Висновок. Клас рівномірних кодів можна вважати розширенням кодів Грея [4], відмінна риса яких полягає в тому, що в послідовності n-розрядних двійкових чисел відстань за Хемінгом між сусідніми кодовими комбінаціями дорівнює одиниці. Отже, коди Грея є частковим випадком замкнутих рівномірних $m/n/1$-кодів з парною основою системи числення m, оскільки непарні системи замкнутих рівномірних кодів не утворюють.

Розроблений алгоритм побудови просторових моделей рівномірних кодів, в основу якого покладений так званий метод шарів рівної щільності, найбільш повно проілюстрований прикладами кодів з одиничною відстанню за Хемінгом. З рівним успіхом такий метод може бути використаний при розробці моделей рівномірних кодів, у яких R, залишаючись непарним числом, перевищує одиницю.

Поза рамками роботи залишилася задача оцінки числа замкнутих і відкритих рівномірних m-х кодів для різних значень довжини кодових комбінацій n і відстані за Хемінгом R.

Список літератури

1. *Білецький А.Я., Кучер О.Г.* Синтез і просторове моделювання рівномірних двійкових кодів // Вісн. НАУ. – 2002. – № 2. – С. 18–26.

2. *Берлекэмп Э.* Алгебраическая теория кодирования. – М.: Мир, 1971. – 450 с.

3. *Блейхут Р.* Теория и практика кодов, контролирующих ошибки: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 576 с.

4. *Білецький А.Я., Білецький О.А.* Синтез кодів Грея // Вісн. НАУ. – 2002. – № 1. – С. 29–34.

Стаття надійшла до редакції 17.06.02.

УДК 681.5:519.242/248

ББК В 171 + Ж 17-5-021,1 в 631,8

Ю.О. Єгоршин, канд. техн. наук, доц.,

О.Ю. Красноусова, асп.

НОВІ ТЕОРЕМИ ПРО ЙМОВІРНОСТІ ВІДМОВ ДЛЯ СЕРІЇ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПРОБУВАНЬ

Доведено теореми про ймовірності появи менш, ніж трьох відмов для серії випробувань у двох неоднакових умовах, яким відповідають різні ймовірності відмов для кожного випробування.

У теорії ймовірностей і математичній статистиці ймовірність появи числа K відмов у серії з N незалежних випробувань визначаються формулою біноміального розподілу (схема Бернуллі), якщо ймовірність відмови $q = \text{const}$ для кожного випробування, або формулою схеми Пуассона, якщо ймовірність q_i неоднакова для кожного i-випробування.

Схема Бернуллі дозволяє здійснити експериментальну перевірку гіпотези про ймовірність типу $W = 1 - q \geq W_{\text{Т}}$, якщо відомі значення N, K, а умови випробувань є однорідними (q=const) [1].

Схема Пуассона вимагає апріорного знання всіх значень q_i, тому вона не використовується для експериментальної перевірки ймовірності.

Для окремого випадку – пуассонівських розподілів відмов для будь-яких умов випробувань – пуассонівська схема вироджується в біноміальну схему. Це дозволяє за сумарними числами K і N для пропорційної вибірки визначити нижчу межу $W_{\text{т}}$ повної ймовірності відмов $W_{\text{п}}$ і перевірити гіпотезу $W_{\text{п}} > W_{\text{т}}$ за даними K, N [2].

З урахуванням близькості біноміального і пуассонівського розподілів є сенс визначити деякі корисні закономірності для ймовірностей появи числа K відмов у серії незалежних випробувань, якщо відбуваються різні j-умови випробувань і різні значення $q_j = \text{const}$, $j = 1,2, ...r$ (мається на увазі суміш біноміальних розподілів).

Аналіз, що був здійснений нами в роботах [2; 3], дозволяє обґрунтувати такі теореми.

Теорема 1. Імовірність β_o^* відсутності відмов для серії з N випробувань у неоднорідних умовах випробувань не більше ймовірності β_o відсутності відмов для серії з N випробувань в однорідних умовах, якщо неоднорідна вибірка є пропорційною, а постійна ймовірність відмови q в однорідних умовах дорівнює повній ймовірності відмови $q_\text{П}$ в неоднорідних умовах.

Доведення. Повна ймовірність відмови для неоднорідної сукупності дорівнює:

$$q_\text{П} = \sum_{j=1}^{r} S_j q_j, \tag{1}$$

де $\sum_{j=1}^{r} S_j = 1$; S_j – апріорна ймовірність (зустрічність) j-умов; q_j – умовна ймовірність.

Імовірність β_o^* дорівнює :

$$\beta_o^* = \prod_{j=1}^{r} (1-q_j)^{N_j} = \left(\prod_j (1-q_j)^{S_j} \right)^N = \left(\prod_j (W_j)^{S_j} \right)^N,$$

імовірність β_o:

$$\beta_o = (1-q)^N = (1-q_\text{П})^N = \left(\sum_{j=1}^{r} S_j W_j \right)^N. \tag{2}$$

Оскільки завжди виконується

$$\prod_{j=1}^{r} (W_j)^{S_j} \le \sum_{j=1}^{r} S_j W_j,$$

то $\beta_o^* \le \beta_o$, що і потрібно було довести.

Наслідок. Якщо S_j = const (j=1,2,…, r), то вибірка може складатися з одиничних випробувань у r-різних умовах. Якщо K = 0, то з ризиком $\beta_o^* \le \beta_o = (W_\text{Т})^r$ можливо прийняти гіпотезу $W_\text{П} \ge W_\text{Т}$.

Приклад : $N = r = 45$, $K = 0$, тоді з формули (2) маємо, що $W_\text{П} \ge 0{,}95$, $\beta_o = 0{,}1$.

Теорема 2. Імовірність B_1^* появи однієї відмови для двошарової пропорційної вибірки з однаковими вагами шарів не більше, ніж імовірність B_1 появи однієї відмови при однорідних умовах випробувань, яким відповідає однакова ймовірність відмови $q = q_\text{П}$ = const, якщо об'єм випробувань $N \ge 2 / q_\text{П}$.

Доведення. Якщо $S_1 = S_2 = 0{,}5$, $N_1 = N_2 = 0{,}5N$, то ймовірність B_1^* дорівнює:

$$B_1^* = N_1 (W_1)^{N_1-1} q_1 (W_2)^{N_2} + N_2 (W_2)^{N_2-1} q_2 (W_1)^{N_1} = N_1 (W_1 W_2)^{N_1} (q_1 / W_1 + q_2 / W_2). \tag{3}$$

Імовірність B_1, якщо $N = N_1 + N_2 = 2N_1$, дорівнює:

$$B_1 = N (W_\text{П})^{N-1} q_\text{П}. \tag{4}$$

Після ділення виразу (3) на формулу (4) маємо :

$$\phi_1 = 0{,}5 (\sqrt{W_1 W_2} / W_\text{П})^{2N_1} W_\text{П} / q_\text{П} (q_1 / W_1 + q_2 / W_2). \tag{5}$$

Нехай

$$W_1 = W_\text{П} (1+\delta), \tag{6}$$

тоді з формули (1) маємо:

$$W_2 = W_\text{П} (1-\delta). \tag{7}$$

Підставивши вирази (6), (7) у формулу (5), отримуємо:

$$\phi_1 = (1-\delta^2)^{N_1-1}(1+V\delta^2), \tag{8}$$

де $V = W_\Pi / q_\Pi$, а параметр δ характеризує різнорідність умов випробувань, $W_1 > W_\Pi > W_2$.

Якщо $\delta = 0$, то з формули (8) маємо $\phi_1 = 1$. Якщо $\delta \neq 0$, то вибір N_1 дозволяє забезпечити умову $\varphi_1 < 1$. Розглянемо $d\phi_1 / d\delta^2$:

$$d\phi_1 / d\delta^2 = -(N_1-1)(1-\delta^2)^{N_1-2}(1+V\delta^2) + V(1-\delta^2)^{N_1-1}. \tag{9}$$

Якщо

$$(N_1 - 1) \geq V(1-\delta^2)/(1+V\delta^2),$$

то з формули (9) отримаємо:

$$d\phi_1 / d\delta^2 \leq 0.$$

Звідси, якщо

$$N \geq 2 / q_\Pi,$$

то для будь-яких W_1, W_2 виконується нерівність $B_1^* \leq B_1$, що і потрібно було довести.

Наслідок. З урахуванням теорем 1 і 2 можна стверджувати, що $\beta_1^* = \beta_o^* + B_1^* \leq \beta_o + B_1 = \beta_1$, якщо $N > 2 / q_\Pi$, $K \leq 1$.

Примітка: Нерівність $B_1^* \leq B_1$ виконується також і при $S_1 \neq S_2$, доведення цього опускаємо.

Приклад. $N_1 = N_2 = 39$, $K_1 = 0$, $K_2 = 1$, $S_1 = S_2 = 0{,}5$. Використовуючи таблиці і формули біноміального розподілу [1], можна прийняти з ризиком $\beta = 0{,}1$, що $W_1 \geq 0{,}94$, $W_2 \geq 0{,}92$. Але використання теореми 2 дозволяє припустити з ризиком $\beta_1 \leq 0{,}1$, що $W_\Pi = (W_1 + W_2)/2 \geq 0{,}95$. При цьому розглядається одна двошарова вибірка об'єму $N = N_1 + N_2 = 78$.

Теорема 3. Імовірність B_2^* появи двох відмов для двошарової пропорційної вибірки з однаковими вагами шарів не більше, ніж імовірність B_2 появи двох відмов при однорідних умовах випробувань, яким відповідає однакова ймовірність відмов $q_\text{п}$ і якщо об'єм випробувань N відповідає нерівності $4 / q_\Pi \leq N \leq 2 / q_\Pi^2$.

Доведення. Якщо $S_1 = S_2 = 0{,}5$, $N_1 = N_2 = 0{,}5N$, то імовірність появи двох відмов для пропорційної вибірки дорівнює:

$$B_2^* = 0{,}5N_1(N_1-1)W_1^{N_1-2}q_1^2W_2^{N_1} + 0{,}5N_2(N_2-1)W_2^{N_1-2}q_2^2W_1^{N_1} + N_1W_1^{N_1-1}q_1N_2W_2^{N_1-1}q_2. \tag{10}$$

Імовірність появи двох відмов у $N = 2N_1$ випробуваннях при однорідних умовах ($q = q_\Pi = \text{const}$) дорівнює:

$$B_2 = N_1(2N_1-1)W_\Pi^{2N_1-2}q_\Pi^2. \tag{11}$$

Після ділення виразу (10) на формулу (11) отримаємо показник $\varphi_2 = B_2^* / B_2$, який запишемо як :

$$\varphi_2 = \varphi_{21} - \varphi_{22};$$

$$\varphi_{21} = 0{,}25V^2(W_1W_2/W_\text{п}^2)^{N_1}(q_1/W_1 + q_2/W_2); \tag{12}$$

$$\varphi_{22} = 0{,}25V^2(W_1W_2/W_\text{п}^2)^{N_1}(q_2/W_2 - q_1/W_1)^2\,1/(2N_1-1). \tag{13}$$

Вважаючи, що

$W_1 = W_\Pi(1+\delta)$;

$W_2 = W_\Pi(1-\delta)$,

з рівнянь (12) та (13) маємо:

$$\phi_{21} = (1-\delta^2)^{N_1-2}(1+V\delta^2)^2; \quad (14)$$

$$\phi_{22} = V^2(1-\delta^2)^{N_1-2}\delta^2/(2N_1-1)W_\Pi^2. \quad (15)$$

Розглядаючи $d\phi_{21}/d\delta^2$, з урахуванням формули (14), одержимо:

$d\phi_{21}/d\delta^2 \le 0$,

якщо

$$N \ge (4V/(1+V\delta^2)) + 4. \quad (16)$$

Найбільше значення N для нерівності (16) відповідає випадку $\delta = 0$, тобто $N_{max} \ge 4/q_\Pi$.
Розглядаючи $d\phi_{22}/d\delta^2$, з урахуванням формули (15), одержимо

$d\phi_{22}/d\delta^2 \ge 0$,

якщо $N \le 4 + 2/\delta^2$. Найменше значення N при цьому відповідає випадку $\delta_{max} = q_\Pi$. Тоді можна стверджувати, що $B_2^* \le B_2$, якщо виконується нерівність:

$$4/q_\Pi \le N \le 4 + 2/q_\Pi^2. \quad (17)$$

Наслідок. З урахуванням теорем 1, 2, 3 можна стверджувати, що

$\beta_2^* = \beta_1^* + B_2 \le \beta_2 = \beta_1 + B_2$,

якщо

$K < 3, S_1 = S_2$

і виконується нерівність (17).

Приклад: $N_1 = N_2 = 53$, $K_1 = K_2 = 1$, $S_1 = S_2 = 0{,}5$. Застосовуючи формулу виразу $\beta_1 = \beta_0 + B_1$ [1] для кожної вибірки із двох, одержимо з однаковим ризиком $\beta_1 = 0{,}1$: $W_1 \ge 0{,}9284$, $W_2 \ge 0{,}9284$. Використання теореми 3 для однієї двошарової вибірки об'єму $N = 106$ при $K = 2$ дозволяє затвердити гіпотезу $W_\Pi = (W_1 + W_2)/2 \ge 0{,}95$ з ризиком $\beta_2^* \le \beta_2 = 0{,}1$. Використовуємо формулу $\beta_2 = \beta_1 + B_2$ [1] для однорідної вибірки об'єму N.

Сума $N = N_1 + N_2 = 106$ відповідає нерівності (17).

Отже, доведені теореми про ймовірності малих чисел відмов для серії незалежних випробувань в неоднорідних умовах випробувань дозволяють (для розглянутих випадків) зробити експериментальну перевірку гіпотези про повну ймовірність типу $W_\Pi \ge W_T$ без визначення умовних імовірностей W_j безпосередньо за даними пропорційної вибірки.

Список літератури

1. *Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В.* Курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1965. – 512 с.

2. *Красноусова О.Ю.* Использование неоднородных выборок при проверке гипотез об эффективности сложной системы // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій. Т. 3.: Зб. наук. пр. – Дніпропетровськ: Навч. кн., 2000. – С. 92–97.

3. *Кудиненко А.В., Егоршин Ю.А., Красноусова О.Ю.* Проверка вероятности попадания в допуск для параметров сложной системы, функционирующей в разных условиях эксплуатации//Вісн. НАУ. – №1(8). – 2001. – С. 67–70.

Стаття надійшла до редакції 10.06.02.