ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 532.529

В.М. Буйвол, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Н.Б. Фоміна, старш. викл.

НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ СУПЕРКАВЕРН

Розглянуто наближений метод розрахунку форми суперкаверн, який дозволяє отримати просту формулу для розрахунку форми поперечних перетинів суперкаверни за тілом, що рухається в рідині з урахуванням поля сил тяжіння та поверхневого натягу. Дослідження проілюстровано рисунками поперечних перетинів суперкаверн.

The approximate method of calculation of super cavities form, which allows getting a simple formula for the calculation of form of the cross sections of super cavity for a body that moves in a liquid taking into account the field of gravity and surface tension forces, is considered.

Вступ

Методам розрахунку просторових суперкаверн присвячено багато наукових праць, з яких відзначимо [1–4]. У цих роботах можна знайти напівекспериментальні методи розрахунку вісесиметричних суперкаверн, а також суперкаверн, що перебувають під дією полів сили тяжіння, поверхневого натягу, в’язкості. Щодо останніх, то розрахунок суперкаверн у них зводиться до потреби розв’язання нескінченних систем нелінійних рівнянь, що не сприяє широкому застосуванню цих методів. Проте на основі цих робіт можна запропонувати досить прості алгоритми розрахунку просторових суперкаверн з урахуванням властивостей рідини та умов руху каверностворювального тіла.

Постановка завдання

Нехай маємо досить видовжену каверну. Тоді її рух зручно розглядати в нерухомій системі координат $Oxyz$, де початок системи розміщується в центрі кавітатора, вісь Ox напрямлена в бік, протилежний напрямку швидкості V_0 руху каверни, вісь Oy – вертикально вверх (проти вектора прискорення), а вісь Oz лежить в горизонтальній площині. Якщо припустити, що в початковий момент часу $t=0$ у площині yOz був розміщений кавітатор (точніше його перетин, з якого зриваються струмені рідини), то в наступні моменти часу в цю площину будуть входити все нові й нові поперечні перетини каверни, з яких власне і будується сама каверна. Застосування такої площини спостережень особливо доцільне у випадку кавітатора-диска. Яка б не була форма перетину зриву струменів, з часом вона буде змінюватися, деформуватися.

Подамо “радіус” такого деформованого поперечного перетину каверни сумою

$$R(t,\vartheta)=R_0(t)+f(t,\vartheta),$$

де $R_0(t)$ – радіус вісесиметричної каверни, яка утворюється за симетричним тілом, що швидко рухається, в ідеальній рідині;

$f(t,\vartheta)$ – деформація радіуса каверни, яка спричинена різними збуреннями.

Під збуренням розуміють все те, що відрізняє умови досліджуваної течії від течії за симетричним тілом в ідеальній рідині. Це можуть бути як властивості самої рідини (наявність сили тяжіння, поверхневого натягу, в’язкості), так і різні умови організації течії (форма кавітувального тіла, його орієнтація в потоці, наявність близько розташованих інших тіл тощо). Хоча точних формул для $R_0(t)$ немає, але є досить точні наближені формули, що добре узгоджуються з експериментальними даними. Найчастіше використовують таку формулу вісесиметричної каверни, тобто рівняння її меридіонального перетину:

$$R_0(t)=R_k(\sigma)\sqrt{1-a(\sigma)(1-t)^2};$$

$$R_k(\sigma)=\sqrt{\frac{c_x(\sigma)}{k(\sigma)\sigma}},$$

$$a(\sigma)=1-\frac{4{,}38\sigma}{c_x};$$

$$k(\sigma)=\frac{1+50\sigma}{1+56{,}2\sigma}.$$

Коефіцієнт опору кавітувального тіла $c_x(\sigma)$ залежить від числа кавітації σ. Так для кавітатора-диска вважають [1; 4], що

$$c_x=c_{x0}(1+\sigma),$$

для конусів
$c_x = c_{x0} + \sigma$,
де c_{x0} – коефіцієнт опору за нульового числа кавітації, його визначають експериментально і вважають $c_{x0} \approx 0{,}82$.
Проте Гузевський [4] теоретично довів, що формули для конусів з кутом розхилу конуса $2\gamma < 90^{O}$ мають вигляд, $c_x = c_{x0}(1 + 1{,}05\sigma)$,
для конусів з кутом $2\gamma > 90^{O}$

$$c_x = c_{x0} + \frac{2}{3}\sigma.$$

Змінна t – це відносний час входу перетину в площину спостереження, якщо в момент $t = 0$ в цій площині перебував кавітатор. Фактично це координата вздовж осі каверни, що відраховується від кавітатора і віднесена до півдовжини каверни:

$$L_k = \frac{1{,}92 - 3\sigma}{\sigma} R_H,$$

де R_H – радіус перетину зриву струменів з кавітувального тіла.
Формулу для $R_0(t)$ у такому вигляді встановив Г.В. Логвинович [1], а формулу для коефіцієнта k – теоретичним шляхом Л.Г. Гузевський [4]. У працях Гузевського в цих формулах використовувалися різні експериментально знайдені поправкові коефіцієнти.

Розв'язання задачі

У працях [2; 3] для визначення величини деформації радіуса перетину

$$f(t, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \cos n\vartheta$$

отримується нескінченна система диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\dot{u}\left(-R_0 + \frac{3}{2} f_2\right) + u\left(-2\dot{R}_0 + \frac{\dot{R}_o}{R_0} f_2 + 2\dot{f}_2\right) - \frac{u^2}{R_0} f_3 = 0;$$

$$-\frac{R_0}{n}\ddot{f}_n - \frac{2\dot{R}_0}{n}\dot{f}_n + (n-1)\left(\frac{\ddot{R}_0}{n} + \frac{2u^2}{R_0}\right) f_n - 2u\left(\dot{f}_{n-1} - \dot{f}_{n+1}\right) - \left(\frac{\dot{u}}{2} + \frac{u\dot{R}_0}{R_0}\right) f_{n-1} + \left(\frac{3\dot{u}}{2} + \frac{u\dot{R}_0}{R_0}\right) f_{n+1} - \frac{nu^2}{R_0} f_{n+2} - \frac{(n-2)u^2}{R_0} f_{n-2} - \frac{u^2}{R_0} f_1 \delta_{n3} + \left[u^2 + \left(\frac{\dot{u}}{2} + \frac{u\dot{R}_0}{R_0}\right) f_1\right]\delta_{n2} = \tilde{\sigma}_n, \ (n>1), \quad (1)$$

де $u = \dot{f}_1(t)$ – швидкість випливання (підіймання) поперечного перетину як недеформованого тіла; δ_{nk} – символ Кронекера.
У системі (1) усі величини відносні :

$$R_0 = \frac{R_0^*}{L_k};$$

$$t = \frac{t^*}{t_k^*},$$

де L_k – півдовжина вісиметричної каверни;
t_k^* – час проходження міделя через площину спостережень.
Зірочками * позначені розмірні величини.
Система рівнянь (1) доповнюється відповідними початковими умовами і тоді задачу Коші для системи рівнянь (1) можна розв'язати тим чи іншим числовим способом. Проте наближену форму поперечних перетинів каверни можна отримати в аналітичному вигляді, що й буде предметом цієї роботи. Розв'язок системи (1) можна шукати методом послідовних наближень. Вихідною точкою тут має бути розв'язання лінійної системи. У цьому разі всі величини $f_n(t) = 0$ якщо $n > 1$, а для величини $f_1(t)$ можна отримати просту формулу

$$f_1(t) = N t, \left(N = \frac{2(1+\sigma)}{3\sigma \mathrm{Fr}^2}\right), \quad (2)$$

яка досить точно описує експериментальні дані, особливо в післямідельній частині каверни. Далі запишемо рівняння нелінійної системи у вигляді, зручному для побудови ітеративного процесу:

$$\frac{1}{R_0^2}\frac{d(R_0^2 \dot{f}_n(t))}{dt} = \frac{n-1}{n}\ddot{R}_0 f_n + 2R_0(t)\dot{f}_1(t) f_{n-1}(t) = \tilde{\sigma}_n; \quad (3)$$

$$\tilde{\sigma}_n = \sigma_n + \frac{8\overline{H}_n}{\mathrm{We}} - \frac{\overline{Z}_n}{2\mathrm{Fr}^2},$$

$$\mathrm{We} = \frac{\rho^* V_0^{*2} d_н^*}{\tau^*};$$

$$\mathrm{Fr} = \frac{V_0^*}{\sqrt{g^* d_н^*}},$$

де σ_n, H_n, Z_n – коефіцієнти розкладів у ряди Фур'є числа кавітації, середньої кривини і підняття межової точки каверни над горизонтальною площиною;
We, Fr – числа Вебера і Фруда за діаметром початкового перетину (перетину зриву струменів);
ρ^*, τ^* – густина рідини і коефіцієнт її поверхневого натягу.
Якщо рівняння (3) проінтегрувати один раз з урахуванням формули (2), цей ітеративний процес можна записати:

$$\dot{f}_n^{(i)} = \frac{n-1}{R_0^2(t)} \int_0^t R_0(t)\ddot{R}_0(t) f_n^{(i-1)} dt + \qquad (4)$$

$$+\frac{n}{R_0^2(t)} \int_0^t R_0(t)\dot{f}_1^{(i)}(t) f_{n-1}^{(i-1)}(t) - \frac{n}{R_0^2(t)} \int_0^t R_0(t)\tilde{\sigma}_n^{(i-1)} dt.$$

Розглядаючи послідовні ітерації (4), бачимо, що всі вони зрештою виражаються через величину $f_1(t)$. Тому після оцінки інтегралів ітеративний процес (4) можна спростити до такого:

$$f_n(t) = \frac{(-1)^{n-1} n!}{} \int_0^t \frac{f_1(t)}{R_0(t)} \int_0^t \frac{f_1(t)}{R_0(t)} \int_0^t \frac{f_1(t)}{R_0(t)} \cdots$$

$$\cdots \int_0^t \frac{f_1(t)}{R_0(t)} \int_0^t f_1^2(t) R_0(t) dt dt \ldots dt\,. \qquad (5)$$

Інтеграл тут повторюється $n-1$ разів.
Звичайно, проінтегрувати інтеграли (5) неможливо. Проте для середньої частини каверни, де можна вважати, що
$R_0(t) \approx R_k$, $f_1(t) = N\,t$
таке інтегрування можливе, і тоді

$$\dot{f}_n(t) = \frac{(-1)^{n-1} n! N^n t^{2n-1}}{(2n-1)!! R_k^{n-3} R_0^2(t)}; \qquad (6)$$

$$\dot{f}(t,\vartheta) = \sum_0^{\infty} \left[\int_0^t \frac{(-1)^{n-1} n! N^n t^{2n-1}}{(2n-1)!! R_k^{n-3} R_0^2(t)} dt \right] \cos n\vartheta\,.$$

Про припустимість такого підходу свідчить рис. 1, на якому зображено значення умовно точної функції $v(t) = \dot{f}_2(t)$:

$$\dot{f}_2(\sigma, t) = \int_0^t t^2 \sqrt{1 - a(\sigma)(1-t)^2}\,,$$

і значення того наближення, яке використовується:

$$\dot{f}_2(t) = \frac{t^3}{3} = \text{aprox}\,.$$

Значення точної функції обчислені для чисел кавітації $\sigma = 0{,}02...014$ через $\Delta\sigma = 0{,}02$. Видно, що всі криві від числа кавітації майже не залежать і тому замість точної формули цілком можна користуватися наближеною.
Отже, деформація радіуса каверни в її середній частині після інтегрування формули (6) може бути виражена таким рядом Фур'є

$$f(t,\vartheta) = f_0(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n! N^n t^{2n-1}}{2n(2n-1)!! R_k^{n-1}} \cos n\vartheta\,. \qquad (7)$$

Легко показати, що ряди для похідних (6) і функцій (7) збігаються за однієї умови:

$$t^2 \le \frac{3R_k \sigma Fr^2}{1+\sigma} \approx \frac{3}{2}\sigma\sqrt{\sigma} Fr^2\,.$$

За цієї умови ряд (6) має суму ряду. Запишемо ряд у такий спосіб

$$\dot{f}(t,\vartheta) = \dot{f}_0 + \dot{f}_2 \left(\cos 2\vartheta + \frac{\dot{f}_3}{\dot{f}_2} \cos 3\vartheta + \cdots \right). \qquad (8)$$

Знайдемо послідовні значення відношень швидкостей деформацій. Тоді вираз (8) у дужках матимемо ряд

$$\dot{F}(t,\vartheta) = \cos 2\vartheta - \frac{3p^2}{5}\cos 3\vartheta + \frac{3\cdot 4p^4}{5\cdot 7}\cos 4\vartheta +$$

$$+\frac{3\cdot 4\cdot 5p^6}{5\cdot 7\cdot 9}\cos 5\vartheta + \cdots, \left(p^2 = \frac{N t^2}{R_k} \right). \qquad (9)$$

По-перше, при зростанні номера члена ряду його коефіцієнти прямують до значення 1/2. По-друге, ряд (9) у найбільш характерних точках $\vartheta = 0;\ \pi/4;\ \pi;\ 3\pi/4;\ \pi$` поводить себе так, як геометрична прогресія із знаменником, значення якого лежать в діапазоні $q = 0{,}5...0{,}7$. Тому тепер ряд (9) можна записати у вигляді

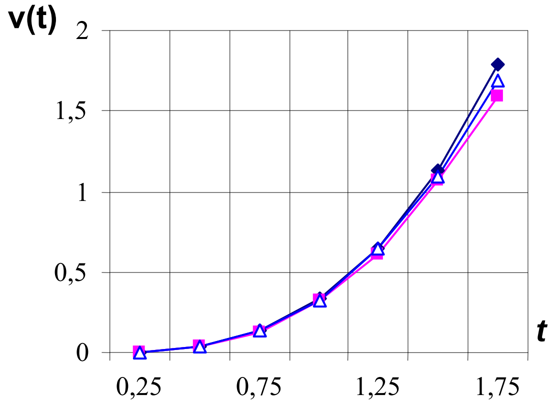

Рис.1. Порівняння з точними значеннями:
aprox;
σ = 0,002;
σ = 0,14

$$\dot{F}(t,\vartheta)=\cos 2\vartheta-\frac{3p^2}{5}\cos 3\vartheta+\frac{3\cdot 4p^4}{5\cdot 7}\cos 4\vartheta-\cdots$$

Якщо пригадати ряд [5]

$$\frac{1-v^2}{1-2v\cos\vartheta+v^2}=1+2\sum_{1}^{\infty}v^n\cos n\vartheta,\quad (|v|<1),$$

то для функції $\dot{f}(t,\vartheta)$ з рівняння (8), яка характеризує швидкість зміни радіуса каверни з часом, отримуємо формулу

$$\dot{f}(t,\vartheta)=\dot{f}_0(t)+\frac{\cos 2\vartheta+v^2\cos\vartheta}{1+2v\cos\vartheta+v^2}\dot{f}_2(t),\ (v^2=qp^2).$$

Для отримання самої функції $f(t,\vartheta)$ потрібно знайти інтеграл від її похідної. Але простіше спочатку знайти інтеграл від функції $\dot{F}(t,\vartheta)$, що можна виконати для середньої частини каверни, а вже потім знайти і функцію $f(t,\vartheta)$, яка в цьому разі виявляється такою:

$$f(t,\vartheta)=f_0(t)-\frac{N^2t^4}{6R_k}\frac{\cos 2\vartheta+v^2\cos\vartheta}{1+2v\cos\vartheta+v^2}. \qquad (10)$$

Обчислення функції (10) разом з функцією $R_0(t)$ було реалізоване в пакеті MathCad. Для цього рівняння записували в такій формі:

$$c_x(\sigma)=0{,}84(1+\sigma),$$

$$k(\sigma)=\frac{1+50\sigma}{1+56{,}2\sigma};$$

$$Rkn(\sigma)=\sqrt{\frac{c_x(\sigma)}{\sigma k(\sigma)}},$$

$$a(\sigma)=1-\frac{4{,}38\sigma}{1+\sigma};$$

$$R_0(\sigma,t)=Rkn(\sigma)\sqrt{1-a(\sigma)(1-t)^2};$$

$$L_k(\sigma)=\frac{1{,}92-3\sigma}{\sigma},$$

$$r(\sigma)=\frac{(1+\sigma)L_k(\sigma)}{3\sigma}\sqrt{\frac{\sigma k(\sigma)}{c_x(\sigma)}};$$

$$p(\sigma)=\frac{1{,}5(1+2\sigma)L_k(\sigma)}{27\sigma^2}\sqrt{\frac{\sigma k(\sigma)}{c_x(\sigma)}};$$

$$u(\sigma,\mathrm{Fr},t)=r(\sigma)\frac{t^2}{\mathrm{Fr}^2};$$

$$f(\sigma,\mathrm{Fr},t,\vartheta)=-p(\sigma)\left(\frac{t^2}{\mathrm{Fr}^2}\right)^2\times$$

$$\times\frac{\cos 2\vartheta+u(\sigma,\mathrm{Fr},t)\cos\vartheta}{1+2u(\sigma,\mathrm{Fr},t)\cos\vartheta+[u(\sigma,\mathrm{Fr},t)^2]};$$

$$R(\sigma,\mathrm{Fr},t,\vartheta)=R_0(\sigma,t)+f(\sigma,\mathrm{Fr},t,\vartheta).$$

Величини σ,Fr,t мають задовольняти умови:

$$4qt^2<3\sigma\sqrt{\sigma}\mathrm{Fr}^2;$$

$$u(\sigma,\mathrm{Fr},t)<1;$$

$$\sigma\sqrt{\sigma}\mathrm{Fr}^2\geq 2.$$

Урахування поверхневого натягу

Оскільки за малих чисел кавітації каверну можна розглядати як витягнутий еліпсоїд обертання, то кривизну каверни можна ототожнити з кривизною еліпсоїда:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{b^2}=1,$$

у якого

$$a=L_k,$$

$$b=R_k.$$

Скориставшись параметричним рівнянням

$$x'=a\cos v,$$

$$y'=b\sin v\sin u,$$

$$z'=b\sin v\cos u$$

і ввівши радіус-вектор

$$\bar{r}=\{x',y',z'\},$$

знаходимо коефіцієнти першої і другої диференціальних форм Гаусса

$$E=b^2\sin^2 v;$$

$$G=a^2\sin^2 v+b^2\cos^2 v;$$

$$F=0;$$

$$L=\frac{\overrightarrow{r_{uu}}(\overrightarrow{r_u}\times\overrightarrow{r_v})}{\sqrt{EG-F^2}};$$

$$M=\frac{\overrightarrow{r_{uv}}(\overrightarrow{r_u}\times\overrightarrow{r_v})}{\sqrt{EG-F^2}};.$$

$$N=\frac{\overrightarrow{r_{vv}}(\overrightarrow{r_u}\times\overrightarrow{r_v})}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

За формулою

$$(EG-F^2)k^2+(2FM-EN-GL)k+LN-M^2=0$$

знаходимо головні кривизни k_1 і k_2, а потім – і середню кривизну

$$H\approx\frac{1}{2b\sqrt{1-\frac{(x-a)^2}{a^2}}}\cdot\approx\frac{1}{2b\sqrt{1-\frac{(x-a)^2}{a^2}}}.$$

А оскільки в середній частині каверни $\frac{(x-a)^2}{a^2}<<1$, то $H\approx\frac{1}{2b}\left(1+\frac{(x-a)^2}{2a^2}\right)\approx\frac{1}{2R_k}$.

Тобто кривизну меридіана можна не враховувати.

Висновки

Дослідимо кавітаційну течію, якщо $\sigma = 0{,}08$; $\mathrm{Fr} = 10$. У такій течії утворюється досить велика каверна, поперечні перетини якої суттєво деформуються наявністю поля сили тяжіння. Результати розрахунку радіусів поперечних перетинів $R(\sigma, \mathrm{Fr}, t, \vartheta)/R_{\mathrm{H}}$ каверни показано на рис. 2 у моменти часу $t = 1{,}25$; $t = 1{,}5$; $t = 1{,}75$ при поділі відрізка $[0; \pi]$ на 18 частин.

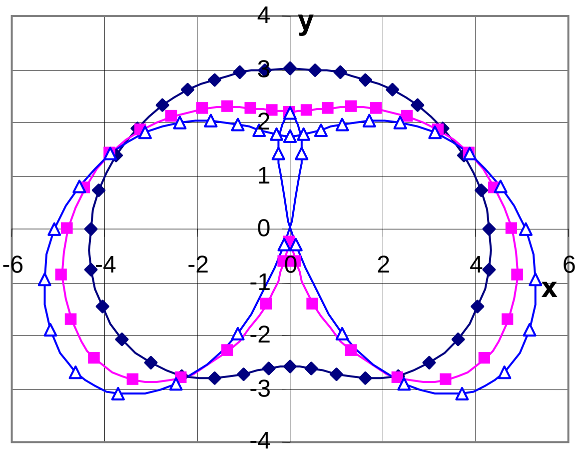

Рис. 2. Перетини каверни:

t = 1,25;

t = 1,5;

t = 1,6

Графіки точно ілюструють дію сили тяжіння. Це вона призводить до утворення характерної впадини знизу каверни, яка стає помітною уже біля міделя і потім швидко зростає до кінця каверни. У перетині $t = 1{,}6$ каверна уже не існує, вона зруйнована.

Ще одне зауваження стосується меж застосування пропонованого методу розрахунку. Як видно з рис. 2, у нижній частині каверни деформації її радіусів можуть бути досить значними і тоді похибки розрахунків теж будуть великими. Як показують порівняння з експериментальними дослідженнями, радіус каверни при $\vartheta = \pi$ не повинен бути надто малою величиною, оскільки вся теорія побудована на припущенні

$$\frac{f(\sigma, \mathrm{Fr}, t, \pi)}{R_0(\sigma, t, \pi)} < 1,$$

що забезпечується умовою $\sigma\sqrt{\sigma}\mathrm{Fr}^2 \geq 2$ [2].

У течії з урахуванням поверхневого натягу – розрахункове число кавітації має бути таким

$$\sigma_1 = \sigma + \frac{4R_H}{2R_k \mathrm{We}} = \sigma + \frac{2}{\mathrm{We}}\sqrt{\frac{\sigma}{0{,}82(1+\sigma)}}.$$

Якщо число кавітації течії $\sigma = 0{,}08$, розрахункове число

$$\sigma_1 = 0{,}08 + \frac{0{,}3}{\mathrm{We}}.$$

Вплив поверхневого натягу буде помітним лише за умови, що $\mathrm{We} = 10...100$.

Про це свідчить рис.3, на якому показано залежності розрахункового числа кавітації σ1 від числа Вебера за різних значень числа кавітації.

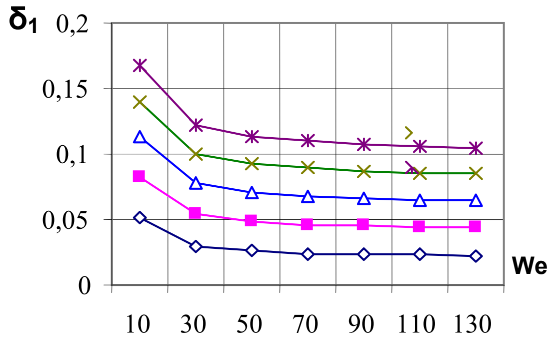

Рис. 3. Залежність δ1=δ1(δ,We):

δ =0,02;

δ =0,04;

δ =0,06;

δ =0,08;

δ =0,1

Добре видно, що навіть при $\mathrm{We} = 50$ вплив поверхневого натягу уже незначний. Схожий висновок є і в роботі [6]: поверхневим натягом можна знехтувати, якщо $\sigma \mathrm{We} >> 1$. Це означає, що в суперкавернах враховувати сили поверхневого натягу не доцільно. Проте для малих каверн воно може бути суттєвим.

Література

1. *Логвинович Г.В.* Гидродинамика течений со свободными границами.– К.: Наук. думка, 1975. – 208 с.
2. *Буйвол В.М., Логвинович Г.В.* Про деформацію поперечних перетинів каверни у важкій рідині // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1971. – № 2. – С. 157–159.
3. *Буйвол В.М., Логвинович Г.В., Шевчук Ю.Р.* Система уравнений возмущенного движения тонких каверн // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1985. – № 10. – С. 103–106.
4. *Гузевский Л.Г.* Численный анализ кавитационных течений. – Новосибирск, 1979. – 36 с. – (Препринт) / Ин-т теплофизики СО АН СССР.
5. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1962. – 1096 с.
6. *Нестерук И.Г.* Некоторые задачи осесимметричных кавитационных течений // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1982. – № 1. – С. 28–34.

Стаття надійшла до редакції 17.10.07.