ного бака, поверхні випаровування та ін.) необхідно вдатися до стендових модельних досліджень. Раціональним, на нашу думку, для вивчення втрат від випаровування в умовах польоту літака є застосування методів математичного моделювання.

Список літератури

1. *Бойченко С.В.* Исследование потерь топлив от испарения и разработка рекомендаций по их предотвращению в условиях эксплуатации авиационной техники: Дис… канд. техн. наук: 05.22.14. – К.: КМУГА, 1996. – 224 с.

2. *Бойченко С.В.* Раціональне використання вуглеводневих палив: Монографія. – К.:НАУ, 2001. – 216 с.

3. *Бойченко С.В.* Проблема потерь топлив от испарения при эксплуатации авиатехники //Вісн. КМУЦА. – 1999. – №1. – С. 22–26.

4. *Белянский В.П.*, *Бойченко С.В.* Исследование потерь авиационных топлив от испарения в различных условиях эксплуатации техники: Проблемы системного подхода в экономике: Сб. науч. тр. – К.: КМУГА, 1999. – С. 45–50.

5. *Бойченко С.В.* Оценка количественных потерь авиационных топлив от испарения в топливном баке в условиях полета самолета // Проблеми експлуатації та надійності авіаційної техніки: Зб. наук. пр. – К.: КМУЦА, 1997. – С. 36–39.

Стаття надійшла до редакції 30.03.02.

УДК 539.375

Т.І. Матченко, канд. техн. наук, доц.

КРИТЕРІЇ ЯКІСНОГО СТАНУ І СИНГУЛЯРНОСТІ НАПРУГ ДЛЯ ТРІЩИН У ТРИВИМІРНИХ ТІЛАХ

Установлено, що існує десять енергетичних критеріїв зміни характеру руйнування; дев'ять видів напружено-деформованого стану в околі ділянки фронту тріщини залежно від геометрії тріщини. Наведено вирази інваріантних J-інтегралів для узагальненого вигляду навантаження тріщини, які визначають зміну енергії деформації при прирості довжини фронту тріщини, площі тріщини або її об'єму. Для дев'яти видів напружено-деформованого стану біля вершини тріщини отримано основні показники степеня при r для функції переміщень.

Вступ. У процесі розвитку тріщини може змінюватися характер руйнування (крихкий, квазікрихкий, в'язкий тощо). На різних ділянках фронту тріщини характер руйнування може відрізнятися від характеру руйнування на сусідніх ділянках цього фронту, про це свідчать зломи зразків в'язких металів [1]. Очевидно, що після зміни характеру руйнування в малій області біля вершини тріщини зміниться і характер деформування (показники сингулярності напруженого і деформованого стану в оточенні тієї чи іншої малої ділянки фронту тріщини).

Для правильного опису напружено-деформованого стану (НДС) в околі фронту тріщин і для прогнозування руйнування необхідно вміти визначати, коли зміниться характер руйнування на тій чи іншій ділянці в околі фронту тріщини. Це особливо актуально для тріщин, які повільно зростають, і тріщин від утоми, так як в окремих випадках допускається експлуатація конструкцій з ними, але при цьому висувається вимога щодо прогнозування з високою точністю швидкості росту тріщини. На характер розвитку тріщини в тривимірному тілі може впливати кривизна фронту тріщини, близькість деяких ділянок фронту до поверхні тіла, притуплення тріщини та інші фактори, які впливають на показник сингулярності НДС в околі її фронту.

Для ділянок фронту тріщини запропоновано енергетичні критерії зміни якісного стану, класифікація видів НДС залежно від розмірності (плоскі, тривимірні, одновимірні) поля НДС, визначено основні показники сингулярності напруг і деформацій.

Енергетичні критерії якісного стану. Гриффітс передбачив, що тріщина буде зростати лише в тому випадку, якщо вивільнена при цьому енергія пружної деформації достатня для забезпечення всіх затрат енергії, пов'язаних з цим ростом.

З погляду на те, що Гриффітс працював зі скляними пластинками [2; 3], крихким матеріалом з досить високим модулем пружності, у цьому випадку переважали затрати енергії на утворення нових поверхонь тріщин. Критерій страгування тріщини має вигляд:

$$\frac{dU}{dS} \geq \frac{dW}{dS},$$

де U – енергія пружного деформування; S – площа нових поверхонь тріщини; W – енергія, витрачена на утворення нових поверхонь тріщини.

Якщо розглянути тріщину в тривимірному пружно-пластичному тілі, то розвиток тріщини може супроводжуватися приростом її площі dS, приростом довжини фронту тріщини $d\gamma$ і приростом необерненого розкриття тріщини $d\delta$ або приростом об'єму тріщини dV. Зазвичай, приріст площі, довжини фронту й об'єму тріщини виникає одночасно, і ці величини взаємозалежні. Тоді відповідно до закону Гриффітса необхідні затрати енергії на необоротні зміни, що пов'язані зі зміною довжини фронту і залишкового розкриття тріщини в доповнення до затрат енергії на утворення нових площ поверхні тріщини. Страгування тріщини виникне, якщо буде виконуватися одна з таких умов:

$$\frac{dU}{dS} \geq \frac{dW}{dS};$$

$$\frac{dU}{dV} \geq \frac{dW}{dV};$$

$$\frac{dU}{d\gamma} \geq \frac{dW}{d\gamma};$$

$$\frac{dU}{dS} + \frac{dU}{dV} \geq \frac{dW}{dS} + \frac{dW}{dW};$$

$$\frac{dU}{d\gamma} + \frac{dU}{dS} \geq \frac{dW}{d\gamma} + \frac{dW}{dS};$$

$$\frac{dU}{d\gamma} + \frac{dU}{dV} \geq \frac{dW}{dV} + \frac{dW}{dV};$$

$$\frac{dU}{d\gamma} + \frac{dU}{dS} + \frac{dU}{dV} \geq \frac{dW}{d\gamma} + \frac{dW}{dS} + \frac{dW}{dV}.$$

Для нестійкого росту тріщини зміна характеру руйнування виникне, якщо виконується одна з умов:

$$\frac{d^2U}{dS^2} \geq 0;$$

$$\frac{d^2U}{dV^2} \geq 0;$$

$$\frac{d^2U}{d\gamma^2} \geq 0.$$

Усього можливо десять якісних змін характерів зломів на різних ділянках тріщини при її розвитку.

Методика визначення параметрів механіки руйнування (dU/dS; $dU/d\gamma$; $dU/d\delta$) числовим методом. Приріст енергії пружної деформації можна записати у вигляді:

$$\Delta U = A\Delta S + B\Delta\gamma + C\Delta\delta + D\Delta S\Delta\gamma + E\Delta S\Delta\delta + F\Delta\gamma\Delta\delta + Q\Delta\gamma^2 + O\Delta\delta^2 + P\Delta S^2 + R\Delta\gamma\Delta\delta\Delta S + \ldots$$

Нехтуючи малими величинами другого і третього порядку, одержимо

$$\Delta U = A\Delta S + B\Delta\gamma + C\Delta\delta,$$

де ΔU – приріст енергії пружної деформації; A, B, C – невідомі коефіцієнти; ΔS – приріст площі тріщини; $\Delta\gamma$ – приріст довжини фронту тріщини на розглядуваній ділянці; $\Delta\delta$ – приріст розкриття тріщини у вибраній точці на її поверхні.

При наближенні приросту довжини тріщини $\Delta\ell$ (ℓ – довжина тріщини на тій або іншій поверхні тіла) до нуля маємо:

$$A = \frac{\partial U}{\partial S};$$

$$B = \frac{\partial U}{\partial\gamma};$$

$$C = \frac{\partial U}{\partial\delta}.$$

Невідомі коефіцієнти A, B, C можна визначити за системою трьох рівнянь:

$$\left.\begin{aligned}\Delta U_1 &= A\Delta S_1 + B\Delta\gamma_1 + C\Delta\delta_1;\\ \Delta U_2 &= A\Delta S_2 + B\Delta\gamma_2 + C\Delta\delta_2;\\ \Delta U_3 &= A\Delta S_3 + B\Delta\gamma_3 + C\Delta\delta_3,\end{aligned}\right\}$$

де 1, 2, 3 – індекси, які визначають приріст розміру U, S, γ, δ для трьох досить близьких довжин тріщин.

Для визначення критичних значень параметрів механіки руйнування dW/dS, $dW/d\gamma$, dW/dV необхідно розробити три види зразків, які повинні моделювати три процеси руйнування:

I – з ростом довжини тріщини значно зростає розкриття тріщини при незначному зростанні її площі і довжини фронту;

II – з ростом довжини тріщини значно зростає площа тріщини при незначному зростанні її розкриття і довжини фронту;

III – з ростом довжини тріщини значно зростає довжина фронту при незначному зростанні площі і розкриття тріщини.

Дослід необхідно провести відповідно до методик досліджень зразків [4; 5], вважаючи параметром не довжину тріщини ℓ, а її площу S, її розкриття δ і довжину її фронту γ.

Співвідношення, які визначають швидкість зміни потенціальної енергії при прирості тріщини, можна записати:

$$J^{\gamma} = \frac{\partial P}{\partial\gamma};$$

$$J^{s} = \frac{\partial P}{\partial S} = \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j}; \qquad (1)$$

$$J^{v} = \frac{\partial P}{\partial V} = \frac{\partial^3 P}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k},$$

де P – потенціальна енергія; x_i, x_j, x_k – ортогональна система координат з початком біля вершини тріщини.

У виразах (1) $i \neq j \neq k$. Для визначення J^{γ}, J^{s}, J^{v} проведемо викладки аналогічно тому, як це зробив Дж. Райс у роботі [6]. У результаті одержимо:

$$J^{\gamma} = \int_s T \frac{\partial u}{\partial x_i} e_{\gamma}^{x_i} dS - \int_s \omega e_{\gamma}^{x_Q} dx_P dx_R ;$$

$$J^{s} = \int_s T \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} e_{x_1}^{x_i} e_{x_2}^{x_j} dS - \int_s \frac{\partial \omega}{\partial x_i} e_{x_1}^{x_Q} e_{x_2}^{x_i} dx_P dx_R ; \qquad (2)$$

$$J^{v} = \int_s T \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} e_{x_1}^{x_i} e_{x_2}^{x_j} e_{x_3}^{x_k} dS - \int_s \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i \partial x_j} e_{x_1}^{x_Q} e_{x_2}^{x_i} e_{x_3}^{x_j} dx_P dx_R ,$$

де T – зусилля з одиничної площі на поверхні інтегрування S; u – повний вектор переміщень; $i, j, k = 1, 2, 3$; ω –густина енергії деформування; $Q, P, R = 1, 2, 3$ $(Q \neq R \neq P)$.

У роботах [7–12] одержано вирази J-, M-, T- інтегралів для тріщин у тих або інших характерних умовах, які мають переваги в порівнянні з виразами (2). Проте в подальших випадках нас буде цікавити не скінченний вираз J-інтеграла, а його розмірність і гарантії інваріантності.

Класифікація видів НДС. Г.П. Черепанов [13], Дж. Хатчинсон [14], Дж. Райс і Г. Розенгрін [15] показали, якщо залежність між еквівалентними напругами і деформаціями наближається до степеневої

$$\overline{\sigma} = \overline{\sigma}_1 \, \varepsilon_p^n ,$$

то асимптотична поведінка полів напруг і деформацій у малому околі вершини тріщини має вигляд:

$$\sigma_{ij} \sim r^{\frac{n}{1+n}} \Sigma_{ij}(\theta) ;$$

$$\varepsilon_{ij} \sim r^{\frac{1}{1+n}} E_{ij}(\theta) ,$$

де n. показник деформаційного зміцнення матеріалу; $\Sigma_{ij}(\theta)$, $E_{ij}(\theta)$ – деякі тригонометричні функції кута θ; θ – кут між напрямком тріщини і радіусом з вершини тріщини до розглядуваної точки.

Переміщення в цьому випадку визначається залежністю

$$U_{ij} \sim r^{\frac{n}{n+1}} E_{ij}(\theta) .$$

Якщо розглянути вирази (2) як функціонали, то можна визначити характер особливостей напруг, деформацій і переміщень, що відповідають мінімальній величині особливості напружень, яка задовольняє умову незалежності інтегралів (2) від шляху інтегрування.

Переміщення можна виразити поліномом того чи іншого характеру:

$$U_i = A + Bx_i^{\alpha} + Cx_i^{\lambda} + Dx_j^{\alpha} + Ex_j^{\lambda} + Fx_k^{\alpha} + Ix_k^{\lambda} + \ldots , \qquad (3)$$

де A, B, C, D, E, F, I – коефіцієнти, які задовольняють граничні умови, умови рівноваги і спільності деформацій; α, λ – показники степеня при x_i для переміщень.

Якщо мова йде про моделювання переміщень поблизу точки з особливістю, то α і λ можуть відповідати асимптотиці напруг з показниками (1-α)n або (1-λ)n, якщо (1-λ)n <0, (1-α)n<0.

Проведемо аналіз показників особливості з точністю моделювання переміщень першими трьома членами ряду (3). Якщо особливість зосереджена в одній точці (перелом фронту тріщини), то у тривимірному тілі асимптотика напруг може проявитися по трьох напрямках, тобто по трьох осях (x_1, x_2, x_3). Аналогічно асимптотика напруг може проявитися за двома напрямками (у площині), якщо особливі точки розподілені на одній лінії (фронт тріщини). Асимптотика напруг може проявлятися в одному напрямку, якщо особливі точки розподілені по площині. Такий ефект можуть викликати криволінійні поверхні тріщини [16–19]. Тоді для перелічених випадків, повний вектор переміщень може бути пропорційний залежності:

$u \sim \sqrt{x_1^{2\alpha} + x_2^2 + x_3^2}$ – асимптотика в одному напрямку;

$u \sim \sqrt{x_1^{2\alpha} + x_2^{2\alpha} + x_3^2}$ – асимптотика в площині;

$u \sim \sqrt{x_1^{2\alpha} + x_2^{2\alpha} + x_3^{2\alpha}}$ – асимптотика тривимірна.

До виразу потоку енергії входять J-інтеграли при прирості довжини фронту тріщини J^{γ}, при прирості площі тріщини J^{s}, при прирості об'єму тріщини J^{v}. Із варіаційного принципу Лагранжа випливає, що можуть існувати ті показники особливості напруг, при яких енергія деформації тіла мінімальна. У цьому випадку J-інтеграли інваріантні, отже вони не залежать від шляху інтегрування. Для кожного характеру напруженого стану існує свій показник сингулярності напруг і деформацій, при яких один з інтегралів інваріантний. Отже, можуть існувати дев'ять варіантів НДС біля вершини тріщини зі своїми характерними особливостями напруг:

I – приріст довжини фронту тріщини, асимптотика напруг по одній осі;

II – приріст довжини фронту тріщини, асимптотика напруг у площині (по двох осях);

III – приріст довжини фронту тріщини, напруги сингулярні по трьох осях;

IV – приріст площі тріщини, асимптотика напруг по одній осі;

V – приріст площі тріщини, асимптотика напруг у площині;

VI – приріст площі тріщини, напруги сингулярні по трьох осях;

VII – приріст об'єму тріщини (розкриття тріщини), асимптотика по одній осі;

VIII – приріст залишкового розкриття тріщини, асимптотика напруг у площині;

IX – приріст залишкового розкриття тріщини напруги мають асимптотичний характер по трьох осях.

Наведені розподілення є умовними. Як правило, приріст тріщини супроводжується і приростом довжини її фронту, і приростом площі тріщини, і залишковим розкриттям тріщини (для великих рівнів пружно-пластичного деформування). Усі пункти, пов'язані з асимптотикою по двох осях, характерні для області біля фронту – тріщини в глибині тіла. Усі пункти, пов'язані з асимптотикою по одній осі, характерні для ділянок фронту тріщини в боковій поверхні тіла або біля раковини в глибині тіла. Усі пункти, пов'язані з асимптотикою по трьох осях, характерні для ділянок фронту тріщини більшої кривизни (перелом фронту тріщини), вершині скінченної раковини і для перетину фронту тріщини поперечними розривами. Усі пункти, пов'язані з приростом площі тріщини, характерні для пружних тіл більшої жорсткості. Усі пункти, пов'язані з приростом залишкового розкриття тріщини, характерні для більших рівнів пластичного деформування або для тіл малої жорсткості. Усі пункти, пов'язані з приростом довжини фронту тріщини, характерні для тріщин поблизу концентраторів напруг, тріщин у нерівномірному полі залишкових напруг.

Визначення основних показників особливості напруг, яка відповідає мінімальній енергії деформації для кожного з дев'яти варіантів. Розглянемо тільки одну з основних частин J-інтеграла у виразах (2).

Для першого варіанта

$$J^{\gamma} \sim \int_{s} T \frac{\partial u}{\partial x_1} dS, \qquad (4)$$

де u – вектор повних переміщень, які можна виразити залежністю (4).

Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \sim (x_1^{2\alpha} + x_2^{2\lambda} + x_3^{2\lambda})^{-1/2} x_1^{2\alpha-1} \sim x_1^{\alpha-1};$$

$$\begin{cases} T_1 \sim \sigma_{1j} \sim \varepsilon_{1j}^n \sim x_1^{(\alpha-1)n}; \\ T_2 \sim \sigma_{2j} \sim \varepsilon_{2j}^n \sim x_2^{-n}; \\ T_3 \sim \sigma_{3j} \sim \varepsilon_{3j}^n \sim x_3^{-n}; \end{cases}$$

$dS \sim dx_1 dx_2 \sim dx_2 dx_3 \sim dx_3 dx_1$.

Вираз (4) є інваріантом, тобто не залежить від величини x_1 і S, якщо показник степеня при x_1 дорівнює нулю.

Значення степеня при $T_i, \partial u / \partial x, S$ підставимо у рівняння (4):

$$J^\gamma \sim \int_s T_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \sim \int_s x_1^{(\alpha-1)} x_1^{(\alpha-1)} x_1^1 dx_2,$$

тоді $\alpha=1$,

$$J^\gamma \sim \int_s T_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \sim \int_s x_1^{(\alpha-1)} x_1^1 dx_2,$$

тоді $\alpha=0$,

$$J^\gamma \sim \int_s T_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_2 dx_3 \sim \int_s x_1^{(\alpha-1)n} x_1^{(\alpha-1)} x_2 dx_3,$$

тоді $\alpha=1$,

$$I^\gamma \sim \int_s T_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_2 dx_3 \sim \int_s x_1^{(\alpha-1)} dx_2 dx_3,$$

тоді $\alpha=1$.

Тобто для першого варіанта напруженого стану показник степеня при r при моделюванні функції переміщень біля вершини тріщини може бути $\alpha=1$ або $\alpha=0$. Аналогічні роздуми і викладки проведемо для інших варіантів напруженого стану:

– для другого варіанта $\alpha=(n-1)/(n+1)$; $n/(n+1)$;
– для третього варіанта $\alpha=(n-1)/(n+1)$;
– для четвертого варіанта $\alpha=n/(n+1)$; 0; 1; –1;
– для п'ятого варіанта $\alpha=n/(n+1)$; 1; 0;
– для шостого варіанта $\alpha=n/(n+1)$;
– для сьомого і восьмого варіантів $\alpha=n/(n-1)$; $(n+1)/(n-1)$; 0; 1;
– для дев'ятого варіанта $\alpha=1$.

Значення показника степеня при r для функції переміщень визначають показник сингулярності деформацій або напруг. Отримані вирази степеня при r для функції переміщень збігаються з виразом, характерним для окремого випадку (приріст площини тріщини) і описаним у роботах [13–15].

Висновок. Для ділянок фронту тріщини запропоновано десять енергетичних критеріїв зміни характеру руйнування.

Наведені вирази інваріантних J-інтегралів для загального виду навантажень тріщини, визначають зміни енергії деформації при прирості довжини фронту тріщини, площі тріщини та об'єму.

Залежно від геометрії тріщини і граничних умов, величини розкриття тріщини існує дев'ять видів НДС в околі ділянки фронту тріщини.

Для дев'яти характерних видів НДС біля вершини тріщини отримано основні показники степеня при *r* для функції переміщень, які збігаються з результатами інших авторів в окремих випадках.

Список літератури

1. *Атлас* дефектов сталей: Пер. с нем. – М.: Металлургия, 1979. – 188 с.

2. *Griffith A.A.* The phenomena of rupture and flow in solids. Phil. Trans. Roy. Soc. of London, A221 (1921). – P. 163–197.

3. *Griffith A.A.* The theory of rupture. Proc.Ist.Int. Congress Appl.Mech. (1924). – P. 55–63. Diezeno and Burgers ed Waltman (1925).

4. *Определение* трещиностойкости материалов на основе энергетического контурного интеграла / Г.С. Писаренко, В.П. Науменко, Г.С. Волков. – К.: Наук.думка, 1978. – 124 с.

5. *Методические* указания. Расчеты и испытания на прочность в машиностроении. Методы механических испытаний материалов. Определение характеристик вязкости разрушения (трещиностойкости) при статическом нагружении. РД 50-266-81. – М.: Изд-во стандартов, 1982. – 180 с.

6. *Дж. Райс.* Математические методы в механике разрушения. Разрушение. Т.2. – М.:Мир, 1975. – С. 204–335.

7. *Michel B., Will P.* Integralkonzepte fiir ii die Ripbewertung eine aktuells Trendanalyse von Ripkriterien der modernen Bruekmechanik // Zangew Math. und Mech. – 1986. – 66, №2. – S. 65–72.

8. *Elastic-Plastic* Fracture Mechanics. Proc. 4-th Adv. Semin.Ispra, 24-28. Oct. 1983, Ed.Lorsson Lors Hannes Dordrecht e.ai D.Reidel Publ.Co., 1985. – VIII, 527 p.ill. ISBN 90-277-2017-7.

9. *New* path independent integrals in linear plastic fracture mechanics. Ch en XZ // Eng. Fract. Mech. – 1985. – 22, № 4. – P. 673–686.

10. *Bakker Ad.* The I-concept theoretical basis and its use in EPFM // Elastic-Plast. Fract. Mech. Proc. 4-th. Adv. Semin. Ispra, 24-28, Oct. 1983, Dordrecht e.a. 1985. – P. 13–53.

11. *Bruct F.W., Nishioka T., Atluri S.N., Nakagai M.//* Further studies on elastic-plastic stable fracture utilizing the T*-integral. Eng.Fract.Mech. – 1985. – 22, № 6. – P. 1079–1103.

12. *Satay N., Nishioka T.* On pathindependent integrals in the mechanics of elastic, inelastic, and dynamic fracture: Atluri, J. Aeron. Soc. India. – 1984. – 36, № 3. – S. 203–219.

13. *Черепанов Г.П.* О распространении трещины в сплошной бреде // ПММ. – 1967. – Т.31, №3. – С. 476–488.

14. *Hutehinson J.W.* Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening materials// I.Mech. Phys. Solids. – 1968. – Vol.16, №1. – P. 13–22.

15. *Rice J.R., Rosengren G.F.* Plane strain deformation near a crack tip in a power law hardening materials// J.Mech. Phys. Solids. – 1968. – Vol. 16, №1. – P.1–12.

16. *Williams M.L.*, J. Appl. Mech., 24(1957). – 109 p.

17. *Williams M.L.* In "Proccedings of the 5-th U.S.National Congress for Applied Mechanics". 1966. – P. 451.

18. *Benbow J.J.* Proc.Phys.Soc. – London, 1960. – 75. – 697 p.

19. *Rongved L.J.* Appl.Mech, 1957. – 24. – 252 p.

Стаття надійшла до редакції 30.03.02.