УДК 514.75

М.Ф. Гребенюк, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ПРОСТОРИ АФІННОЇ ЗВ'ЯЗНОСТІ НА ТАНГЕНЦІАЛЬНО-ВИРОДЖЕНІЙ ПОВЕРХНІ РЕГУЛЯРНОЇ ГІПЕРПОЛОСИ НЕЕВКЛІДОВОГО ПРОСТОРУ

Розглянуто регулярні гіперполоси метризованого проективного простору з абсолютом. Уведено геометричні об'єкти, які визначають в околі третього порядку інваріантне оснащення гіперполоси в сенсі А.П. Нордена. Побудовано пару просторів двоїстих афінних зв'язностей, асоційованих з тангенціально-виродженою поверхнею даної гіперполоси.

Для розв'язання питань диференціальної геометрії багатовимірного проективного простору використовуємо метод нерухомого репера, числення зовнішніх форм, теоретико-груповий метод Г.Ф. Лаптєва [1] і результати роботи [2].

1. Нехай у проективному просторі P_n задано невироджену гіперквадрику

$$q'_{IJ}x^I x^J = 0; \quad q'_{IJ} = q'_{JI}; \quad \det\|q'_{IJ}\| \neq 0, \tag{1}$$

причому в канонічному вигляді її рівняння найменше з чисел коефіцієнтів одного знаку дорівнює l. Тоді можна визначити підгрупу колінеації простору P_n, що зберігає цю гіперквадрику, а отже, і відповідну проективну метрику. Одержаний таким способом метричний проективний простір з цією фундаментальною групою назвемо розширеним неевклідовим простором ${}^lS_n$ індексу l, а гіперквадрику (1) – його абсолютом.

Розглянемо в просторі ${}^lS_n$ плоский елемент (A,τ), що складається з точки A та інцидентної їй гіперплощини τ. r-вимірною гіперполосою $SH_r \subset {}^lS_n$ називається r-параметричний багатовид таких плоских елементів (A,τ), що точка A описує поверхню V_r, а гіперплощина τ(A) дотикається до площини V_r у відповідних точках $A \in V_r$.

У просторі ${}^lS_n$ гіперполоса SH_r стосовно рухомого автополярного репера $\{A_o, A_1, \ldots, A_n\}$ визначається у вигляді:

$$\omega_o^n = 0; \quad \omega_o^\alpha = 0; \quad \omega_\alpha^n = 0; \quad \omega_n^o = 0; \quad \omega_n^\alpha = 0; \quad \omega_\alpha^o = 0;$$

$$\omega_i^n = a_{ij}\omega^j; \quad \nabla a_{ij} = -a_{ij}\omega_n^n - a_{ijk}\omega^k;$$

$$\omega_\alpha^i = b_{\alpha j}^i \omega^j; \quad \nabla b_{\alpha j}^i = b_{\alpha jk}^i \omega^k;$$

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j; \quad \nabla b_{ij}^\alpha = b_{ijk}^\alpha \omega^k;$$

$$\omega_i^o = -\varepsilon_{oi}\omega^i; \quad \omega_n^i = -\varepsilon_{in}a_{ij}\omega^j.$$

При цьому

$$b_{\alpha j}^i a_{il} = b_{\alpha l}^i a_{ij}; \; b_{ik}^\alpha = -\varepsilon_{\alpha i} b_\alpha^{ij} a_{jk}; \; b_{\alpha k}^i = b_\alpha^{ij} a_{jk}$$

функції $b_{\alpha jk}^i$ симетричні за індексами j, k.

Системи величин $\Gamma_2 = \{a_{ij}, b_{\alpha j}^i\}$, $\Gamma_3 = \{\Gamma_2, a_{ijk}, b_{\alpha jk}^i\}$ утворюють фундаментальні об'єкти відповідно до другого та третього порядків гіперполоси $SH_r \subset {}^lS_n$.

2. Побудуємо геометричні об'єкти, які характеризують інваріантне оснащення гіперполоси в сенсі А.П. Нордена [3; 4].

Інваріантну нормаль другого роду гіперполоси SH_r – $(r-1)$-вимірну площину $E_{r-1}=[M_i]$ – визначимо точками

$$M_i = A_i + x_i A_o,$$

де $\quad \nabla_\delta x_i = 0. \tag{2}$

Інваріантну нормаль першого роду гіперполоси SH_r – $(n\text{-}r)$-вимірну площину $E_{n-r}=[\sigma^i]$ – задамо як перетин гіперплощин:

$$\sigma^i = \tau^i + y^i\tau^n,$$

де $\quad \nabla_\delta y^i = y^i\pi_n^n.$ (3)

Крім основних елементів інваріантного оснащення гіперполоси SH_r, її нормалей першого і другого роду, визначимо інваріантну площину $E_{n-r-2}=[M_\alpha]$ точками

$$M_\alpha = A_\alpha + x_\alpha A_o.$$

Маємо

$$E_{n-r-2}(A_o) \subset X_{n-r-1}(A_o);$$

$$A_o \notin E_{n-r-2}(A_o).$$

З умови інваріантності площини E_{n-r-2} випливає, що

$$\nabla_\delta x_\alpha = 0. \quad (4)$$

Далі виберемо інваріантну зв'язку гіперплощин:

$$\sigma^\alpha = \tau^\alpha + y^\alpha\tau^n,$$

де $\quad \nabla_\delta y^\alpha = y^\alpha\pi_n^n.$ (5)

Інваріантне оснащення гіперполоси SH_r називається внутрішнім інваріантним оснащенням k-го порядку, якщо оснащувальні об'єкти гіперполоси SH_r є функціями компонентів фундаментального диференціально-геометричного об'єкта k-го порядку гіперполоси SH_r. Доведемо, що для фундаментального диференціально-геометричного об'єкта третього порядку гіперполоси SH_r існують алгебричні охвати, структура яких така сама, як і структура диференціально-геометричних оснащувальних об'єктів даної гіперполоси SH_r.

В околі другого порядку елемента гіперполоси SH_r побудуємо величини [5; 6]:

$$B_\alpha = \frac{1}{r}a_{ij}b_\alpha^{ij};$$

$$B^\alpha = \frac{1}{r}a^{ij}b_{ij}^\alpha.$$

Маємо

$$\nabla_\delta B_\alpha = 0; \quad (6)$$

$$\nabla_\delta B^\alpha = B^\alpha\pi_n^n. \quad (7)$$

Порівнюючи рівняння (6), (7) відповідно до рівнянь (4), (5), знаходимо, що в околі другого порядку гіперполоси SH_r тензори B_α і B^α визначають внутрішні інваріантні площини:

$$E_{n-r-2} \equiv [M_\alpha] = [A_\alpha - B_\alpha A_o];$$

$$E_{r+1} \equiv [\sigma^\alpha] = [\tau^\alpha - B^\alpha\tau^n].$$

За допомогою компонентів фундаментального геометричного об'єкту третього порядку гіперполоси SH_r побудуємо охвати, структура яких така сама, як і структура оснащувальних об'єктів x_i і y^i даної гіперполоси SH_r:

$$d_i = \frac{1}{r+2}a_{ijk}a^{jk}; \quad \nabla_\delta d_i = 0;$$

$$d^i = \frac{1}{r+2} a^{ijk} a_{jk}\,;\ \nabla_\delta d^i = d^i \pi_n^n\,.$$

Зазначимо, що рівняння (2), (3) задовольняються при $x_i=d_i$, $y^i=d^i$. Отже, дійдемо висновку, що тензори d^i, d_i визначають в околі третього порядку даної гіперполоси SH_r внутрішні оснащувальні двоїсті одна одній площини:

$$E_{r-1} \equiv [M_i] = [A_i + d_i A_o]\,;$$

$$E_{n-r} \equiv [\sigma^i] = [\tau^i + d^i \tau^n]\,.$$

3. До гіперполоси SH_r приєднаємо афінну зв'язність $\overset{3}{\nabla}$ внутрішнім інваріантним способом. Афінну зв'язність $\overset{3}{\nabla}$ будемо приєднувати на тангенціально-виродженій поверхні V_{n-1}^r.

Система форм $\left\{\omega_i^n, \overset{3}{\theta}{}_i^j\right\}$,

де $\quad \overset{3}{\theta}{}_i^j = \omega_i^j - \delta_i^j \omega_n^n - \overset{3}{\Gamma}{}_i^{jl}\,\omega_l^n$

задовольняє структурні рівняння Картана–Лаптєва:

$$D\omega_i^n = \overset{3}{\theta}{}_i^j \wedge \omega_j^n + \overset{3}{T}{}_i^{jl}\,\omega_l^n \wedge \omega_j^n\,;$$

$$D\overset{3}{\theta}{}_i^j = \overset{3}{\theta}{}_i^l \wedge \overset{3}{\theta}{}_l^j + \omega_i^n \wedge \Delta\overset{3}{\Gamma}{}_i^{jl}\,,$$

де $\quad \overset{3}{T}{}_i^{jl} = \overset{3}{\Gamma}{}_i^{[jl]}\,,$

$$\Delta\overset{3}{\Gamma}{}_i^{jl} = \nabla\overset{3}{\Gamma}{}_i^{jl} - \left(\overset{3}{\Gamma}{}_i^{kl}\,\overset{3}{\Gamma}{}_k^{jp} - a^{jl}\varepsilon_{oi}a^{ip} + a^{kl}a^{mp}b_{\alpha k}^j b_{im}^\alpha - \varepsilon_{jn}\delta_j^l\delta_i^p + \varepsilon_{ln}\delta_i^j\delta_l^p\right)\omega_p^n\,.$$

Використовуючи тензор Дарбу

$$l_{ijk} = a_{ijk} - a_{(ij}d_{k)}\,,$$

будуємо симетричний тензор:

$$L_{ij} = a^{kl}a^{mp}l_{ikm}l_{jlp}\,;$$

$$\nabla_\delta L_{ij} = 0\,,$$

який в загальному випадку є невиродженим, тобто існує взаємний йому тензор L^{ij}:

$$L^{ij}L_{jk} = \delta_k^i\,;$$

$$\nabla_\delta L^{ij} = 0\,.$$

Охоплення об'єкта афінної зв'язності $\overset{3}{\nabla}$ гіперполоси SH_r можна здійснити за допомогою компонентів фундаментального об'єкта третього порядку цієї гіперполоси за формулою:

$$\overset{3}{\Gamma}{}_i^{jl} = L^{jl}d_i\,.$$

Отже, форми афінної зв'язності $\overset{3}{\nabla}$, внутрішнім чином приєднаної до гіперполоси SH_r, мають такий вигляд:

$$\omega_i^n,\quad \overset{3}{\theta}{}_i^j = \omega_i^j - \delta_i^j\omega_n^n - L^{jl}d_i\omega_l^n\,.$$

4. Другий простір афінної зв'язності визначимо системою форм:

$$\omega_i^n, \quad \overset{4}{\theta}{}_i^j = \overset{3}{\theta}{}_i^j - \overset{4}{\Gamma}{}_i^{jl}\,\omega_l^n .$$

Ця система $\left\{\omega_i^n, \overset{4}{\theta}{}_i^j\right\}$ задовольняє структурні рівняння Картана–Лаптєва:

$$D\omega_i^n = \overset{4}{\theta}{}_i^l \wedge \omega_l^n + \left(\overset{3}{T}{}_i^{jl} + \overset{4}{T}{}_i^{jl}\right)\omega_l^n \wedge \omega_j^n;$$

$$D\overset{4}{\theta}{}_i^j = \overset{4}{\theta}{}_i^l \wedge \overset{4}{\theta}{}_l^j + \omega_l^n \wedge \Delta\overset{4}{\Gamma}{}_i^{jl},$$

де $\overset{4}{T}{}_i^{jl} = \overset{4}{\Gamma}{}_i^{[jl]}$;

$$\Delta\overset{4}{\Gamma}{}_i^{jl} = \nabla\overset{4}{\Gamma}{}_i^{jl} - \overset{4}{\Gamma}{}_i^{jl}\,\omega_n^n + \frac{1}{2}\overset{3}{R}{}_i^{jlp}\,\omega_p^n + \left(\overset{4}{\Gamma}{}_i^{kp}\,\overset{4}{\Gamma}{}_k^{jl} - \overset{3}{\Gamma}{}_i^{kl}\,\overset{3}{\Gamma}{}_k^{jp} + \overset{4}{\Gamma}{}_k^{jl}\,\overset{3}{\Gamma}{}_i^{kp}\right)\omega_p^n .$$

Охоплення об'єкта афінної зв'язності $\overset{4}{\nabla}$ гіперполоси SH_r побудуємо за формулою:

$$\overset{4}{\Gamma}{}_i^{jl} = a^{jlk}a_{ki}.$$

Отже, форми афінної зв'язності $\overset{4}{\nabla}$ мають вигляд:

$$\omega_i^n, \quad \overset{4}{\theta}{}_i^j = \overset{3}{\theta}{}_i^j - a^{jlk}a_{ki}\omega_l^n .$$

Згідно з роботою [3] перетворення форм ω_J^I за законом

$$\overline{\omega}_o^n = \omega_o^n = 0;\quad \overline{\omega}_o^\alpha = \omega_o^\alpha = 0;\quad \overline{\omega}_\alpha^n = \omega_\alpha^n = 0;\quad \overline{\omega}_n^o = \omega_n^o = 0;$$

$$\overline{\omega}^i = \omega^i;\quad \overline{\omega}_o^o = -\omega_n^n;\quad \overline{\omega}_i^n = -a_{ik}\omega^k;\quad \overline{\omega}_i^o = a_{ik}\omega_n^k;$$

$$\overline{\omega}_j^i = \omega_j^i - \delta_j^i\omega_n^n + a^{is}a_{sjk}\omega^k;\quad \overline{\omega}_\gamma^\alpha = -\omega_\alpha^\gamma;\quad \overline{\omega}_n^i = -a^{ik}\omega_k^o; \tag{8}$$

$$\overline{\omega}_i^\alpha = -a_{ik}\omega_\alpha^k;\quad \overline{\omega}_\alpha^i = -a^{ik}\omega_k^\alpha;\quad \overline{\omega}_n^\alpha = -\omega_\alpha^o = 0;\quad \overline{\omega}_\alpha^o = \omega_n^\alpha = 0 \tag{9}$$

виявляється майже інволютивним; інволютивність порушується тільки відносно формул (9).

З відношень (8) маємо:

$$d\overline{a}^{ij} + \overline{a}^{kj}\overline{\omega}_k^i + \overline{a}^{ik}\overline{\omega}_k^j - \overline{a}^{ij}\overline{\omega}_o^o = \overline{a}^{ijs}\omega_s^n,$$

де $\overline{a}^{ijs} = a^{ijs}$.

Отже,

$$\overset{3}{\theta}{}_i^j = \overset{4}{\theta}{}_i^j - \overline{a}^{jlk}\overline{a}_{ki}\omega_l^n .$$

Таким чином, форми афінних зв'язностей $\overset{3}{\nabla}$ і $\overset{4}{\nabla}$ перетворюються одні в інші за інволютивним законом.

Правдиве таке твердження.

Теорема. З гіперполосою SH_r індукується два двоїстих простори афінної зв'язності $\overset{3}{\nabla}$ та $\overset{4}{\nabla}$ (двоїстість згідно з перетворенням за законом (8)).

Список літератури

1. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1953. – Т.2. – С. 275–382.

2. *Косаренко М.Ф.* Поля геометрических объектов регулярной гиперполосы $SH_r \subset^l S_n$. Дифференциальная геометрия многообразий фигур // Сб. науч. тр. Калинингр. ун-та. – Калининград. – 1982. – Вып.13. – С. 38–44.

3. *Олоничев П.М.* Общеаффинная и центрально-проективная теория гиперполос // ДАН СССР. Математика. – 1951.– Т.80, №2. – С. 165–168.

4. *Чакмазян А.В.* Двойственная нормализация // Докл. АН Арм. ССР. Математика. – 1959. – Т.28, № 8. – С. 151–157.

5. *Василян М.А.* Проективная теория многомерных гиперполос // Изв. АН Арм. ССР. Математика.– 1971. – Т.6, №6. – С. 477–481.

6. *Василян М.А.* Об инвариантном оснащении гиперполосы // ДАН Арм. ССР. Математика. – 1970. – Т. 50, №2. – С. 65–70.

Стаття надійшла до редакції 10.06.02.

УДК 62-504.462

С.Л. Мовчан, асп.

ОБЛАСТЬ СТІЙКОСТІ В ПРОСТОРІ ПАРАМЕТРІВ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАДАНИМИ ПОКАЗНИКАМИ ЯКОСТІ

Розглянуто питання побудови областей стійкості дискретних систем із заданими показниками якості в просторі параметрів, які нелінійно входять у коефіцієнти характеристичного рівняння. Завдяки використанню дискретного аналога метода D-розбиття та розробленого алгоритму, отримано область стійкості реальної дискретної системи з конкретно заданими показниками ступеня стійкості η та коливності μ. Запропонований підхід дає кращі показники точності визначення області стійкості та є більш ефективним і економічним з точки зору машинної реалізації, ніж існуючі універсальні числові методи.

Стійкість дискретних систем автоматичного керування є необхідною, але не достатньою умовою практичної придатності систем. Важливим є сам характер зміни перехідних процесів, тобто їх якість. Перехідні процеси характеризуються такими показниками якості: часом перехідного процесу $T_{п_{пер}}$, що характеризує швидкодію системи коливністю μ, яка визначається кількістю коливань за час перехідного процесу перерегулювання σ, та ін. [1].

Для визначення показників якості перехідних процесів використовується так званий прямий метод – визначення показників якості безпосередньо по кривій перехідного процесу. Більш ефективним і зручним у стадії проектування систем автоматичного керування є непрямі методи дослідження лінійних дискретних систем [1; 2; 3; 4; 5]. Для наближеної оцінки якості перехідних процесів у системі на z-площині або q-площині (q=ln z) виділяють область, в якій розміщують корені характеристичного рівняння. У роботі [1] були введені основні непрямі оцінки: ступінь стійкості η – відстань від уявної осі до ближнього кореня в q-площині – та ступінь коливності $\mu^* = \omega/\eta$ – абсолютна величина відношення уявної частини найближчого до осі кореня характеристичного рівняння q-площини до дійсної частини. У роботі [3] встановлено зв'язок коливності μ із ступенем коливності μ^* та розміщенням коренів характеристичного рівняння на площині коренів і розроблений непрямий метод оцінки коливності.