$$n = -\frac{C_3}{C_2 + C_S};$$

$$|A_V| > \frac{C_2 + C_S}{C_3}\left(1 + \frac{R_C}{R_{eq}}\right).$$

Використовуючи отримані результати, авторами розроблено ГКН за схемою Колпиця, який робить у діапазонах частот 16–18 МГц та має чутливість $S_н \leq 500$ кГц/В. Практична робота схеми показала повну відповідність параметрів ГКН до аналітичних результатів.

Схема спроектованого ГКН подана на рис. 13.

Схеми ГКН на ОП дозволяють одночасно одержати гармонійну напругу в точці *2* і напругу меандру в точці *1*. У цьому їхня перевага над схемами ГКН на транзисторах, у яких вихідним сигналом є синусоїдальна напруга, а для одержання прямокутних імпульсів напруги в системі ФАПЧ необхідно застосовувати тригер Шмітта.

Список літератури

1. *Savant C.J., Roden M.S.,Carpenter G.L.* Electronic Design. Circuits and Systems. Second Edition. 1991. The Benjamin // Cummings Publishing Company, Inc.
2. http://www.national.com.
3. http://www.burr-brown.com.
4. *Burns S.G., Bond P.R.* Principles of Electronic Circuits. Second Edition // International Thomson Publishing Inc. – 1997.
5. *Зернов Н.В., Карпов В.Г.* Теория радиотехнических цепей. – 2-е. Изд. – Ленинград: Энергия, 1972. – 236 с.
6. *Lee T.H.* The Design of CMOS Radio-Frequency Integrated Circuits // Cambridge University Press, 2000.

Стаття надійшла до редакції 04.09.02.

УДК 519.81:621.372
ББК 3 811, 722 b631

І.А. Жуков, д-р техн. наук, проф.,
А.А. Засядько, канд. техн. наук, доц.

БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ВИРОДЖЕНИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Запропоновано багатокритеріальний метод, що використовує регуляризацію некоректної задачі на основі знаходження нормального розв'язку системи лінійних алгебричних рівнянь, який забезпечує стійкий наближений розв'язок виродженої системи рівнянь.

При розв'язанні вироджених систем лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) у практичних задачах цифрової обробки сигналів виникають певні труднощі.

При цифровій обробці сигналів значне місце займають моделі на основі операторних рівнянь

$$A_y = f, \tag{1}$$

коли СЛАР (1) – вироджена або погано обумовлена. Якщо детермінант близький до нуля, то така СЛАР – погано обумовлена, якщо det(A) = 0, то СЛАР (1) є виродженою. Якщо обчислення проводяться зі скінченною точністю, то у деяких випадках неможливо встановити, чи є задана система рівнянь виродженою або погано обумовленою, тобто погано обумовлені і вироджені системи можуть бути невизначеними в рамках заданої точності. У практичних задачах часто права частина f і елементи матриці A, тобто коефіцієнти системи рівнянь (1), задаються їх наближеннями, такими, що

$$\left\|\tilde{A} - A\right\| \leq \delta, \left\|\tilde{f} - f\right\| \leq \delta.$$

Проте систем з такими даними (A, f) нескінченно багато, і в рамках відомого рівня похибок вони не розрізняються між собою. Оскільки замість точної системи (1) ми маємо наближену систему, то знайти можна лише наближений розв'язок, яких може бути безліч.

А.М. Тіхонов у роботі [1] ввів поняття нормального розв'язку для розв'язання вироджених і погано обумовлених СЛАР (1), яке стійке до малих змін початкових даних (A, f). Нормальним розв'язком СЛАР (1) щодо вектора y^1 є розв'язок y^0, для якого

$$\| y^0 - y^1 \| = \inf_{y \in F_A} \| y - y^1 \|,$$

де $\| y^0 \| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}$.

Таким чином, задача зводиться до мінімізації функціонала $\| y^0 - y^1 \|^2$ на множині векторів, що задовольняють нерівності

$$\| Ay - \widetilde{f} \| \le \delta,$$

тобто необхідно знайти вектор y^α, що мінімізує згладжуючий функціонал [1]:

$$M^\alpha[y, \widetilde{f}, \alpha] = \alpha \| y^0 - y^1 \|^2 + \| Ay - \widetilde{f} \|^2, \tag{2}$$

де α – параметр регуляризації.

Розв'язання параметричної задачі оптимізації пов'язано зі значними труднощами. Крім того, взагалі сумнівне знаходження оптимального параметра регуляризації. Наведемо метод, що використовує багатокритеріальну оптимізацію без застосування параметра регуляризації. Багатокритеріальні задачі відносяться до класу задач, які важко вирішуються, оскільки їх обчислювальна складність лінійно залежить від розмірності векторного критерія і експоненціально від розмірності вектора шуканого розв'язку, однак у роботах [2; 3; 4] доведена ефективність застосування багатокритеріальної оптимізації для широкого класу задач. Використаємо поняття частинних критеріїв у значенні критеріїв якості, які властиві для багатокритеріальної оптимізації, щоб визначити умови для отримуваного розв'язку.

Нехай векторний критерій (або цільова функція) обмежений допустимою областю $I \in \Omega(I)$. Кожна компонента векторного критерія I описується частинним критерієм I_i, $i = \overline{1, n}$, визначеним на розв'язках $y \in Y$ СЛАР (1). Багатокритеріальна задача розв'язання СЛАР (1) полягає у визначенні екстремалей $\{y^*(s)\}$, $y^* \in Y$, $I^* \in (I)$, які при заданих умовах, визначених мірою апріорної інформації про розв'язок $y(s)$, оптимізують векторний функціонал I.

На основі згладжуючого функціонала (2) сформуємо частинні критерії, з яких будемо формувати векторний критерій I. При розв'язанні задачі багатокритеріальної оптимізації сукупність цих частинних критеріїв утворює векторний критерій I.

Перший критерій I_1 відповідає за сумарне відхилення отримуваного розв'язку:

$$I_1 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2. \tag{3}$$

На критерій I_1 накладаються обмеження:

$$0 \le I_1 \le I_{1\mathrm{m}} = n 10^{-2l}$$

або

$$0 \le I_1 \le I_{1\mathrm{m}} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = n\delta^2, \tag{4}$$

де l – довжина розрядної сітки початкових даних; n – кількість рівнянь; δ – похибка правої частини рівняння (1).

При реалізації роз'вязку потрібно враховувати, що вказана в рівнянні (4) величина $I_{1\mathrm{m}}$ мінімальна, і для підвищення числової стійкості необхідно завищувати це значення, виходячи з особливостей задачі.

Другий критерій – критерій по числовій стійкості, яка гарантується нормальним розв'язком за Тіхоновим, тобто мінімізує норму розв'язку [1]:

$$I_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \,. \tag{5}$$

Обмеження на критерій I_2 вибираються з фізичної реалізації розв'язку. Вони накладаються на допустиму область розв'язку:

$$0 \le I_2 \le I_{2m} = R = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_{i\max}^2} \,, \tag{6}$$

де R – радіус сфери, в якій знаходиться розв'язок.

На основі інтегральної суми частинних критеріїв I_1, I_2 сформуємо скалярний критерій I^1, що підлягає мінімізації:

$$\min_y I^1(y) = \alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 \tag{7}$$

за умов (4), (6), де $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, коли критерії рівнозначні. В іншому випадку за допомогою цих коефіцієнтів можна здійснити нормування частинних критеріїв:

$\alpha_1 = 1/I_{1m}$, $\alpha_2 = 1/I_{2m}$.

Модель (7) називається моделлю інтегральної оптимальності [2; 4].

Однак мінімізація відхилу конфлікту є з мінімізацією норми розв'язку (або числовою стійкістю). Тому задачу знаходження мінімуму критеріїв I_1, I_2 вирішуємо як двокритеріальну задачу по нелінійній схемі компромісу Вороніна:

$$\min_y I^2(y) = \frac{1}{1 - \dfrac{I_1}{I_{1m}}} + \frac{1}{1 - \dfrac{I_2}{I_{2m}}} \,. \tag{8}$$

Задача (8) за умови, що частинні критерії – строго опуклі функції, є безумовною задачею оптимізації, в той час, як для задачі, складеної за формулою (7), необхідно вводити умови. Однак модель (8) чутлива до завдання нормуючого вектора обмежень I_{im}, який за умовою формування СЛАР (1) може бути заданий евристично.

Необхідні умови мінімуму скалярних критеріїв I^i (7), (8) дають систему скінченних рівнянь:

$$\frac{\partial I}{\partial y_i} = 0, i = \overline{1,n} \,. \tag{9}$$

Внаслідок диференціювання (9) отримуємо систему нелінійних рівнянь низької розмірності, яка зводиться, наприклад, з використанням методу Ньютона до СЛАР.

У роботах [2; 4] показано, що багатокритеріальна модель (8) забезпечує вибір точки розв'язку на множині розв'язків, оптимальних за Парето (далі – множина P), з урахуванням заданих обмежень на допустиму область зміни векторного критерію, якщо множина P належить цій області. Тому для розв'язання багатокритеріальних задач потрібно рекомендувати модель (8). До переваг моделі (8) потрібно віднести меншу розмірність ($2n$), ніж у методі множників Лагранжа ($3n$). Крім того, не використовується параметр регуляризації α, наявність якого обумовлюється класичними методами розв'язання (1). Недолік моделі (8) полягає в тому, що рівняння в системі (9) при великій розмірності будуть громіздкими.

Результати моделювання показали, що в процесі оптимізації векторного критерію I частинні критерії I_i оптимізуються нерівномірно, причому частинний критерій I_1 змінюється повільно в той час, як I_2 дуже швидко, тобто I_1 – спокійний критерій, I_2 – напружений критерій, який може досягти свого граничного значення. Поняття напруженості введено в роботах [2; 4]. В такому разі одержаний розв'язок за моделлю (8), як правило, виявляється нестійким і неоптимальним, тобто що лежить поза областю P.

Для того, щоб збалансувати процес оптимізації в безумовній задачі (8), необхідно вводити обмеження по спокійних частинних критеріях. Якість розв'язку при цьому може бути значно поліпшена, однак задача істотно ускладнюється, оскільки не враховується одна з головних переваг нелінійної схеми компромісів (8) за умови суворої опуклості критеріїв I_i – відсутності обмежень, які вже закладені в її структурі як нормуючий вектор обмежень.

Залежно від граничних значень I_i ситуація також буде або спокійною, або напруженою [2; 4]. Запропонуємо схему гнучкої адаптації і вирівнювання частинних критеріїв, що реалізують зведення напруженої ситуації до спокійної. При числовій реалізації задач оптимізації за цією схемою не потрібно вводити додаткові обмеження по спокійних частинних критеріях, які неминучі за наявності напружених частинних критеріїв, тобто задача оптимізації за запропонованою схемою є безумовною, що показали попередні дослідження за допомогою моделювання. Скалярний критерій у цьому випадку буде мати вигляд:

$$\min_y I^1(y) = \arg\min_{x\in X}\Big(\sum_{k=1}^{s_н}\alpha_k[1-I_k(y)]^{-1} + \sum_{k=1}^{s-s_н}\alpha_k I_k(y)\Big); \alpha_k \geq 0; \sum_{k=1}^{s}\alpha_k = 1; \quad (10)$$

де $s_н$– кількість напружених частинних критеріїв.

Перевага запропонованої моделі – це більша стійкість до завдання нормуючого вектора обмежень, ніж у модулі (8).

Запропонована формула (10) поєднує в собі переваги як нелінійної схеми компромісів (8), так і схеми інтегральної оптимальності (7), оскільки перша сума пристосовується до напруженої ситуації, а друга – збільшує внесок у вектор $I(y)$ звичайних, спокійних частинних критеріїв.

Використаємо запропоновану методику для розв'язання рівняння (1) за допомогою багатокритеріальної оптимізації. Для всіх розглянутих модельних прикладів на основі критеріїв (7), (8) частинний критерій по відхиленню I_1 (3) малий – ситуація спокійна. Тут неблагополучний критерій I_2 – норма розв'язку (5). Вся нелінійна схема компромісів (8) працює тільки на компенсацію одного неблагополучного критерію, тобто норми розв'язку, не враховуючи інші. Тому для моделей (1)–(3) важливу роль відіграють обмеження по благополучних критеріях. Модель (8) замінимо моделлю на основі критерію (10):

$$\min_y I^3(y) = \alpha_1 I_1 + \frac{\alpha_2}{1-\dfrac{I_2}{I_{2m}}}. \quad (11)$$

Різке зростання критерію норми розв'язку I_1 компенсуємо формулою (8) тільки для критерію I_2. Дана модель забезпечить мінімальний сумарний рівень частинних критеріїв.

Розглянемо модельний приклад на основі виразу (1), який будемо розв'язувати різними методами, у тому числі і багатокритеріальною оптимізацією на основі формул (7)–(8).

Нехай дана СЛАР [1]:

$$y_1 + 7y_2 = 5;$$
$$\sqrt{2}y_1 + \sqrt{98}y_2 = \sqrt{50}. \quad (12)$$

Друге рівняння системи (12) отримано шляхом множення першого рівняння на $\sqrt{2}$ і внесення під знак кореня його коефіцієнтів. Нормальний розв'язок для системи (12) є вектор y=[0,1; 0,7]. Позбудемося ірраціональності в другому рівнянні:

$$1{,}41y_1 + 9{,}90y_2 = 7{,}07.$$

При такому округленні виходить розв'язок: y=[1/3; 2/3]. При збільшенні кількості утримуваних знаків при записі ірраціональних чисел розв'язки поводять себе вкрай нерегулярно і не наближаються ні до нормального, ні до якого-небудь фіксованого розв'язку системи (12).

Частинні критерії сформуємо на основі формул (3)–(6).

$$I_1 = \sum_{i=1}^{n}\delta_i^2 = (y_1 + 7y_2 - 5)^2 + (\sqrt{2}y_1 + \sqrt{98}y_2 - \sqrt{50})^2;$$

$I_{1m} = n10^{-2l}$, n=2, l=3;

$I_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = y_1^2 + y_2^2$; I_{2m}=R^2 =1.

За допомогою програми Mathcad було знайдено розв'язки модельного прикладу (11) для різних методів. Постановка задачі нелінійного програмування на основі запропонованих критеріїв має такий вигляд:

– задача знаходження мінімального сумарного відхилення для розв'язку:

$$\min_y I_1 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 , \tag{13}$$

– задача знаходження нормального розв'язку за Тіхоновим:

$$\min_y I_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} . \tag{14}$$

Критерії, не задіяні в цільовій функції, переведені в розряд обмежень.
Результати обчислень наведені у таблиці.

Результати розв'язання модельного прикладу (12) за допомогою багатокритерійної оптимізації

Метод розв'язання прикладу (12)	Розв'язок
Модель (7)	[0,1; 0,7]
Модель (8) – безумовна	[0,08;0,73]
Модель (8) з умовою на критерій I_1	[0,1; 0,7]
Модель (11)	[0,1; 0,7]
Задача нелінійного програмування (13)	[0,078; 0,703]
Задача нелінійного програмування (14)	[0,1; 0,7]

Отже, для розв'язання задач цифрової обробки сигналів пропонується метод розв'язання вироджених СЛАР на основі скалярної згортки частинних критеріїв за допомогою нелінійної схеми компромісів з введенням в неї частинних критеріїв на нормальний розв'язок і на відхил. Безумовна оптимізація отриманого скалярного критерію зводить задачу розв'язання виродженої СЛАР до стійкої задачі розв'язання системи скінченних рівнянь. Даний метод забезпечує мінімальний сумарний рівень частинних критеріїв.

Список літератури

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
2. *Векторная* оптимизация динамических систем / А.Н. Воронин, Ю.К. Зиатдинов, О.И. Козлов, В.С. Чабанюк / Под ред. А.Н. Воронина. – К.: Техніка, 1999. – 284 с.
3. *Квазианалоговые* многокритериальные модели оптимизации динамических процессов / В.Л. Баранов, Н.С. Залогин, О.С. Уруский и др. // Электронное моделирование. –1996. – Т.18, № 5 – С. 3–9.
4. *Воронин А.Н.* Многокритериальный синтез динамических систем. – К.: Наук. думка, 1992. – 160 с.

Стаття надійшла до редакції 14.10.02.