ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 514.75

М.Ф. Гребенюк, канд. физ.-мат. наук, доц.

# В'ЯЗКА НОРМАЛЕЙ ДРУГОГО РОДУ ТАНГЕНЦІАЛЬНО-ВИРОДЖЕНОЇ ПОВЕРХНІ $V_{n-1}^{r}$ НЕЕВКЛІДОВОГО ПРОСТОРУ ${}^{\ell}S_n$

*Розглянуто диференціальну геометрію тангенціально-вироджених поверхонь неевклідового простору.*

У диференціальних околах другого і третього порядків твірного елемента тангенціально-виродженої поверхні $V_{n-1}^{r}$ неевклідового простору [1], побудовано геометричні об'єкти, за допомогою яких одержано однопараметричну в'язку інваріантних нормалей другого роду поверхні $V_{n-1}^{r}$ Дослідження проведено за допомогою інваріантного теоретико-множинного аналітичного методу Г.Ф. Лаптєва [2].

Розглянемо в просторі ${}^{\ell}S_n$ плоский елемент *(A, τ)*, який складається з точки *A* та гіперплощини $\tau$, що проходить через неї. Нехай точка *A* і гіперплощина $\tau$ залежать від $r$ $(1 \le r \le n-1)$ незалежних параметрів. Тоді при зміні параметрів точка *A* описує *r*-вимірну поверхню $V_r$, а сім'я гіперплощин $\tau$ – деяку тангенціально-вироджену гіперповерхню $V_{n-1}^{r}$, яка володіє $(n-r-1)$-вимірними плоскими твірними.

Віднесемо цю поверхню до рухомого автополярного нормованого репера $\{M_o, M_1, \ldots, M_n\}$ простору ${}^{\ell}S_n$ так, щоб перші його точки $M_o, M_1, \ldots, M_{n-r-1}$ лежали в її $(n-r-1)$-вимірній твірній, точки $M_{n-r}, \ldots, M_{n-1}$ – у дотичній площині до напрямної поверхні $V_r$, а точка $M_n$ доповнювала їх до повного автополярного нормованого репера простору ${}^{\ell}S_n$. У репері, канонізованому таким чином, тангенціально-вироджена поверхня $V_{n-1}^{r}$ в ${}^{\ell}S_n$ визначається диференціальними рівняннями:

$$\omega_o^n = 0; \quad \omega_i^n = 0; \quad \omega_o^i = 0;$$

$$\omega_\alpha^n = \Lambda_{\alpha\beta}\omega^\beta; \quad \Lambda_{\alpha\beta} = \Lambda_{\beta\alpha}; \quad \Lambda = det\left\|\Lambda_{\alpha\beta}\right\| \neq 0;$$

$$\omega_i^\alpha = \lambda_{i\beta}^\alpha \omega^\beta = \lambda_{i\beta}^\alpha \Lambda^{\beta\gamma}\omega_\gamma^n = \lambda_i^{\alpha\gamma}\omega_\gamma^n,$$

де $\Lambda^{\alpha\beta}$ – елементи матриці $\left\|\Lambda^{\alpha\beta}\right\|$, що обернена до матриці $\left\|\Lambda_{\alpha\beta}\right\|$:

$$\Lambda_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma .$$

Нехай тепер і в подальшому

$$i, j, k, \ldots = 1, \ldots, n-r-1;$$

$$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}, \ldots = 0, 1, \ldots, n-r-1;$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots = n-r, \ldots, n-1.$$

Враховуючи властивість автополярності репера, маємо:

$$\omega_n^o = 0; \quad \omega_n^i = 0; \quad \omega_i^o = 0; \quad \omega_\alpha^i = -\varepsilon_{j\beta}\lambda_{j\gamma}^\beta \omega^\gamma;$$

$$\omega_\beta^o = -\varepsilon_{o\beta}\omega^\beta; \quad \omega_n^\beta = -\varepsilon_{\beta n}\Lambda_{\beta\gamma}\omega_o^\gamma.$$

У диференціальному околі другого порядку елемента тангенціально-виродженої поверхні $V_{n-1}^{r}$ будуємо величини

$$B_i = \frac{1}{r}\Lambda_{\alpha\beta}\lambda_i^{\alpha\beta}; \quad B^i = -\frac{1}{r}\Lambda^{\alpha\beta}\varepsilon_{i\alpha}\lambda_{i\beta}^{\alpha},$$

маємо

$$\nabla_\delta B_i = -B_i\pi_o^o; \qquad \nabla_\delta B^i = B^i\pi_n^n.$$

Отже, величини $B_i$ та $B^i$ є відносними тензорами.

За допомогою компонент фундаментального геометричного об'єкта третього порядку тангенціально-виродженої поверхні $V_{n-1}^r$ складемо відносні тензори:

$$d_\alpha = \frac{1}{r+2}\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^{\beta\gamma}; \qquad d^\alpha = \frac{1}{r+2}\Lambda^{\alpha\beta\gamma}\Lambda_{\beta\gamma};$$

$$\nabla d_\alpha = -d_\alpha\omega_o^o + d_{\alpha\beta}\omega^\beta; \quad d_{\alpha\beta} \neq d_{\beta\alpha};$$

$$\nabla d^\alpha = d^\alpha\omega_n^n - d^{\alpha\gamma}\omega_\gamma^n; \quad d^{\alpha\beta} \neq d^{\beta\alpha}.$$

Величини $d_\alpha$ та $d^\alpha$ є відносними тензорами.

Послідовно знаходимо тензори другого порядку:

$$c_{\alpha\beta}^i = -\varepsilon_{i\alpha}\lambda_{i\beta}^\alpha - B^i\Lambda_{\alpha\beta}; \quad c_i^{\alpha\beta} = \lambda_i^{\alpha\beta} - B_i\Lambda^{\alpha\beta};$$

$$\ell_{i\beta}^\alpha = c_i^{\alpha\gamma}\Lambda_{\gamma\beta}; \quad \ell_\alpha^{i\beta} = c_{\alpha\gamma}^i\Lambda^{\gamma\beta};$$

$$\ell_j^i = \frac{1}{r}c_j^{\alpha\beta}c_{\alpha\beta}^i; \quad \ell_{ij} = \ell_{i\beta}^\alpha\ell_{j\alpha}^\beta,$$

які задовольняють диференціальні рівняння:

$$\nabla_\delta c_{\alpha\beta}^i = -c_{\alpha\beta}^i\pi_o^o; \qquad \nabla_\delta c_i^{\alpha\beta} = c_i^{\alpha\beta}\pi_n^n.$$

$$\nabla\ell_{i\beta}^\alpha = -\ell_{i\beta}^\alpha\omega_o^o - \ell_{i\beta}^{\alpha\gamma}\omega_\gamma^n; \qquad \nabla\ell_\alpha^{i\beta} = \ell_\alpha^{i\beta}\omega_n^n + \ell_{\alpha\gamma}^{i\beta}\omega^\gamma;$$

$$\nabla\ell_j^i = \ell_j^i\left(\omega_n^n - \omega_o^o\right) + \ell_{j\alpha}^i\omega^\alpha; \qquad \nabla\ell_{ij} = -2\ell_{ij}\omega_o^o + \ell_{ij\alpha}\omega^\alpha.$$

Розглянемо для тензора $\ell_j^i$ взаємний тензор $\tilde{\ell}_j^i$:

$$\tilde{\ell}_j^i\ell_k^j = \delta_k^i; \quad \nabla_\delta\tilde{\ell}_j^i + \tilde{\ell}_j^i\left(\pi_n^n - \pi_o^o\right) = 0,$$

за допомогою якого будуємо тензор другого порядку

$$L_{ij} = \tilde{\ell}_i^k\ell_{kj}; \qquad \nabla_\delta L_{ij} = -L_{ij}\left(\pi_o^o + \pi_n^n\right).$$

Система величин $\ell_i = -\left(L_{ij}B^j + B_i\right)$ задовольняє диференціальні рівняння вигляду:

$$\nabla\ell_i = -\ell_i\omega_o^o + \ell_{i\alpha}\omega^\alpha.$$

Відносні тензори $d_\alpha$ та $d^\alpha$ дозволяють побудувати відносні тензори третього порядку:

$$\ell_{\alpha\beta\gamma} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma} - \Lambda_{(\alpha\beta}d_{\gamma)}; \qquad \ell^{\alpha\beta\gamma} = \Lambda^{\alpha\beta\gamma} - \Lambda^{(\alpha\beta}d^{\gamma)}.$$

Тензор $\ell_{\alpha\beta\gamma}$ є тензором Дарбу напрямної поверхні $V_r$, а тензор $\ell^{\alpha\beta\gamma}$ – тензором Дарбу тангенціально-виродженої поверхні $V_{n-1}^r$. Компоненти тензорів Дарбу $\ell_{\alpha\beta\gamma}$ і $\ell^{\alpha\beta\gamma}$ задовольняють такі диференціальні рівняння:

$$\nabla_\delta\ell_{\alpha\beta\gamma} = -\ell_{\alpha\beta\gamma}\left(2\pi_o^o + \pi_n^n\right),$$

$$\nabla_\delta\ell^{\alpha\beta\gamma} = \ell^{\alpha\beta\gamma}\left(\pi_o^o + 2\pi_n^n\right).$$

За допомогою тензорів Дарбу складемо відносний інваріант

$$\ell_o = \ell_{\alpha\beta\gamma}\ell^{\alpha\beta\gamma}.$$

Припустимо, що $\ell_o \neq 0$. У загальному випадку можна вважати, що $\ell_o \neq 0$ при умові $\ell_{\alpha\beta\gamma} \neq 0$. Маємо

$$d\ln\ell_o = \omega_n^n - \omega_o^o + \ell_\alpha \omega^\alpha,$$

або $d\ln\ell_o = \omega_n^n - \omega_o^o + \ell^\alpha \omega_\alpha^n,$

де $\ell^\alpha = \Lambda^{\alpha\beta}\ell_\beta;\qquad \nabla_\delta \ell_\alpha = -\ell_\alpha \pi_o^o;\quad \nabla_\delta \ell^\alpha = \ell^\alpha \pi_n^n.$

Покладемо

$$\lambda_\alpha = \Lambda^{\beta\gamma}\Lambda^{\eta\xi}\ell_{\gamma\xi\alpha}c_{\beta\eta}^i B_i;\quad \eta_\alpha = \ell_{\beta\gamma\alpha}c_i^{\beta\gamma}B^i.$$

Величини $\lambda_\alpha$ та $\eta_\alpha$, які визначено в околі третього порядку елемента тангенціально-виродженої поверхні $V_{n-1}^r$, задовольняють такі диференціальні рівняння:

$$\nabla_\delta \lambda_\alpha = -\lambda_\alpha(2\pi_o^o - \pi_n^n);$$

$$\nabla_\delta \eta_\alpha = -\eta_\alpha(2\pi_o^o - \pi_n^n).$$

Величини $\lambda_\alpha$ та $\eta_\alpha$ є відносними тензорами.

Використовуючи тензор Дарбу $\ell_{\alpha\beta\gamma}$, побудуємо симетричний тензор

$$L_{\alpha\beta} = \Lambda^{\gamma\eta}\Lambda^{\mu\rho}\ell_{\alpha\gamma\mu}\ell_{\beta\eta\rho};$$

$$\nabla L_{\alpha\beta} = -2L_{\alpha\beta}\omega_o^o + L_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma,$$

який в загальному випадку є невиродженим, тобто існує взаємний йому тензор $L^{\alpha\beta}$:

$$L^{\alpha\beta}L_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha;\quad \nabla L^{\alpha\beta} = 2L^{\alpha\beta}\omega_o^o + L_\gamma^{\alpha\beta}\omega^\gamma.$$

Побудуємо систему величин, пов'язаних з третім диференціальним околом твірного елемента тангенціально-виродженої поверхні $V_{n-1}^r$. Попередньо визначимо тензори третього порядку такої будови:

$$B_\alpha = -\frac{1}{2}(d_\alpha + \ell_\alpha);$$

$$B^\alpha = -\frac{1}{2}(d^\alpha + \ell^\alpha),$$

де $\nabla_\delta B_\alpha = -B_\alpha \omega_o^o + \overline{B}_\alpha^\beta \omega_\beta^n;$

$$\nabla_\delta B^\alpha = B^\alpha \omega_n^n - \widetilde{B}_\gamma^\alpha \omega^\gamma.$$

Послідовно визначаємо нові величини третього порядку:

$$T = \frac{1}{r}(d_{\alpha\beta} - d_\alpha d_\beta)\Lambda^{\alpha\beta};$$

$$T_o = T - B^i\ell_i;$$

$$\hat{T}_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta} - d_\alpha d_\beta - T\Lambda_{\alpha\beta};$$

$$\hat{T}_\alpha = \Lambda^{\beta\gamma}\Lambda^{\eta\mu}\hat{T}_{\beta\eta}\ell_{\gamma\mu\alpha} + (\lambda_\alpha - \eta_\alpha);$$

$$T^\alpha = L^{\alpha\beta}\hat{T}_\beta,$$

диференціальні рівняння яких мають вигляд:

$$\delta \mathrm{T} = \mathrm{T}(\pi_n^n - \pi_o^o);$$

$$\delta \mathrm{T}_o = \mathrm{T}_o(\pi_n^n - \pi_o^o);$$

$$\nabla_\delta \hat{T}_{\alpha\beta} = -2\hat{T}_{\alpha\beta}\pi_o^o;$$

$$\nabla_\delta \hat{T}_\alpha = -\hat{T}_\alpha(2\pi_o^o - \pi_n^n);$$

$$\nabla T^\alpha = T^\alpha \omega_n^n + T_\gamma^\alpha \omega^\gamma.$$

Розглянемо в'язку прямих, що проходять через точку $M_o$ тангенціально-виродженої поверхні $V_{n-1}^r$ і не лежать в дотичній площині $[M_o, M_\alpha]$ напрямної поверхні $V_r$.

Кожну пряму цієї в'язки можна визначити двома точками:

$P_o = M_o; \quad P = x^i M_i + x^\alpha M_\alpha + M_n$.

Якщо зафіксувати первинні параметри координат $x^i$ та $x^\alpha$, то точки $P$ будуть пов'язані такими рівняннями:

$$\delta x^i = -x^\ell \pi_\ell^i + x^i \pi_n^n; \qquad (1)$$

$$\delta x^\alpha = -x^\beta \pi_\beta^\alpha + x^\alpha \pi_n^n. \qquad (2)$$

Система рівнянь (1)–(2) має два розв'язки:

$x_1^i = B^i; \quad x_1^\alpha = d^\alpha$

та $\quad x_2^i = B^i; \quad x_2^\alpha = T^\alpha$,

тому ця система має і розв'язки вигляду:

$x^i = B^i; \quad x^\alpha = -d^\alpha + \tau(T^\alpha + d^\alpha)$,

де $\tau$ – абсолютний інваріант.

Отже, одержуємо в'язку інваріантно приєднаних до тангенціально-виродженої поверхні $V_{n-1}^r$ в околі третього порядку прямих, кожна з яких визначається парою точок:

$P_o = M_o; \quad P = B^i M_i + \left[-d^\alpha + \tau(T^\alpha + d^\alpha)\right] M_\alpha + M_n$.

У кожному центрі $M_o$ маємо нормаль другого роду ${}^{\ell_7}N_{n-r}$ тангенціально-виродженої поверхні, яка містить твірну ${}^{\ell_1}E_{n-r-1}$ тангенціально-виродженої поверхні $V_{n-1}^r$. Вимога щодо інваріантності нормалі

${}^{\ell_7}N_{n-r} \equiv \left[{}^{\ell_1}E_{n-r-1}, N\right]$,

де $\quad N = M_n + v^i M_i + v^\alpha M_\alpha$,

накладає такі умови на величини $v^\alpha$:

$\nabla_\delta v^\alpha = v^\alpha \pi_n^n$.

Візьмемо за точки $M_o$ та $N$ точки:

$P_o = M_o; \quad P = B^i M_i + \left[-d^\alpha + \tau(T^\alpha + d^\alpha)\right] M_\alpha + M_n$.

Таким чином, задання поля тензора $v^\alpha$ визначає поле інваріантних прямих $[M_o, P(\tau)]$, а, отже, і в'язку полів інваріантних нормалей другого роду

${}^{\ell_7}N_{n-r}(\tau) = \left[{}^{\ell_1}E_{n-r-1}, N(\tau)\right]$

тангенціально-виродженої поверхні $V_{n-1}^r$.

## Список літератури


1. *Розенфельд Б.А.* Неевклидовы геометрии. – М.: Гостехиздат, 1955.
2. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий: Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. мат. о-ва. –1953. – Т.2. – С.275–382.


Стаття надійшла до редакції 30.03.02.