

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 621.372.061

ББК В161.6 + В192.14

В.В. Васильєв, член-кор. НАНУ,

Л. О. Сімак, д-р техн. наук,

О.С. Воронова, асп.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ АПРОКСИМУЮЧИХ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ СПЕКТРІВ

Запропоновано операційний метод розв'язання інтегро-диференціальних рівнянь у загальному випадку нецілого порядку, заснований на зображенні сигналів апроксимуючими поліноміальними спектрами. Розглянуто застосування цього методу до розв'язку диференціальних рівнянь нецілого порядку, рівнянь зі змінними коефіцієнтами та систем лінійних диференціальних рівнянь. Наведено ілюстративні приклади моделювання диференціальних рівнянь у середовищі системи Mathematica®.

Диференціальний аналіз нецілих порядків є важливим і природним узагальненням класичного математичного аналізу. Перші спроби побудови теорії диференціювання нецілого порядку відносяться до середини XIX ст. [1], але протягом майже ста років ця теорія залишалася загалом лише цікавою математичною абстракцією, поки у другій половині сторіччя потреби точнішого відображення процесів реального світу та можливості засобів обчислення не призвели до її використання в задачах математичного моделювання. Виявилося, що рівняння з інтегро-диференціальними операторами нецілих порядків можна застосовувати в багатьох галузях науки, техніки, зокрема, у реології і механіці пористих і композиційних середовищ, електрохімії і електродинаміці, фізиці фрактальних середовищ та ін. Приклади фізичних процесів, моделювання яких призводить до появи в рівняннях похідних та/або інтегралів нецілого порядку, можна знайти в роботах [2; 3; 4].

Поняття похідної та інтеграла нецілих порядків природним чином узагальнюють звичайні похідні та інтеграли класичного математичного аналізу. Існує багато визначень похідних та інтегралів нецілих порядків. Найчастіше використовується визначення, запропоноване А.В. Летніковим, яке засноване на узагальненні формул скінченних різниць і скінченних сум (дробові похідні та інтеграли Грюнвальда-Летнікова), і визначення, засновані на інтегралі Коші (дробові похідні та інтеграли Рімана-Ліувілля) [1; 5; 6].

У використовуваному визначенні за Летніковим

$$[D^{-p} f(x)]_{x_0}^x = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{x_0}^x (x-u)^{p-1} f(u) du, \quad \text{Re}(p) > 0, \quad (1)$$

через $\Gamma(*)$ позначено гамма-функцію. Права частина формули (1) часто називається дробовим інтегралом Рімана-Ліувілля порядку p . Легко показати, що у випадку, коли p є цілим, формула (1) перетворюється у визначення звичайних кратних інтегралів.

При формулюванні і розв'язанні диференціальних рівнянь, які включають в себе похідні та інтеграли нецілого (дробового) порядків, нетривіальними, а часто дискусійними, є проблеми завдання необхідної кількості початкових та граничних умов, а також правила композиції декількох інтегро-диференціальних операторів цілого і нецілого порядків [3]. Проте дане питання, незважаючи на його цікавість, виходить за межі проблематики даної роботи.

Ми будемо розглядати спектральні, чисельні моделі інтегро-диференціальних рівнянь та їхніх систем, для побудови яких використовується теорія апроксимуючих поліноміальних спектрів і операційних числень на їхній основі. Запропонований метод дозволяє узагальнити моделювання диференціальних рівнянь на випадок нецілих порядків диференціальних операторів і є операційним у своїй основі.

Згідно з методом, що розглядається, неперервний сигнал або функція, визначені на скінченному інтервалі зміни аргументу, можуть бути подані лінійною комбінацією базисних функцій, визначених на тому ж інтервалі аргументу. Це зображення буде найкращим у середньоквадратичному сенсі наближенням (апроксимацією), якщо система базисних функцій скінченна і функціонально повна [7; 8].

Введемо такі позначення: $f(x)$ – сигнал, $x \in [a, b]$ – інтервал зміни аргументу, $\{s_i(x)\}_{i=1}^m$ або $\mathbf{S}(x) = \{s_1(x), s_2(x), \dots, s_m(x)\}^*$ – система базисних функцій у звичайному або векторно-матричному записі, $\tilde{\mathbf{F}} = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}^*$ – вектор коефіцієнтів апроксимуючого полінома, інакше кажучи, апроксимуючий поліноміальний спектр (АПС), де $*$ – символ транспонування. Формула апроксимуючого поліному у звичайному і векторно-матричному записі має вигляд:

$$f_a(x) = \sum_{i=1}^m F_i \cdot s_i(x) = \tilde{\mathbf{F}}^* \cdot \mathbf{S}(x) = \mathbf{S}^*(x) \cdot \tilde{\mathbf{F}}. \quad (2)$$

Вектор АПС сигналу, що мінімізує середньоквадратичну похибку апроксимації на інтервалі аналізу сигналу, визначається з виразу:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{Q}, \quad (3)$$

$$\text{де } \mathbf{W} = \int_a^b \mathbf{S}(x) \cdot \mathbf{S}^*(x) dx, \quad \mathbf{Q} = \int_a^b f(x) \cdot \mathbf{S}(x) dx. \quad (4)$$

Співвідношення (3),(4) і (2) можуть розглядатися як пара операційних перетворень (пряме й обернене відповідно). Пряме перетворення (3),(4) ставить у відповідність до сигналу $f(x)$ (оригінал), як функції аргументу x , його спектральний образ $\tilde{\mathbf{F}}$ (зображення), що є функцією цілочисельного індексу i . Обернене перетворення (2) за апроксимуючим поліноміальним спектром $\tilde{\mathbf{F}}$ відновлює апроксимацію сигналу. Змінюючи систему базисних функцій $\mathbf{S}(x)$, ми кожен раз отримуємо нове операційне числення [7]. Зокрема, дуже зручними з погляду реалізації є локально-імпульсні базисні системи різних порядків [8; 9].

Для кожної базисної системи $\mathbf{S}(x)$ можна побудувати операційну матрицю інтегрування (у загальному випадку нецілого порядку), що дозволяє визначити по АПС сигналу відповідний АПС його первісної:

$$y(x) = \int_a^x \langle \nu \rangle f(u) du,$$

$$f(x) \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{F}}, \quad y(x) \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{Y}},$$

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{P}^{\langle \nu \rangle} \cdot \tilde{\mathbf{F}}.$$

Питання виведення операційних матриць інтегрування для різних систем базисних функцій докладно розглянуті в роботах [6; 8; 9].

У випадку лінійних диференціальних рівнянь нецілого порядку (або їхніх систем) основні етапи їхнього математичного моделювання можна сформулювати так:

1) інтегро-диференціальне рівняння (система рівнянь) приводиться до вигляду інтегрального рівняння (системи рівнянь) послідовним застосуванням операторів інтегрування різних порядків до обох частин вихідних рівнянь, при цьому важливо правильно використовувати правило композиції інтегро-диференціальних операторів різних порядків, інакше будуть отримані лише часткові розв'язки;

2) проводиться вибір базисної системи $\mathbf{S}(t)$ і відповідних їй операційних матриць інтегрування $\mathbf{P}^{\langle \nu \rangle}$ цілого і дробового порядків;

3) визначаються апроксимуючі поліноміальні спектри всіх тих функцій, що входять до рівнянь і вважаються відомими, у тому числі тих, що будуть отримані у результаті композиції інтегро-диференціальних операторів у п.1;

4) записується математична модель рівняння (системи рівнянь), що розв'язується, в операційній області з використанням операційних матриць інтегрування відповідних порядків і правил спектральної алгебри даного операційного числення;

5) визначаються АПС шуканих функцій через розв'язання алгебричної моделі в операційній області;

6) відновляються апроксимації розв'язання (розв'язань) на основі оберненого операційного перетворення.

Моделювання диференціальних рівнянь нецілих порядків у середовищі системи Mathematica [10] розглянемо на прикладі рівняння порядку $3/2$:

$$\frac{d^{3/2}y(t)}{dt^{3/2}} + y(t) = \sigma(t), \quad t \in [0;10], \quad (5)$$

що моделює відгук напівнескінченного електричного кола з втратами, навантаженого на індуктивність (рис.1, а), на одиничний стрибок напруги [2] при нульових початкових умовах.

Як базисну оберемо узагальнену систему локально-імпульсних функцій:

$$S(t) = \{v_1(t), \dots, v_m(t), w_1(t), \dots, w_m(t), u_1(t), \dots, u_m(t)\},$$

$$v_i(t) = \sigma(t - (i-1)h) - \sigma(t - ih), \quad (6)$$

$$w_i(t) = \left(\frac{2t}{h} + 1 - 2i \right) v_i(t), \quad (7)$$

$$u_i(t) = \left(6 \left(\frac{t}{h} \right)^2 - 6(2i-1) \frac{t}{h} + 6i(i-1) + 1 \right) v_i(t), \quad i = 1, \dots, m, \quad (8)$$

де $\sigma(t)$ – функція одиничного стрибка; $h = T/m$; T – проміжок інтегрування.

Згідно з описаним алгоритмом операційного метода чисельного розв'язання, диференціальне рівняння (5) необхідно замінити еквівалентним інтегральним рівнянням, проінтегрувавши рівняння (5) з порядком $3/2$. При цьому виникає питання про результат композиції двох інтегро-диференціальних операторів, але в даному випадку за рахунок нульових початкових умов відповідно до роботи [3] інтегральне рівняння матиме вигляд:

$$y(t) + [D^{-3/2}y(t)]_0^t = [D^{-3/2}\sigma(t)]_0^t. \quad (9)$$

При використанні локально-імпульсної базисної системи (6) – (9) в операційній області рівнянню (9) буде відповідати матричне рівняння:

$$\tilde{Y} + P^{<3/2>} \tilde{Y} = P^{<3/2>} \tilde{F},$$

де \tilde{Y} – вектор апроксимуючого імпульсного спектра (АПС) шуканої функції; \tilde{F} – АПС функції одиничного стрибка.

Результати чисельного розв'язку рівняння (5) показано на рис. 1, б. Наведений фрагмент програми мовою системи Mathematica реалізує розв'язок рівняння (5):

a = 0;

b = 10;

m = 30;

f = Function[t, UnitStep[t]];

F = AIS2[a, b, m, f];

A = N[IdentityMatrix[3 m] + IntegrMatrix[m, a, b, 2, 3/2]];

A1 = Inverse[A];

X = A1.N[IntegrMatrix[m, a, b, 2, 3/2].F];

xa[t_] = Sum[(X[[i]] v[t, h0, a, i] + X[[i+m]] w[t, h0, a, i] + X[[i+2*m]] u[t, h0, a, i]);

Функції AIS2 та IntegrMatrix реалізують відповідно побудову узагальненого АІС та побудову матриці інтегрування дробового порядку за формулами, наведеними в роботі [9].

Якщо абстрагуватися від розгляданої фізичної задачі та покласти в рівняння (8) показник диференціального оператора рівним α , що змінюється в межах, наприклад, від 0 до 2:

$$\frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha} + y(t) = \sigma(t), \quad t \in [0;10], \quad (10)$$

то, повторюючи усі попередні дії та міркування, отримаємо як розв'язок сім'ю кривих, зображену на рис. 2. При побудові графіка використовувалася апроксимація розв'язку за допомогою локально-імпульсного базису з кількістю інтервалів сітки $m_t = 20$ по просторовій змінній та $m_\alpha = 10$ за показником диференційного оператора.

Точка $\alpha = 0$ виключається, оскільки в цьому випадку диференціальне рівняння (10) вироджується. При $\alpha = 1,2$ рівняння (10) перетворюється на звичайне диференціальне рівняння, яке можна розв'язати аналітично. При $\alpha = 1$ точний аналітичний розв'язок (10) має вигляд:

$$y(t) = e^{-t}(1 - e^t)\sigma(t),$$

а при $\alpha = 2$ аналітичний розв'язок (10) можна отримати лише з точністю до невизначеної константи C_1 , оскільки задане лише одне початкове значення:

$$y(t) = -C_1 \sin(t) + (1 - \cos(t))\sigma(t).$$

Графіки відхилення чисельного розв'язку рівняння (10) від аналітичних при $\alpha = 1,2$ наведено на рис. 3. При цьому середньоквадратичне відхилення становило $7,09884 \cdot 10^{-8}$ при $\alpha = 1$ та $7,06399 \cdot 10^{-7}$ при $\alpha = 2$. При побудові графіків використовувалася апроксимація розв'язку за допомогою локально-імпульсного базису з кількістю інтервалів сітки $m_t = 20$. При $\alpha = 2$ невизначена стала C_1 в аналітичному розв'язку обиралася з умови $y'(t) = 0$.

Моделювання системи лінійних рівнянь розглянемо на прикладі задачі Коші для системи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) - 3x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) + x_2(t), \end{cases} \quad t \in [0;1] \quad (11)$$

з початковими умовами

$$\begin{cases} x_1(0) = 1; \\ x_2(0) = -1. \end{cases} \quad (12)$$

Введемо вектори $\mathbf{X}(t) = \{x_1(t), x_2(t)\}^*$, $\mathbf{X}(0) = \{x_1(0), x_2(0)\}^*$ та матрицю системи \mathbf{A} і перепишемо системи (11), (12) у векторно-матричній формі. Далі, діючи згідно з описаним алгоритмом, проінтегруємо отримане матричне рівняння та перейдемо в операційну область. При використанні локально-імпульсної системи базисних функцій (6) – (8) в операційній області отримаємо, згідно з роботою [11], таку операційну модель:

$$\tilde{\mathbf{X}} - (\mathbf{A} \otimes \mathbf{P}^{\langle \Delta \rangle}) \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{F}, \quad (13)$$

де вектор $\tilde{\mathbf{X}}$ – спектр шуканого вектора $\mathbf{X}(t)$; \mathbf{F} – спектр початкових умов; \otimes – знак тензорного добутку.

На рис. 4, а наведено результати чисельного розв'язку задачі Коші (11) – (12) при використанні узагальненої системи локально-імпульсних базисних функцій (6) – (8) та $m = 10$.

Оскільки відомий точний аналітичний розв'язок системи (11) – (12):

$$\begin{cases} x_1(t) = e^t(\cos 3t + \sin 3t); \\ x_2(t) = e^t(\sin 3t - \cos 3t), \end{cases}$$

то маємо змогу оцінити середньоквадратичне відхилення апроксимації, яке для даної задачі при $m = 10$ становить приблизно 10^{-8} . Графіки функцій похибки наведено на рис. 4, б.

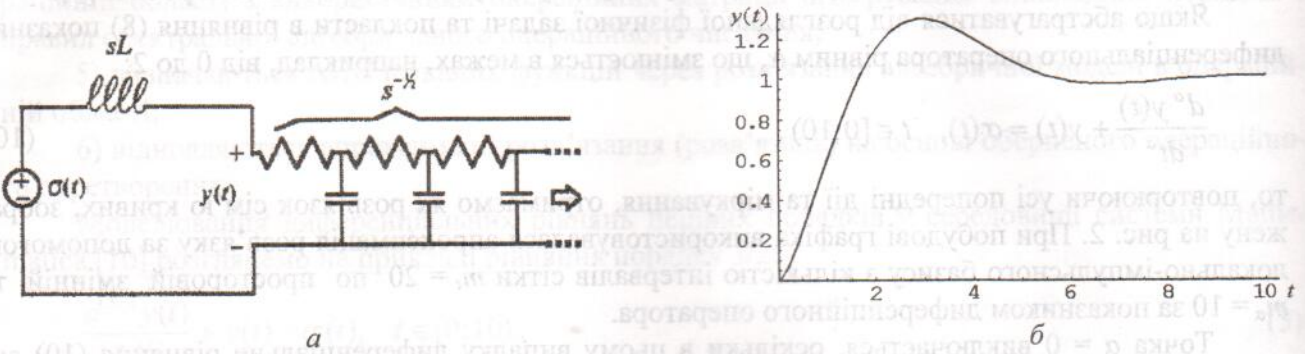


Рис. 1. Приклад диференціального рівняння нецілого порядку:

а – напівнескінченне електричне коло з втратами, навантажене на індуктивність;

б – апроксимація розв’язку рівняння (5) за допомогою локально-імпульсного базису ($m = 30$)

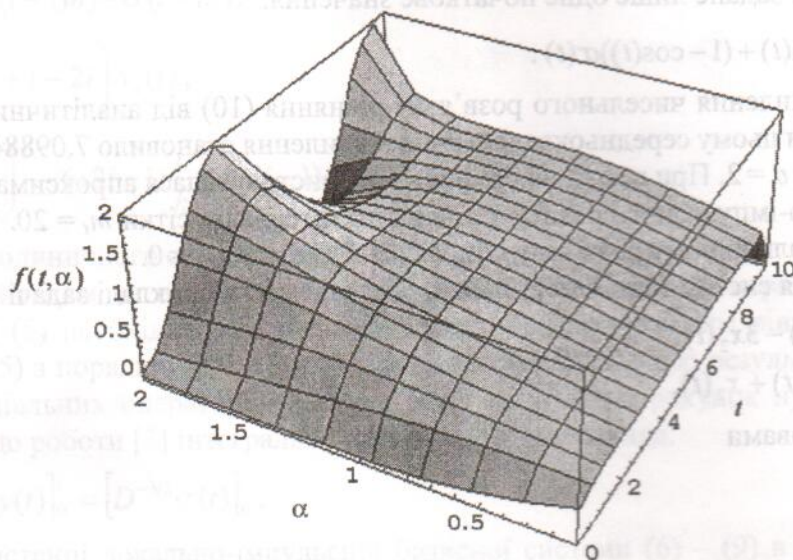


Рис. 2. Сім’я розв’язків диференціального рівняння нецілого порядку (10) при $\alpha \in (0, 2]$

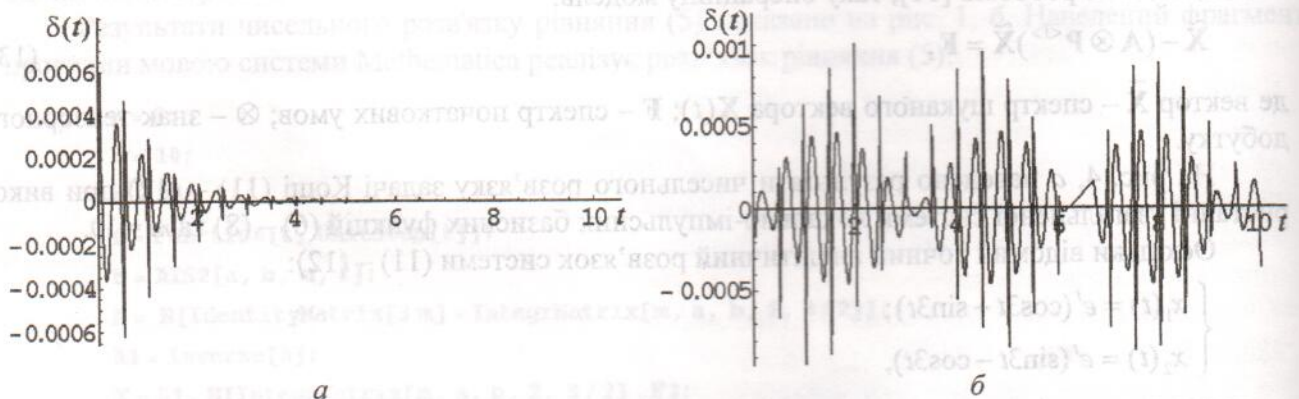


Рис. 3. Відхилення чисельного розв’язку (10) від аналітичного:

а – $\alpha = 1$; б – $\alpha = 2$

Наведений фрагмент програми мовою системи Mathematica реалізує розв'язок задачі (11)–(12):

```
<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`;  
a = 0;  
b = 1;  
m = 10;  
F1 = Join[Table[1, {i, m}], Table[0, {i, 2 m}]];  
F2 = Join[Table[-1, {i, m}], Table[0, {i, 2 m}]];  
F = Join[F1, F2];  
A = {{1, -3}, {3, 1}};  
M = IdentityMatrix[6 m];  
P = IntegrMatrix[m, a, b, 2, 1];  
D0 = N[M - BlockMatrix[Outer[Times, A, P]]];  
D1 = Inverse[D0];  
X = D1 . F;
```

Як і у попередньому прикладі, функція IntegrMatrix реалізує побудову матриці інтегрування дробового порядку. Оскільки права частина рівняння (13) складається лише зі спектрів початкових умов, то з метою скорочення часу виконання програми вона будується безпосередньо, без використання функцій побудови спектру. В отриманому векторі перші $3m$ компоненти відповідають АІС шуканої функції $x_1(t)$, а решта – АІС функції $x_2(t)$.

З деякими зауваженнями запропонований метод можна розповсюдити і на випадок моделювання нелінійних рівнянь та рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Для цього необхідно побудувати алгебру спектрів, де зазначити правила перетворення спектрів, які б відповідали добутку та частці двох функцій, піднесенню функції до степеня, суперпозиції двох функцій та іншим нелінійним операціям. У загальному випадку ця задача навряд чи може бути розв'язана, але для деяких базисних систем та деяких операцій такі правила були побудовані. Зокрема, у роботах [8; 12] досліджувалися окремі питання алгебри відповідно апроксимуючих імпульсних та блочно-імпульсних спектрів.

Розглянемо моделювання рівняння зі змінними коефіцієнтами на прикладі задачі Коші для рівняння тепловкладення при електричному зварюванні [13]:

$$\begin{cases} \frac{dh(t)}{dt} + a(b + cv(t))h(t) = d i(t)u(t); \\ h(0) = h_0, \end{cases} \quad (14)$$

де $h(t)$ – шукана функція тепловкладення; $v(t)$ – функція швидкості зварювання; $i(t)$ – функція струму; $u(t)$ – функція напруги; a, b, c, d – деякі константи, що залежать від фізичних властивостей об'єктів зварювального процесу, а незалежна змінна t змінюється в межах $[0, T]$.

Перейдемо від рівняння (14) до еквівалентного інтегрального рівняння:

$$h(t) - h_0 + ab \int_0^t h(\tau) d\tau + ac \int_0^t v(\tau) h(\tau) d\tau = d \int_0^t i(\tau) u(\tau) d\tau. \quad (15)$$

Вибиремо базисну систему, що складається лише з функцій (6). Така базисна система носить назву блочно-імпульсної [12]. Для даної базисної системи формула обчислення спектру добутку двох функцій має такий вигляд. Нехай маємо дві довільні функції $x(t)$ та $y(t)$, причому функції $x(t)$ відповідає в операційній області спектр $\mathbf{X} = \{x_i\}_{i=1}^m$, а функції $y(t)$ – спектр $\mathbf{Y} = \{y_i\}_{i=1}^m$. Тоді їх добутку $z(t) = x(t)y(t)$ відповідатиме спектр:

$$\mathbf{Z} = \{z_i\}_{i=1}^m = \{x_i y_i\}_{i=1}^m.$$

До лівої частини рівняння (15) входить нелінійний доданок, який містить інтеграл добутку відомої функції швидкості $v(t)$ на шукану функцію тепловкладення $h(t)$. В операційній області операції інтегрування відповідає добуток спектра функції на так звану матрицю інтегрування. Тобто для добутку двох функцій матимемо:

$$\int_0^t z(t) dt = \int_0^t x(t)y(t) dt \Leftrightarrow \mathbf{P}^{<1>} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{P}^{<1>} \cdot (\mathbf{XY}),$$

де крапкою позначений добуток матриці на вектор у звичайному сенсі, а в дужках – поелементний добуток компонентів двох векторів.

Отже, якщо поставити у відповідність до кожної функції з рівняння (15) вектор її спектру: $h(t) - \mathbf{H}$, $v(t) - \mathbf{V}$, $i(t) - \mathbf{I}$ та $u(t) - \mathbf{U}$, то в операційній області отримаємо:

$$\mathbf{H} + ab\mathbf{P}^{<1>} \cdot \mathbf{H} + ac\mathbf{P}^{<1>} \cdot (\mathbf{VH}) = d\mathbf{P}^{<1>} \cdot (\mathbf{IU}) + h_0\mathbf{1}, \quad (16)$$

де $\mathbf{1}$ – спектр одиниці.

Якщо тепер ввести матрицю $\mathbf{T} = \{t_{ij}\}_{i,j=1}^m$, компоненти якої обчислюється так:

$$t_{ij} = p_{ij}v_j, \quad i, j = 1, \dots, m,$$

де p_{ij} – компоненти матриці інтегрування, то матричне рівняння (16) можна переписати у вигляді, зручному для його розв'язання:

$$\underbrace{(\mathbf{E} + ab\mathbf{P}^{<1>} + ac\mathbf{T})}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{H} = \underbrace{d\mathbf{P}^{<1>} \cdot (\mathbf{IU})}_{\mathbf{F}} + h_0\mathbf{1}, \quad (17)$$

де \mathbf{E} – одинична матриця.

Чисельне моделювання задачі Коші (17) проводилося для різних значень сталих параметрів, що входять до рівняння. Так, на рис. 5, *г* наведено розв'язок рівняння, що відповідає вистиганню ванни при вимкненому джерелі живлення та заданому початковому значенні $h_0 = 10$. При цьому $a = 0,02$, $b = 1$, $c = d = 0$.

На рис. 5, *д* досліджується випадок, коли при нульовій швидкості зварювання джерело живлення працює так, що забезпечує постійне значення потужності, тобто

$$i(t)u(t) = \text{const} = 1,$$

та параметри $a = 0,02$, $b = 1$, $d = 10$, $c = h_0 = 0$.

На рис. 5, *е* продемонстровано імітацію моніторингу реального процесу зварювання*. Сталі параметри задачі $a = 0,02$; $b = 1$; $c = 1$; $d = 10$; $h_0 = 0$. Використані при моделюванні сигнали струму, напруги та швидкості, наведені на рис. 5, *а*, *б*, *в* відповідно, частково є штучно генерованими, а частково – записом даних реального процесу, отриманих під час експерименту.

Приклад функції мовою системи Mathematica, яка реалізує побудову матриці \mathbf{T} :

```
NElementMultiply = Function[{A0, B0},
```

```
T0 = Table[0, {i, Dimensions[A0][[1]]}, {j, Dimensions[A0][[2]]};
```

```
If[Length[B0] ≠ Dimensions[A0][[2]], T0,
```

```
For[i = 1, i ≤ Dimensions[A0][[1]], i++,
```

```
For[j = 1, j ≤ Dimensions[A0][[2]], j++,
```

```
T0[[i, j]] = A0[[i, j]] B0[[j]]
```

```
]];
```

```
T0]];
```

За винятком блоків, пов'язаних з апроксимацією нелінійностей, програма моделювання задачі Коші (14) для рівняння зі змінними коефіцієнтами на мові системи Mathematica буде аналогічна наведеним програмам для моделювання диференціальних рівнянь нецілого порядку та систем лінійних диференціальних рівнянь. Отже, наведемо фрагмент, що відповідає за побудову лівої та правої частини матричного рівняння (17):

* Робота частково підтримана Науково-технічним центром в Україні, проект № 1615.

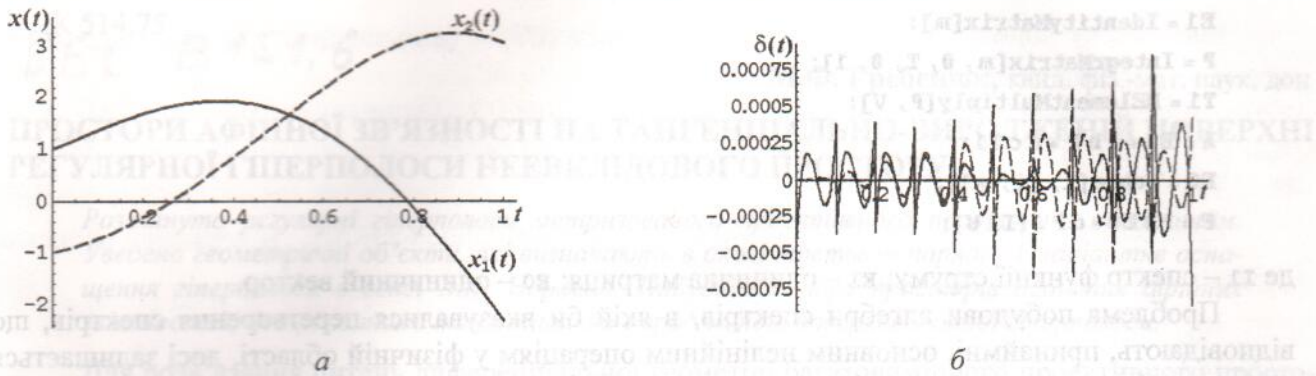


Рис. 4. Приклад системи лінійних рівнянь:

а – апроксимація розв'язку (11), (12) за допомогою локально-імпульсного базису ($m = 10$);
 б – похибка апроксимації для $x_1(t)$ (суцільна крива) та $x_2(t)$ (штрихова крива)

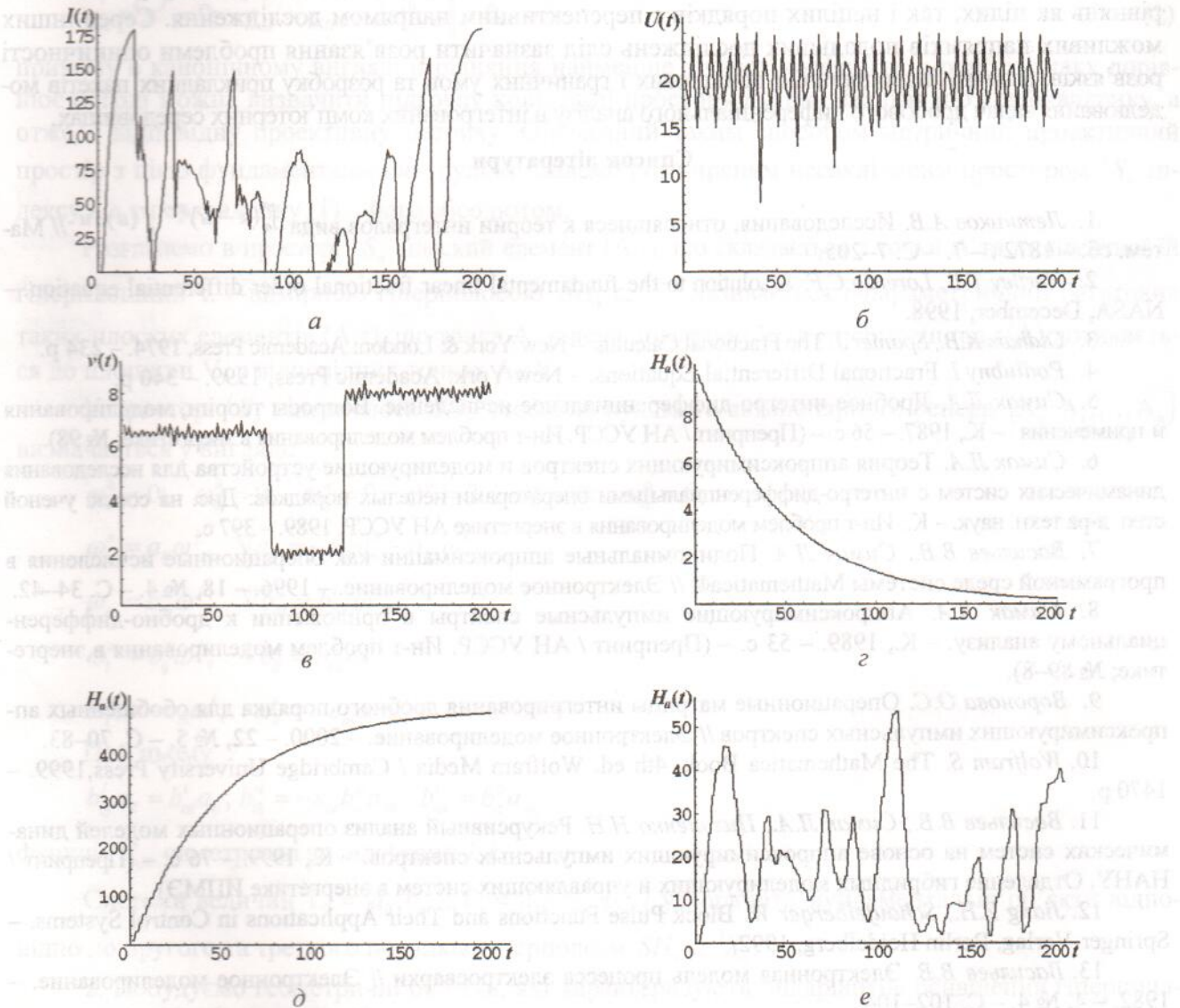


Рис. 5. Приклад рівняння зі змінними коефіцієнтами:

а – графік функції струму; б – графік функції напруги; в – графік функції швидкості зварювання; г – апроксимація розв'язку (14) за допомогою блочно-імпульсного базису ($m = 100$) в умовах вимкненого джерела живлення та при ненульовій початковій умові; д – апроксимація розв'язку при нульовій швидкості та сталій правій частині; е – розв'язок рівняння (14) в умовах імітації реального процесу


```

E1 = IdentityMatrix[m];
P = IntegrMatrix[m, 0, T, 0, 1];
T1 = NElementMultiply[P, V];
A = E1 + a b P + a c T1;
E0 = Table[1, {i, m}];
F = H0 E0 + d P . (I1 U);

```

де $\mathbf{I1}$ – спектр функції струму; $\mathbf{E1}$ – одинична матриця; $\mathbf{E0}$ – одиничний вектор.

Проблема побудови алгебри спектрів, в якій би вказувалися перетворення спектрів, що відповідають, принаймні, основним нелінійним операціям у фізичній області, досі залишається відкритою і, отже, може стати цікавим напрямком подальших досліджень у цій галузі.

Крім того, запропонований метод моделювання диференціальних рівнянь нецілого порядку та їхніх систем може бути узагальнений на випадок функцій кількох змінних, тому дослідження і розробка методів моделювання крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь як цілих, так і нецілих порядків є перспективним напрямком дослідження. Серед інших можливих напрямків подальших досліджень слід зазначити розв'язання проблеми одиничності розв'язків, фізичну інтерпретацію початкових і граничних умов та розробку прикладних пакетів моделювання задач дробового диференціального аналізу в інтегрованих комп'ютерних середовищах.

Список літератури

1. *Летников А.В.* Исследования, относящиеся к теории интегралов вида $\int_a^x (x-u)^{p-1} f(u) du$ // Матем. сб. – 1872. – 7. – С. 7–205.
2. *Hartley T.T., Lorenzo C.F.* A solution to the fundamental linear fractional order differential equation. – NASA, December, 1998.
3. *Oldham K.B., Spanier J.* The Fractional Calculus. – New York & London: Academic Press, 1974. – 234 p.
4. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. – New York: Academic Press, 1999. – 340 p.
5. *Симак Л.А.* Дробное интегро-дифференциальное исчисление. Вопросы теории, моделирования и применения. – К., 1987. – 56 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т проблем моделирования в энергетике; № 98).
6. *Симак Л.А.* Теория аппроксимирующих спектров и моделирующие устройства для исследования динамических систем с интегро-дифференциальными операторами нецелых порядков: Дис. на соиск. ученой степ. д-ра техн. наук. – К.: Ин-т проблем моделирования в энергетике АН УССР, 1989. – 397 с.
7. *Васильев В.В., Симак Л.А.* Полиномиальные аппроксимации как операционные исчисления в программной среде системы Mathematica® // Электронное моделирование. – 1996. – 18, № 4. – С. 34–42.
8. *Симак Л.А.* Аппроксимирующие импульсные спектры в приложении к дробно-дифференциальному анализу. – К., 1989. – 53 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т проблем моделирования в энергетике; № 89–8).
9. *Воронова О.С.* Операционные матрицы интегрирования дробного порядка для обобщенных аппроксимирующих импульсных спектров // Электронное моделирование. – 2000. – 22, № 5. – С. 70–83.
10. *Wolfram S.* The Mathematica Book, 4th ed. Wolfram Media / Cambridge University Press, 1999. – 1470 p.
11. *Васильев В.В., Симак Л.А., Пилипенко Н.Н.* Рекурсивный анализ операционных моделей динамических систем на основе аппроксимирующих импульсных спектров. – К., 1999. – 76 с. – (Препринт / НАНУ. Отделение гибридных моделирующих и управляющих систем в энергетике ИПМЭ).
12. *Jiang Z.H., Schaufelberger W.* Block Pulse Functions and Their Applications in Control Systems. – Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.
13. *Васильев В.В.* Электронная модель процесса электросварки // Электронное моделирование. – 1982. – 4, № 4. – С. 102–104.

Стаття надійшла до редакції 15.04.02.