B183.53
УДК 519.872

Система массового обслуживания
эффективность системы
теория массового обслуживания

О.В. Коба, канд. техн. наук, доц.

СИСТЕМИ ОБСЛУГОВУВАННЯ З ПОВТОРЕННЯМ ЗАЯВОК ПРИ ДЕТЕРМІНОВАНОМУ ЧАСІ ПЕРЕБУВАННЯ НА ОРБІТІ

Розглянуто дослідження модифікацій систем масового обслуговування з повторенням заявок через детермінований час T. Отримано формули основних показників ефективності їх функціонування. Виведено умову ергодичності для узагальненої системи Л. Лакатоша GI/G/1.

Системи масового обслуговування (СМО), в яких заявки, що надійшли, при зайнятості всіх каналів обслуговування і місць чекання можуть повертатися для обслуговування після деякого періоду часу, називаються СМО з повторенням (поверненням) заявок чи просто СМО з повторенням (поверненням). Останнім часом СМО з повторенням заявок широко застосовуються для моделювання багатьох задач, що виникають у телекомутаційних мережах, комп'ютерних мережах і системах, повсякденному житті.

Найбільш загальна модель СМО з повторенням заявок описується таким способом [1]. Маємо систему обслуговування з вхідним потоком Пуассона з параметром λ і s (s 1) ідентичними незалежними каналами обслуговування. Час обслуговування для всіх каналів випадковий з функцією розподілу $B(x)$. У системі існує $m-s$ ($m \geq s$) місць чекання. При наявності вільних каналів обслуговування заявку, що надійшла, починають обслуговувати негайно, у противному випадку, при наявності вільних місць чекання, заявка займає одне з них. Якщо при надходженні заявки до системи всі канали обслуговування і всі місця чекання зайняті, вона з імовірністю $1-H_0$ назавжди залишає систему чи з імовірністю H_0 залишає систему на випадковий період часу, щоб знову спробувати обслужитися.

Про заявки, які повертаються до системи і здійснюють спробу знову обслужитися, говорять, що вони знаходилися на орбіті. Місткість орбіти O може бути обмеженою чи необмеженою. У випадку, якщо O обмежена і заповнена, заявка, що прийшла туди, назавжди залишає систему. Передбачається, що заявка, яка знаходиться на орбіті, з імовірністю $\theta\Delta t + o(\Delta t)$ буде намагатися знову потрапити до системи в інтервалі часу $(t, t+\Delta t)$, формуючи незалежний потік заявок з параметром θ. При поверненні до системи будь-яка заявка обробляється як така, що вперше надійшла. Якщо є вільні канали чи місця чекання, вона або обслуговується, або негайно приєднується до черги заявок, що чекають обслуговування. Якщо ж усі обслуговуючі канали та всі місця чекання зайняті, заявка залишає систему назавжди з імовірністю $1-H_k$ (якщо це k-е незалежне повернення) або відправляється на орбіту (якщо вона неповна) з імовірністю H_k.

У позначеннях Кендала СМО з поверненням заявок описуються, як

$A/B/s/m/O/H$,

де A і B – позначення законів розподілу інтервалів часу між прибуттями заявок у систему і часу обслуговування відповідно; s – кількість каналів обслуговування; m – кількість місць чекання плюс кількість каналів обслуговування; O – місткість орбіти; H – показник того, що модель з втратами.

Показник може бути описаний рядом $H_0, H_1, H_2 \ldots$.

Час повернення не описаний у позначенні. Як правило, його беруть експоненційно розподіленим з параметром θ.

Коли $H_k = 1$ для $k \geq 0$, система стає системою без втрат (будь-яка заявка зрештою буде обслуговуватися, якщо тільки O необмежена). У цьому випадку H записується в позначенні як NL (no-loss). Коли $H_k = \alpha < 1$ для $k \geq 0$, система називається системою з геометричними втратами і H записується в позначенні як GL (geometric loss).

Якщо в позначеннях Кендала моделі СМО m, O, H відсутні, беруть $m = s, O = \infty, H = NL$.

За останні роки з'явилася значна кількість робіт, в яких вивчалися моделі СМО з повтореннями в тій чи іншій модифікації [1–10].

Традиційно в теорії масового обслуговування для систем із повторенням заявок розглядається показниково розподілений час повернення заявки з орбіти. У позначеннях систем за Кендалом для розподілу часу перебування на орбіті навіть не виділяється позиція [1]. Таке припущення створює найпростіші умови для математичного дослідження системи, тому що в будь-який момент часу t для прогнозування стану системи важлива лише кількість заявок, що одержали відмову (тих, що знаходяться на орбіті).

Для системи з повторенням і загальною функцією розподілу часу між поверненням заявок (зокрема, детермінованим часом) були проведені досить незначні дослідження. Існує багато реальних систем, в яких час між повторенням заявок детермінований. Це, насамперед, клас задач, пов'язаних з посадкою повітряних суден у авіації, автоматичним набором номерів (повторенням останнього номера, автоповторенням) у телефонії і т. д.

Наприклад, за своєю практичною постановкою цікава задача, розглянута Л. Лакатошем [11], яку сформулював для нього професор Загребського університету В. Череч. Задача виникла у зв'язку з верифікацією та обгрунтованістю результатів статистичного моделювання процесу посадки повітряних суден. У Лакатоша розглядається модель СМО з повторенням заявок, у якій вхідний потік заявок пуассонівський, час обслуговування розподілений за експоненційним законом (модель $M/M/1$), саме обслуговування може початися одразу після прибуття повітряного судна у визначене місце повітряного простору при вільному каналі обслуговування чи в моменти часу, кратні періоду T у випадку або зайнятості каналу, або при некоректній позиції повітряного судна при заході на посадку. Передбачається дисципліна обслуговування *FIFO* (у порядку черги). Використавши метод укладених ланцюгів Маркова, Л. Лакатош знайшов твірну функцію ергодичних імовірностей і встановив умову існування ергодичного розподілу.

Автором було розглянуто загальну модель, а саме, модель $GI/G/1$ [12]. За допомогою методу вкладених ланцюгів Маркова було виведено умову ергодичності системи, а також рівняння для стаціонарного розподілу.

Вважаємо, що вхідний потік – рекурентний, з неперервною функцією розподілу $A(x)$ часу між надходженням заявок; $B(x)$ – функція розподілу часу обслуговування.

Нехай t_n – момент надходження n-ї заявки, $t_n + TX_n$ – момент початку її обслуговування $(X_n = 0, 1, \ldots)$, T – період повторення заявки, $Z_n = t_{n+1} - t_n$, S_n – час обслуговування n-ї заявки.

Означена послідовність (X_n) однорідний ланцюг Маркова з імовірностями переходу p_{ik}:

$$p_{ik} = P\{(k-i-1)T < S_n - Z_n < (k-i)T\}, \quad k \ge 1;$$

$$p_{i0} = P\{S_n - Z_n < -Ti\}.$$

Позначаючи

$$f_j = P\{(j-1)T < S_n - Z_n < jT\},$$

маємо

$$f_j = \int_0^\infty [B(x+jT) - B(x+(j-1)T)]dA(x).$$

Виражаючи ймовірності переходу

$$p_{ik} = f_{k-i}, \quad k \ge 1;$$

$$p_{i0} = \sum_{j=-\infty}^{-i} f_j,$$

маємо таку теорему.

Теорема. Якщо ряд $\sum_{j=-\infty}^{\infty} jf_j$ абсолютно сходиться, причому $\sum_{j=-\infty}^{\infty} jf_j < 0$, то ланцюг Маркова (X_n) є ергодичним.

З даної умови ергодичності для моделі $GI/G/1$ типу Лакатоша випливає його ж результат для моделі $M/M/1$, а також складнішої системи, а саме – обслуговування ведеться не завжди в порядку черги, що відбувається в реальній системі посадки повітряних суден (під час перебування повітряного судна на крузі може здійснюватися посадка іншого повітряного судна).

Одна з модифікацій систем з постійним часом перебування на орбіті, досліджена автором, є СМО, що допускають синхронізацію вхідного потоку [13]. Заявки, що надходять до системи, утворять пуассонівський потік з параметром λ. Час обслуговування заявки дорівнює сталому $\tau > 0$. Спочатку заявка надходить на пристрій синхронізації, де затримується до моменту, кратного τ. Отже, до системи фактично надходять заявки в моменти $\tau, 2\tau ...$, причому кількість заявок у кожний з цих моментів – пуассонівська величина з параметром $\rho = \lambda\tau$. Припускається, що $\rho < 1$. За заявками зберігається порядок черги, в якому вони надійшли до пристрою синхронізації. У кожен момент $\tau, 2\tau ...$ до обслуговування береться лише одна заявка, якщо така є в наявності, інші відправляються на орбіту на час $m\tau$, де m – ціле додатне число.

Описана система розщеплюється на m незалежних систем, для яких відбувається звичайна умова ергодичності: завантаження повинне бути менше одиниці. Методом вкладених ланцюгів Маркова досліджено важливу для застосувань величину N – кількість циклів заявки на орбіті, знайдено формулу для твірної функції $P(z)$ імовірностей $P_k = P\{N > k\}$ та вираз для ймовірностей P_0, P_1 і P_2, визначено наближені вирази цих величин при малих ρ і дано оцінку відносної похибки.

У роботі [14] було виведено асимптотичні оцінки P_k при кожному k у випадку $\rho \to 0$, а саме:

$$P_k = \frac{\rho^{k+1}}{(k+2)!} + O(\rho^{k+2}), \ \rho \to 0,$$

що погоджується з формулами, отриманими в роботі [13] для явного вигляду ймовірностей $P_k (k = 0, 1, 2)$.

Ще один тип задач, розглянутий автором, – це задачі про продуктивність. У першій з них розглядається продуктивність процесора, що обслуговує двох абонентів при постійному часі повторення заявки [15]. Час обслуговування в такій системі – стала τ. Якщо в даний момент процесор зайнятий обслуговуванням, то заявка блокується і повторюється через час $T > \tau$. Якщо заявка абонента не блокована і не знаходиться в процесорі, то за малий час h абонент може подати заявку з імовірністю $\lambda h + o(h)$ незалежно від стану процесора (зайнятий – незайнятий) і попереднього процесу обслуговування. Завдання полягає в тому, щоб визначити продуктивність процесора υ, де υ – середнє число обслуговуваних заявок за одиницю часу.

У роботі [15] υ визначається як

$$\upsilon = \frac{1}{T_0 + \tau},$$

де

$$T_0 = \frac{P_0}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{[T/\tau]+1} \int_{(k-1)\tau}^{\min\{k\tau, T\}} p_k(x)(1\ e^{-\lambda(T-x)})dx,$$

P_0, $p_k(x)$ – стаціонарні ймовірності вкладеного ланцюга Маркова (ξ_n).

Вкладений ланцюг Маркова, у свою чергу, визначається таким способом. Позначимо через t_n n-й момент закінчення обслуговування заявки. Покладемо $\xi_n = 0$, якщо в момент t_n заявка не блокована, у противному випадку $\xi_n = (k, x)$, k – кількість заявок, цілком або частково обслуговуваних протягом часу x, що пройшов після моменту блокування заявки.

Уведений ланцюг Маркова ξ_n є однорідним з континуальною множиною станів. Він має ергодичний розподіл. У роботі [15] для ймовірностей p_0, $p_k(x)$ виведено систему інтегральних рівнянь і наведено алгоритм її розв'язання.

У статті [16] розглядається продуктивність замкнутої мережі з показниковим часом обслуговування і періодично повторюваними заявками абонентів. У цій моделі процесор обслуговує n абонентів. Час обслуговування абонента – показниково розподілена випадкова величина з параметром μ. Кожен абонент, що був обслуговуваний, посилає нову заявку через час T. Якщо в момент надходження заявки процесор зайнятий обслуговуванням іншого абонента, то ця заявка повторюється через той же проміжок часу T. Завдання полягає у визначенні продуктивності процесора (середнього числа γ заявок, що обслуговуються за одиницю часу).

Задача розв'язується з використанням методу кусково-лінійних марковських процесів.

Для ергодичних щільностей станів складено систему диференціальних рівнянь, наведено спосіб розв'язування цієї системи.

Продуктивність процесора визначена як

$$\gamma = \frac{n\mu}{n + \mu T}.$$

Для визначення середнього числа повернень заявки виведено формулу

$$\overline{N} = \frac{n-1}{\mu T}$$

та формулу для середнього часу чекання

$$\overline{W} = \frac{n-1}{\mu}.$$

Отримані формули для основних показників ефективності функціонування СМО описують ефект повторення заявки через сталий час T. Ці результати можуть знайти застосування як при тестуванні програмними засобами систем типу зліту-посадки, так і при дослідженні характеристик телефонних та інших систем зв'язку і систем керування множинним доступом в комп'ютерних мережах.

Список літератури

1. *Yang T., Templeton J.G.C.* A survey on retrial queues //Queueing Systems. – 1987. – 2. – P. 203–233.
2. *Falin G.I.* A survey of retrial queues // Queueing Systems. – 1990. – 7. – P. 127–168.
3. *Kulkarni V.G., Liang H.M.* Retrial queues revisited // Frontiers in Queueing. Models and Applications in Science and Engineering, Edt. J. H. Dshalalow, CRC Press. – 1997. – P. 19–34.
4. *Artalejo J.R.* A queueing systems with returning customers and waiting line // Operations Research Letters. – 1995. – 17. – P. 191–199.
5. *Falin G.I., Artalego J.R.* Approximation for multiserver queues with balking/retrial discipline// OR Spectrum. – 1995. – 17. – P. 239–244.
6. *Artalejo J.R., Falin G.I.* On the orbit characteristics of the M/G/1 retrial queue//Naval Research Logistics. – 1996. – 43. – P. 1147–1161.
7. *Martin M., Artalejo J.R.* Analysis of an M/G/1 queue with two types of impatient units//Advances in Applied Probability. – 1995. – 27. – P. 840–861.
8. *Anisimov V.V.* Averaging methods for transient regimes in overloading retrial queueing systems//Mathematical and Computing Modeling. – 1999. – 30. – P. 65–78.
9. *Anisimov V.V.* Switching stochastic models and applications in retrial queues// Sociedad de Estadlística e Invetigación operativa.. – Top(1999). – Vol. 7. – 2.– P. 169–186.

10. *Falin G.I., Templeton J.G.C.* Retrail Queues//Chapman and Hall. – 1997. – 328 p.
11. *Lakatos L.* On a simple continuus cycle-waiting problem // Annales Univ. Sci. Budapest, Sect.Comp. – 1994. – 14. – P. 105–113.
12. *Коба Е.В.* О системе обслуживания GI/G/1 с повторением заявок при обслуживании в порядке очереди // Доп. НАН України. – 2000. – №6. – С. 101–103.
13. *Коба Е.В.* Система обслуживания M/D/1 с заявками, повторяющимися через постоянное время, при частичной синхронизации входящего потока // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – №6. – С. 177–180.
14. *Коба Е.В., Коваленко И.Н.* О двусторонней оценке распределения числа циклов заявки на орбите для одной системы обслуживания с повторением заявок // Доп. НАН України. – 2000. – №9. – С. 109–112.
15. *Коба Е.В.* О производительности процессора, обслуживающего двух абонентов, при постоянном времени повторения заявки // Доп. НАН України. – 2000. – №10. – С. 104–106.
16. *Коба Е.В.* О производительности замкнутой сети с показательным временем обслуживания и периодически повторяющимися заявками абонентов // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – №3. – С. 176–179.

Стаття надійшла до редакції 17.06.02.

УДК 629.735.05:681.178:519.676 (045)
ББК 3 965-021.1 6 631 + 0 561,9

І.Е. Райчев, асист.,
О.Г. Харченко, канд. техн. наук, доц.,
М.О. Яцков, канд. техн. наук, проф.,
В.А. Василенко, канд. техн. наук, доц.

АВТОМАТИЗАЦІЯ ВИЗНАЧЕННЯ ПОКАЗНИКІВ ВІРОГІДНОСТІ ОБ'ЄКТІВ КОНТРОЛЮ ПРИ НАЯВНОСТІ РАЗОВОЇ КОМАНДИ

Розглянуто проблеми оцінки вірогідності об'єктів контролю при наявності в алгоритмі контролю разової команди. Побудовано обчислювальні алгоритми і програми, які в подальшому рекомендуються до використання в процесі експлуатації, а також для випробувань комплексів програм контролю польоту з метою визначення показників вірогідності настання подій контролю.

Вступ. Програмне забезпечення контролю польотів, обробляючи польотну інформацію, виконує діагностування об'єкта контролю автоматизований технологічний комплекс «повітряне судно-екіпаж» і визначає, чи відбувалися різного роду відхилення в процесі польоту. Оскільки польотна інформація може містити похибки реєстрації, перетворення, необхідно оцінювати ступінь об'єктивності результатів діагностування, для чого обчислюється вірогідність настання подій контролю, яка являє собою міру об'єктивності зображення дійсного стану об'єкта контролю результатами діагностування.

Задачу контролю найчастіше вирішують, використовуючи метод перевірки статистичних гіпотез, що викладений у роботах [1; 2; 3], де дається постановка задачі, математичні методи її вирішення і методичні вказівки, що спрощують побудову алгоритмів обчислення вірогідності. Проблема, що виникає при сертифікаційних випробуваннях програмного забезпечення контролю польотів, зокрема полягає у відсутності алгоритмів і програм визначення вірогідності результатів контролю об'єктів при наявності в них разової команди. Застосування методу номограм [4] у цьому випадку неефективне, оскільки обчислення виконуються експертом вручну. Отримані методики автоматизації процедури обчислення показників вірогідності настання подій контролю при наявності логічної команди рекомендується використовувати для створення тестових наборів даних для подальшого тестування програмного забезпечення контролю польотів [5; 6].