УДК 62.50
ББК 3 811.722

В.К. Антонов, канд. техн. наук, доц.

ПОБУДОВА ЯКІСНИХ ОПТИМАЛЬНИХ РЕГУЛЯТОРІВ І ФІЛЬТРІВ КАЛМАНА

Запропоновано модифікацію методу оптимальної фільтрації Калмана, що забезпечує можливість керування процесом фільтрації, максимальну швидкодію та обмеження коливальності. Сформульовано принцип циклічного оператора досягнення мети, що полягає в багаторазовому послідовному застосуванні оператора досягнення мети при використанні результатів його попередніх застосувань, на прикладі задач наближення функцій, керування, фільтрації.

Побудова сучасних систем керування призводить до необхідності забезпечення їхньої якісної працездатності в умовах дії перешкод через застосування регуляторів і фільтрів, що забезпечує повніше використання корисних ресурсів об'єктів керування. Збільшення продуктивності об'єктів керування пов'язане зі збільшенням рівня взаємодії із зовнішнім середовищем. Це обумовлює зростання перешкод, тому застосування якісних регуляторів і фільтрів є істотним чинником підвищення продуктивності і здешевлення технічних виробів. При розв'язанні задач керування і фільтрації істотним є забезпечення максимальної точності, швидкості оцінювання і його мінімальної коливальності щодо вимірюваних координат. Поставимо задачу побудови якісного фільтра, для якого швидкодія і коливальність є керованими, а самі керування можуть бути знайдені на вищому стосовно керувань об'єктом ієрархічному рівні, але разом з ними.

Оптимальний якісний фільтр може бути отриманий різними способами. Для його побудови скористаємося, наприклад, властивістю подвійності задач оптимального керування і фільтрації. У роботі [1] наведено виведення функціонального рівняння для перебування оптимального якісного регулятора, що забезпечує обмеження швидкодії і коливальності перехідних процесів. Для лінійної жорсткої диференціальної системи

$$\dot{X} = AX + Bu \tag{1}$$

функціонал якості, що враховує швидкодію і коливальність, задається у вигляді:

$$I = \int_0^\infty \left(X^* PX + \dot{X}^* G\dot{X} + u^* Ru + c_1 V_1 + c_2 V_2 \right) dt = \int_0^\infty (\omega(X,u) + c_1 V_1 + c_2 V_2) dt, \tag{2}$$

де P, G, R – матриці, що обмежують відповідно відхилення фазових координат, швидкості їхньої зміни – коливальність – і відхилення рулей; c_1, c_2 – параметри, що обмежують швидкодію по швидким і повільним змінним; V_1, V_2 – складові функції Белмана, що відповідають швидким і повільним змінним.

У підінтегральному виразі функціонала (2) перші три члени утворюють основну складову ω, що визначає змушену зміну функції Белмана. Інші члени $c_1 V_1$ і $c_2 V_2$ задають власну зміну функціонала, що визначає швидкодію. Поведінка мінімального значення функціонала підпорядкована рівнянню

$$\dot{V} + \omega(X,u) + c_1 V_1 + c_2 V_2 = 0.$$

Симетрична, позитивно визначена матриця Q квадратичної форми – функції Белмана – знаходиться так:

$$V(X) = X^* QX = V_1 + V_2 = X^* E_1 QX + X^* E_2 QX,$$

де E_1 і E_2 – проектори, що відокремлюють швидкі та повільні рухи.

Функція V задовольняє матричне рівняння Ріккаті, отримане з принципу оптимальності з урахуванням доповнення функціонала залежністю від функції його мінімального значення:

$$J_{21} + QJ_{11} + J_{11}^* Q - QJ_{12}Q = 0. \tag{3}$$

Матричні коефіцієнти в рівнянні Ріккаті (3) мають вигляд:

$$J_{21} = P + A^*GA - A^*GB(R + B^*GB)^{-1}B^*GA;$$

$$J_{11} = \frac{1}{2}(c_1E_1 + c_2E_2) + A - B(R + B^*GB)^{-1}B^*GA; \tag{4}$$

$$J^*_{11} = \frac{1}{2}(c_1E_1 + c_2E_2) + A^* - A^*GB(R + B^*GB)^{-1}B^*; \quad J_{12} = B(R + B^*GB)^{-1}B^*$$

Для системи (1) з рівняння (3) з урахуванням виразів (4) знаходимо оптимальний регулятор:

$$u = -(R + B^*GB)^{-1}(B^*GA + B^*Q)X = LX \tag{5}$$

з матрицею зворотних зв'язків L, замикання якими системи (1) забезпечує обмеження швидкодії і коливальності в параметричній формі залежності коефіцієнтів зворотного зв'язку (5) від параметрів швидкодії c_1, c_2 і матриці обмеження коливальності перехідних процесів G.

Нехай потрібно знайти оптимальний якісний фільтр Калмана для системи, що збурюється:

$$\dot{X} = AX + Bu + C\omega; \quad Y = SX + \eta,$$

де C – матриця зведення білого шуму до фазових координат об'єкта керування; ω, η – білі векторні шуми із дисперсійними матрицями R_1 і R_2; Y – вектор змінних стану, що спостерігаються; S – матриця обмеження виміру фазових координат.

Згідно з властивістю двоїстості задач керування і фільтрації, запишемо двоїстості відносно виразів (3) і (4) рівняння для перебування оптимального фільтра. Рівняння Ріккаті для обчислення кореляційної матриці помилок спостереження P має вигляд:

$$J_{21} + J^*_{11}P + PJ_{11} - PJ_{12}P = 0. \tag{6}$$

Матричні коефіцієнти задаються виразами:

$$J_{21} = R_1 + AGA' - AGS'(R_2 + SGS')^{-1}SGA';$$

$$J_{11} = \frac{1}{2}(c_1E_1 + c_2E_2) + A' - S'(R_2 + SGS')^{-1}SGA'; \tag{7}$$

$$J^*_{11} = \frac{1}{2}(c_1E_1 + c_2E_2) + A - AGS'(R_2 + SGS')^{-1}S; \quad J_{12} = S'(R_2 + SGS')^{-1}S.$$

У рівняннях (7) матриця G відбиває інтенсивність похідних помилок виміру. Розв'язком рівнянь (6) і (7) є матриця P, через яку знаходиться матричний коефіцієнт підсилення оптимального фільтра:

$$K = (PS' + AGS')(R_2 + SGS')^{-1}. \tag{8}$$

Оптимальний якісний диференціальний спостерігач визначається рівнянням:

$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X} + BL\hat{X} + K(Y - S\hat{X}). \tag{9}$$

При побудові регуляторів і фільтрів у постановочній частині задач відбуваються невизначеності, пов'язані з властивістю двоїстості. У задачах керування існує невизначеність завдання матриць у підінтегральному виразі функціонала. У задачах фільтрації звичайно погано визначено статистичні характеристики перешкод. Тому, розглядаючи відповідно процедури побудови регулятора і фільтрації як оператори, застосування яких до об'єктів керування не досягає кінцевої мети, а лише наближає до неї, побудуємо процедури керування і фільтрації циклічно. Послідовно покроково застосовуючи відповідний оператор, при наступному його застосуванні будемо використовувати результати попереднього.

Розглянемо задачу керування. На першому кроці обчислимо регулятор (5) для системи (1), що мінімізує функціонал (2). Знайдену матрицю зворотних зв'язків позначимо через L_1. Далі доповнимо систему (1) знайденим регулятором:

$$\dot{X} = (A + BL_1)X + Bu. \tag{10}$$

На другому кроці знайдемо регулятор L_2 для системи (10) і знову доповнимо її цим знайденим регулятором. Повторюючи цю процедуру j раз, одержимо замкнуту систему:

$$\dot{X} = \left(A + B\sum_{i=1}^{j} L_i \right) X . \qquad (11)$$

Процес побудови нових складових сумарної матриці керування в системі (11) збігається – нові додатки спадають за геометричною прогресією. Відповідно асимптотичний характер мають траєкторії коренів замкнутої системи і поводження мінімального значення функціонала.

Стосовно задач наближення функцій викладений підхід складається з покрокової апроксимації, обчислення відхилень чергової апроксимації від заданих вузлових значень, апроксимації функції відхилень і доповнення раніше знайденого наближення.

Розглянемо задачу фільтрації. Будемо вважати результати будь-якої попередньої оцінки стану вимірами для реалізації наступної їхньої оцінки. У підсумку приходимо до системи векторно-матричних диференціальних рівнянь спостерігача:

$$\dot{\hat{X}}_1 = A\hat{X}_1 + BL\hat{X}_1 + K_1(Y - S_0\hat{X}_1).$$

$$\dot{\hat{X}}_{i+1} = A\hat{X}_{i+1} + BL\hat{X}_{i+11} + K_{i+1}(\hat{X}_i - S_i\hat{X}_{i+1}) \ , \ i = \overline{1, j} . \qquad (12)$$

Перша підсистема в рівнянні (12) збігається із системою (9), має спостерігач (8) і може інтегруватися чисельно при неповному векторі спостереження, коли матриця S_0 неквадратна. Інші j підсистем можуть інтегруватися для випадку повного спостереження. Зазначений алгоритм має геометричний характер збіжності і при точному завданні диференціальної системи дозволяє необмежено збільшувати точність оцінювання. Унаслідок цього з'являється додаткова можливість сполученої з процесом фільтрації ідентифікації перешкод, що призводить до ще однієї нової можливості подальшого уточнення фільтра, а також уточнення параметрів моделі об'єкта керування. Із систем згідно з рівнянням (12) можна побудувати матричну блокову систему з перехресними зв'язками за оцінюваними змінними.

Доведення збіжності полягає в тому, що кожне чергове розв'язання задачі фільтрації, керування чи ідентифікації призводить до зменшення функції Ляпунова-Белмана відповідно до побудованого функціонала. Тому при проектуванні систем керування можливе визначення кратності вирішення задачі. Одержувані алгоритми мають властивість робастності по відношенню до характеристик шумів, що впливають на швидкість збіжності при збереженні скінченного результату. Алгоритм є ефективним, коли перша ітерація виконується при неповному спостереженні стану, а інші здійснюються повними спостерігачами. Через вибір керуючих швидкодією і коливальність параметрів можлива побудова адаптивних алгоритмів. Можлива також побудова в частотній області на основі формули Релея для похідних від фазових координат.

У застосуванні до задач ідентифікації при обмеженнях спостережень відповідна процедура складається з вибору на кожному кроці результатів попереднього кроку ідентифікації. Поряд з обчислювальною простотою й ефективністю викладений принцип носить універсальний характер. Йому звичайно підлеглі вчинки людини, що починає цілеспрямовані дії, і одержують утворення. Процес мислення також можна розглядати з позицій цього принципу, коли поступове формування раціональних зв'язків між окремими конструктивними елементами вибудовує їх у ланцюг, що з'єднує вихідні посилки з формованої, на початку погано визначеної, передбаченої і метою, яка уточнюється разом з вихідними посилками. З позицій цього принципу можна розглядати фізичні явища, наприклад, спонтанне лазерне випромінювання. Цьому принципу підкоряється багато технологічних процесів, наприклад, процесів прокатки і нафтоперегонки.

Список літератури

1. *Антонов В.К.* Метод синтезу лінійних регуляторів при заданій швидкодії і мінімумі коливальності перехідних процесів // Кібернетика й обчислювальна техніка. – 1992. – Вип. 99. – С. 59–65.

Стаття надійшла до редакції 01.07.02.