцінюємо можливість перебування системи в кожному l-му з них стані умовною ймовірністю:

$$P_l = P(h_l)\left[\sum_{q=1}^{L} P(h_q)\right]^{-1}, \ i = \overline{1, L}, \tag{1}$$

де $P(h_l)$ – імовірність перебування системи в l-му стані, яка визначається відомими методами теорії надійності.

Очевидно, що для ймовірності (1) виконується умова нормування:

$$\sum_{l=1}^{L} P_l = 1. \tag{2}$$

Через вплив на елементи технічної системи різних дестабілізуючих факторів значення її вихідного параметра x у кожному з можливих працездатних станів відрізняється в загальному випадку від номінального значення $x_н$. Імовірнісні характеристики похибки системи в цих станах визначаються методами розрахунку точності [3]:

$$\Delta x = x - x_н .$$

Нехай відомі щільності ймовірності похибок системи $\omega_l(\Delta x)$ у кожному l-му з її працездатних станів. Нехай також визначені математичні сподівання $m_l(\Delta x)$ і середньоквадратичні відхилення $\sigma_l(\Delta x)$ похибок систем у цих станах. Але оцінка точності систем за допомогою набору таких характеристик громіздка, незручна і не дає можливості однозначно судити про точність функціонування системи в цілому по всіх її працездатних станах, оскільки заздалегідь невідомо, яким саме способом виконується функціональна задача. Це не дозволяє проводити порівняльну оцінку точності різних типів технічних систем однакового призначення для вибору кращої з них, а також висувати обгрунтовані вимоги до точності функціонування систем у кожному з їхніх працездатних станів.

Для узагальненої оцінки точності функціонування складної системи закон розподілу її похибок відповідно до формули повної ймовірності [4] записується як

$$\omega(\Delta x) = \sum_{l=1}^{L} P_l \omega_l(\Delta x). \tag{3}$$

Уведення умови нормування (2) забезпечує необхідну вимогу рівності одиниці площі під кривою розподілу (3).

Знайдемо кількісні характеристики похибок складної технічної системи. Для цього за визначенням k-го початкового моменту з урахуванням формули (3) запишемо

$$a_k = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta x^k \omega(\Delta x) d\Delta x = \sum_{l=1}^{L} P_l a_{kl}, \tag{4}$$

де a_{kl} – k-й початковий момент випадкової похибки, значення якої підпорядковані закону $\omega_l(\Delta x_l)$.

Математичне сподівання (перший початковий момент) відповідно до формули (4) знаходиться як

$$m(\Delta x) = \sum_{l=1}^{L} P_l m_l(\Delta x) \ . \tag{5}$$

Оскільки дисперсія похибки [4]

$\sigma^2(\Delta x) = a_2 - m^2(\Delta x)$,

тоді для неї, як випливає з формули (4), правдиве співвідношення

$$\sigma^2(\Delta x) = \sum_{l=1}^{L} P_l \left[\sigma_l^2(\Delta x) + m_l^2(\Delta x)\right] - m^2(\Delta x) \ . \tag{6}$$

Як видно з формул (4) і (6), характеристики точності складної технічної системи, крім точності способів розв'язання задачі, залежать від показників безвідмовності системи.

Розглянемо основні властивості інтегрального закону розподілу (3) похибок складної системи.

Властивість 1. Закон розподілу похибок складної технічної системи (3) відрізняється від закону Гаусса при будь-яких законах розподілу її похибок в окремих працездатних станах.

Це випливає безпосередньо з формули (3). При рівноточних способах розв'язання складною технічною системою поставленої функціональної задачі, коли щільність імовірності $\omega_l(\Delta x) = \omega_k(\Delta x)$ при будь-яких індексах l і k, розподіл $\omega_l(\Delta x)$ у формулі (3) виноситься за знак суми. Якщо воно є нормальним, то розподіл (3) є гауссовим. Однак точність функціонування складної технічної системи погіршується внаслідок відмов її елементів, і тому способи розв'язання задачі не є рівноточними. Отже, закон розподілу похибок складної технічної системи не є нормальним.

Властивість 2. Дисперсія похибок складної технічної системи (6) мінімальна при всіх $m_l(\Delta x) = 0$.

Дійсно, величина, що входить у формулу (6)

$$\sigma_{д}^2 = \sum_{l=1}^{L} P_l m_l^2(\Delta x) - m^2(\Delta x)$$

є дисперсією дискретної випадкової величини $m_l(\Delta x)$. При всіх $m_l(\Delta x) = 0$ дисперсія $\sigma_{д}^2 = 0$, що мінімізує загальну дисперсію (6). Як випливає з формул (5) і (6), дисперсія похибок складної технічної системи мінімальна при $m_l(\Delta x) = m_k(\Delta x)$ для всіх l і k.

Нехай усі математичні сподівання $m_l(\Delta x) = 0$ і хоча б одне із середньоквадратичних відхилень похибок $\sigma_l(\Delta x)$ не дорівнює іншим. Перша умова є наслідком необхідності компенсації систематичних похибок, яка проводиться з метою підвищення точності систем, а друга обумовлена тим, що рівень точності складних технічних систем погіршується внаслідок відмов їхніх елементів.

Значення похибок технічних систем у кожному з їхніх працездатних станів розподілені за законом Гаусса. Це обумовлено тим, що вихідний параметр будь-якої складної технічної системи є деякою функцією великої кількості первинних параметрів, відхилення яких від номінальних значень викликані багатьма випадковими факторами. Вважаючи, що "ваги" цих відхилень розрізняються мало (умова О.М. Ляпунова), відповідно до центральної граничної теореми [4] розподіл значень вихідного параметра системи можна вважати нормальним.

За зазначені умови розподіл похибок складної технічної системи (3) має такі властивості.

Властивість 3. Асиметрія закону розподілу похибок складної технічної системи $A_s = 0$. У разі виконання цієї умови крива закону розподілу (3) симетрична щодо математичного сподівання $m(\Delta x) = 0$.

Властивість 4. Ексцес закону розподілу похибок складної технічної системи $E_k > 0$. Це вказує на те, що крива щільності ймовірності (3) має більш високу і "гостру" вершину, ніж гауссова крива при тій же дисперсії.

Якщо хоча б одна із систематичних похибок $m_l(\Delta x) \neq 0$, тоді симетричність кривої закону розподілу (3) порушується.

Розглянемо тепер вплив характеристик точності складових частин (елементів) на точність функціонування складних технічних систем. З огляду на те, що в загальному випадку складна технічна система може вирішувати задачу декількома різними способами, зобразимо залежність для кожного l-го працездатного стану в такому вигляді:

$$x = \varphi_l\left(h_{1l}x_1, h_{2l}x_2, \ldots, h_{nl}x_n\right), \tag{7}$$

де h_{il} – булева змінна, що набуває значення 1, якщо i-й елемент системи використовується у разі розв'язання задачі l-м способом, і значення 0, коли він не використовується.

Розкладаючи залежність (7) у ряд Тейлора, відповідно до формули (2) вираз для дисперсії похибок системи в l-му стані записуємо як

$$\sigma_l^2(\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} h_{il}a_{il}^2\sigma^2(\Delta x_i) + 2\sum_{i<j}^{n} h_{il}h_{jl}a_{il}a_{jl}r_{ij}\sigma(\Delta x_i)\sigma(\Delta x_j), \tag{8}$$

де a_{il} – коефіцієнт впливу i-го первинного параметра у разі розв'язання задачі l-м способом.

Нехай усі систематичні похибки складної технічної системи виключені, тобто

$m(\Delta x) = 0,\ m_l(\Delta x) = 0,\ l = \overline{1, L}$.

Тоді, підставляючи дисперсію (8) у співвідношення (6), за перелічені умови одержуємо формулу дисперсії похибки складної технічної системи:

$$\sigma^2(\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} A_i\sigma^2(\Delta x_i) + 2\sum_{i<j}^{n} A_{il}r_{ij}\sigma(\Delta x_i)\sigma(\Delta x_j), \tag{9}$$

де $\quad A_i = \sum_{l=1}^{L} P_l h_{il} a_{il}^2$;

$$A_{ij} = \sum_{l=1}^{L} P_l h_{il} h_{jl} a_{il} a_{jl}.$$

Дисперсії $\sigma^2(\Delta x_i)$, які входять до формули (9), є сумами дисперсій взаємно незалежних величин.

Розподіл похибок складної технічної системи (3) характеризує її точність у деякий заданий момент часу t. У загальному ж випадку система застосовується довгостроково на деякому інтервалі часу $(0, t)$. Тому більш повною характеристикою точності є багатовимірна щільність імовірності $\omega(\Delta x_1, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ похибок системи в деякі задані моменти часу $t_1, t_2, \ldots, t_n$, що належать розглянутому інтервалу часу $(0,t)$. Знайдемо цю щільність з урахуванням можливих переходів системи з одного працездатного стану в інший. Для цього розглянемо можливі траєкторії переходу системи з одного стану в інший при відмовах її елементів. Кількість таких траєкторій системи дорівнює 2^N, де N – кількість елементів системи. При цьому будемо вважати, що елементи системи в процесі її застосування не відновлюються.

Залежно від відмов елементів складної технічної системи її стан може змінюватися по різних траєкторіях. Траєкторія h_0 характеризує такий стан системи, коли жоден із N її елементів не вийшов із ладу на інтервалі часу $(0, t_n)$. Імовірність цієї події позначимо $P_0(t_n)$, а багатовимірну щільність імовірності похибок системи в цьому випадку позначимо $\omega_0(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$.

Траєкторія h_{ji} характеризується тим, що на інтервалі часу $(t_{j(i-1)}, t_{j(i)})$ до моменту часу $t_{j(i)}$ з деякою ймовірністю $P_j(t_{j(i)})$ відбудеться відмова i-го елемента, а інші елементи на інтервалі часу $(0, t_n)$ будуть справними ($j_{(i)} = \overline{1, n}$). При цьому вихідний розподіл похибок системи перетвориться в деякий новий розподіл $\omega_{j(i)}(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$.

У разі відмови i-го елемента на інтервалі часу $(t_{j(i-1)}, t_{j(i)})$, а потім k-го на інтервалі $(t_{j(k-1)}, t_{j(k)})$ відповідно до моментів $t_{j(k-1)}$ і $t_{j(k)}$ з деякою ймовірністю $P_{ik}(t_{j(i)}, t_{j(k)})$ похибки системи будуть розподілені з якоюсь щільністю ймовірності $\omega_{j(i)\,j(k)}(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$.

У випадку, коли k-й елемент відмовив раніше i-го ($t_{j(i)} < t_{j(k)}$), похибка системи з деякою ймовірністю $P_{k(i)}(t_{j(k)}, t_{j(i)})$ описується щільністю ймовірності $\omega_{j(k)j(i)}(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$.

З усіх можливих траєкторій станів складної технічної системи розглянемо тільки такі, при яких система є працездатною. Тому відповідно до формули (3) записуємо спільну щільність імовірності похибок складної технічної системи:

$$\omega(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) = A^{-1}\Big[P_0(t_n)\omega_0(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j(i)=1}^{n} P_i(t_{j(i)})\omega_{j(i)}(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) + \sum_{i,k=1}^{N}\sum_{\substack{j(i),j(k)=1\\ j(i)<j(k)}}^{n} P_{i(k)}(t_{j(i)}, t_{j(k)})\omega_{j(i)j(k)}(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) + \sum_{k,i=1}^{N}\sum_{\substack{j(k),j(i)=1\\ j(k)<j(i)}}^{n} P_{k(i)}(t_{j(k)}, t_{j(i)})\omega_{j(k)j(i)}(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) + \ldots\Big] \quad (10)$$

де A – нормований множник.

Множник A дорівнює сумі ймовірностей, записаних перед законами розподілу похибок. Він уведений для того, щоб площа під кривою щільності ймовірності (10) дорівнювала одиниці.

Аналогічно можна врахувати можливість появи трьох і більш відмов складної технічної системи. Однак у цьому немає практичної необхідності, тому що при високій надійності елементів виникнення більше як однієї відмови малоймовірно.

Розглянемо приклад. Необхідно знайти спільну щільність імовірності $\omega(\Delta x_1, \Delta x_2)$ похибок у моменти t_1 і t_2 системи, яка складається з двох самостійних елементів. Задачу спочатку вирішує перший, більш точний елемент. У разі його відмови розв'язання задачі продовжує інший елемент. Імовірність безвідмовної роботи першого елемента – $P_1(t)$, другого – $P_2(t)$. Відомі багатовимірні щільності ймовірності похибок елементів $\omega_1(\Delta x_1, \Delta x_2)$ і $\omega_2(\Delta x_1, \Delta x_2)$. Похибки елементів взаємно незалежні.

Імовірність розв'язання задачі першим елементом (траєкторія h_0) становить

$P_1 = P_1(t_2)$.

Цій траєкторії відповідає щільність імовірності $\omega_1(\Delta x_1, \Delta x_2)$.

Імовірність відмови першого елемента до моменту часу t_1 при працездатному стані другого елемента на інтервалі часу $(0, t_2)$ становить

$P_2 = [1 - P_1(t_1)]P_2(t_2))$.

У цьому випадку задача виконується тільки другим елементом, похибки якого визначено зі щільністю ймовірності $\omega_2(\Delta x_1, \Delta x_2)$.

Імовірність того, що перший елемент пробробить безвідмовно до моменту часу t_1 і відмовить на інтервалі часу (t_1, t_2) при працездатному стані другого елемента, дорівнює

$$P_{12} = [1 - P_1(\tau / t_1)]P_2(t_2), \quad (11)$$

де $P_1(\tau/t_1)$ – імовірність безвідмовної роботи першого елемента протягом часу

$\tau = t_2 - t_1$.

Імовірність $P_1(\tau/t_1)$ обчислено за умови, що протягом часу t_1 елемент не відмовив.

Відповідно до теореми множення ймовірностей [4], які входять у вираз (11), імовірність $P_1(\tau/t_1)$ знаходимо з формули

$$P_1(t_2) = P_1(t_1 + \tau) = P_1(t_1)P_1(\tau / t_1)$$

у вигляді

$$P_1\left(\frac{\tau}{t_1}\right) = \frac{P_1(t_2)}{P_1(t_1)}.$$

У даному випадку спочатку застосовується перший елемент у момент часу t_1 (як найбільш точний), а потім у момент t_2 використовується другий елемент. При цьому за умови незалежності похибок елементів багатовимірна щільність імовірності похибок складної технічної системи знаходиться як добуток щільностей імовірностей $\omega_1(\Delta x_1)$ і $\omega_2(\Delta x_2)$ за формулами:

$$\omega_1(\Delta x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1(\Delta x_1, \Delta x_2)\, d\Delta x_2 \;;$$

$$\omega_2(\Delta x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_2(\Delta x_1, \Delta x_2)\, d\Delta x_1 \,.$$

За формулою (10) знаходимо щільність імовірності похибок системи:

$$\omega(\Delta x_1, \Delta x_2) = (P_1 + P_2 + P_{12})^{-1}\left[P_1\omega_1(\Delta x_1, \Delta x_2) + P_2\omega_2(\Delta x_1, \Delta x_2) + P_{12}\omega_1(\Delta x_1)\omega_2(\Delta x_2)\right].$$

Переходи складних технічних систем з одного працездатного стану в інший крім відмов їхніх елементів можуть бути обумовлені різного роду алгоритмічними обмеженнями, які призводять до неможливості використання для розв'язання задачі деякі елементи системи.

Наприклад, необхідність зміни способу розв'язання задачі керування двигуном електронно-механічною системою на базі мікрокомп'ютерів може бути обумовлена відмовою центрального бортового комп'ютера або перебоями в електропостачанні літака. Такого роду обмеження роблять неможливою реалізацію ряду способів розв'язання системою задачі, навіть якщо всі її елементи справні. Тому оцінку точності складної технічної системи в кожному конкретному випадку необхідно розглядати як жорстко визначену сукупність способів розв'язання функціональних задач.

Список літератури

1. *Козлов Б.А., Ушаков И.А.* Справочник по расчету надежности аппаратуры радиоэлектронной автоматики. – М.: Сов. радио., 1975. – 366 с.

2. *Основы* надежности и эксплуатации радиоэлектронной техники / И.А. Шишонок, В.Ф. Репкин, Л.Л. Барвинский и др. – М.: Сов. радио., 1964. – 547 с.

3. *Байхельт Ф., Франкен П.* Надежность и техническое обслуживание. Математический подход: Пер. с нем. – М.: Радио и связь, 1988. – 392 с.

4. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1988. – 480 с.

Стаття надійшла до редакції 18.10.02.