

УДК 534.1(045)

М.М. Бородачов, д-р техн. наук, проф.  
Т.В. Доник, студ.

## ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ЛОПАТКИ ТУРБИНИ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

*Розглянуто задачу про знаходження частот вільних коливань лопатки турбіни. Досліджено вплив наявності тріщини на частоти вільних коливань.*

*The problem about a presence of frequencies of free fluctuations the blades turbines is considered. Influence of presence of a crack on frequencies of free fluctuations is investigated.*

### Актуальність проблеми

Робочі лопатки, крім постійних навантажень, також піддаються дії циклічно змінних у часі навантажень, які в сучасних турбомашинах є основною причиною виникнення дефектів у процесі експлуатації. Тому забезпечення динамічної міцності лопаток – важлива умова підвищення ефективності застосування турбоустановок у народному господарстві.

Максимальні циклічно змінні у часі напруження в робочих лопатках турбіни виникають, коли частоти діючих періодичних навантажень виявляються кратними частотам вільних коливань лопатки. Тому питання про визначення спектра частот вільних коливань робочих лопаток вельми актуальне.

**Постановка проблеми** – дослідження впливу наявності тріщини на частоти вільних коливань. У результаті визначення частот вільних коливань лопатки турбіни методом скінченних елементів (МСЕ), встановлено спектр вільних коливань лопатки. Для порівняння першу частоту коливань знайдено методом Гальоркіна.

Розміри змінного поперечного перерізу змінюються як по довжині, так і по товщині лопатки (рис.1).

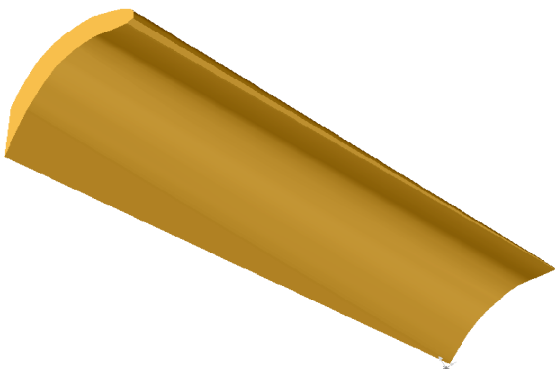


Рис. 1. Лопатка змінного поперечного перерізу

© М.М. Бородачов, Т.В. Доник, 2007

Лопатку виготовлено з корозійного стійкого матеріалу – сталі підвищеної міцності марки 13X11H2B2MФ.

Поперечні перерізи лопатки завдовжки 104 мм, які дають нам уявлення про геометричні дані лопатки, показано на рис. 2 і в табл. 1.

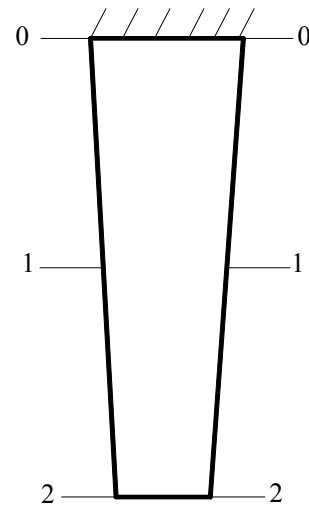


Рис. 2. Перерізи в робочій лопатці

Таблиця 1

Геометричні дані лопатки

Параметр	Переріз		
	0–0	1–1	2–2
Ширина, мм	43	42	28
Товщина, мм	5,58	3,24	2,05
Площа, мм <sup>2</sup>	90,52	66,024	41,96

### Аналіз дослідження

Численні результати досліджень про вільні коливання лопаток наведено в науковій та довідковій літературі [1–4].

Досі лопатку розглядали як стрижень сталого або змінного поперечного перерізу. Однак такий підхід є приблизним. Більш точно розглядали лопатку як пружне тривимірне тіло. Сучасні результати з цієї проблеми наведено в роботах [5; 6].

**Мета** – отримати розв’язок задачі про спектр вільних коливань робочої лопатки як пружного тривимірного тіла за допомогою МСЕ. Основи МСЕ наведено в монографіях [7; 8].

### Рівняння руху пружного тіла

Диференціальні рівняння руху пружного середовища мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\end{aligned}\quad (1)$$

де  $\lambda, \mu$  – сталі Ламе;

$\theta$  – об’ємне розширення;

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z};$$

$u, v, w$  – проекції вектора переміщень на осі  $x, y, z$ ;

$\nabla^2$  – оператор Лапласа;

$\rho$  – густина матеріалу.

Якщо коливання пружного тіла відбуваються за гармонійним законом:

$$u = u_0(x, y, z) \cos \omega t;$$

$$v = v_0(x, y, z) \cos \omega t;$$

$$w = w_0(x, y, z) \cos \omega t,$$

то рівняння (1) набувають вигляду

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta_0}{\partial x} + \mu \nabla^2 u_0 + \rho \omega^2 u_0 &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta_0}{\partial y} + \mu \nabla^2 v_0 + \rho \omega^2 v_0 &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta_0}{\partial z} + \mu \nabla^2 w_0 + \rho \omega^2 w_0 &= 0,\end{aligned}\quad (2)$$

де

$$\theta_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}.$$

Після розв’язання диференціальних рівнянь (2), які задовольняють граничні умови, отримуємо систему однорідних рівнянь. Далі прирівнюємо нулю визначник цієї однорідної системи та отримуємо частотне рівняння, з якого знаходимо частоти вільних коливань пружного тіла.

Спочатку робочу лопатку розглядатимемо як консольний стрижень змінного поперечного перерізу.

Диференціальне рівняння вільних поперечних коливань стрижня має вигляд:

$$(EJz'')'' + m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0; \quad (3)$$

$$m = \frac{\gamma F}{g};$$

де  $E$  – модуль Юнга;

$J$  – осьовий момент інерції;

$\gamma$  – вага одиниці об’єму матеріалу стрижня;

$F$  – площа поперечного перерізу;

$g$  – прискорення сили тяжіння.

Якщо коливання здійснюються за гармонійним законом

$$z = z_0(x) \cos \omega t, \quad (4)$$

то рівняння (3) після підстановки виразу (4) і скорочення на  $\cos \omega t$  набуває вигляду

$$(EJz_0'')'' - m_1 \omega^2 z_0 = 0. \quad (5)$$

Розглядатимемо лопатку як консольний стрижень, в якому один кінець затиснений, а другий вільний. Граничні умови в цьому випадку мають такий вигляд:

$$z_0(0) = 0;$$

$$z_0'(0) = 0; \quad (6)$$

$$z_0''(l) = 0;$$

$$z_0'''(l) = 0.$$

Точний розв’язок диференціального рівняння (5), який задовольняє граничні умови (6), можна отримати тільки для стрижня постійного поперечного перерізу. У цьому випадку перші п’ять колових частот мають такий вигляд:

$$\omega_1 = 3,516A;$$

$$\omega_2 = 22,03A;$$

$$\omega_3 = 61,7A;$$

$$\omega_4 = 121,0A;$$

$$\omega_5 = 199,9A,$$

де

$$A = \frac{1}{l^2} \left( \frac{EJg}{F\gamma} \right)^{1/2}.$$

Щоб знайти кругові частоти для лопаток змінного поперечного перерізу, використовують наближенні методи. Найчастіше застосовують способи Релея і Гальоркіна.

### Метод Гальоркіна

Вираз для функції  $z_0(x)$  вибираємо у вигляді ряду

$$z_0 = \sum a_i \varphi_i, \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

який задовольняє усі граничні умови.

Згідно з методом Гальоркіна має бути виконана умова

$$\int_0^l [(EJz_0'')'' - m_1 \omega^2 z_0] \varphi_k dx = 0. \quad (8)$$

Підставляючи вираз (7) в умову (8), отримуємо систему однорідних параметрів  $a_i$ , одержуємо ненульове рішення і прирівнюємо до нуля дільник з одиничних інтегралів  $\delta_{ik}$ :

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{21} & \dots & \delta_{n1} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \dots & \delta_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{1n} & \delta_{2n} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

де

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} = \int_0^l [(EJ\varphi_i'')'' \varphi_k - m_1 \omega^2 \varphi_i \varphi_k] dx. \quad (10)$$

Розкриваючи визначник (9), отримуємо рівняння  $n$ -го степеня відносно невідомих  $\omega$ , з якого визначаємо  $n$  значень  $\omega^2$ .

У першому наближенні ( $n=1$ ) маємо

$$\delta_{11} = 0,$$

а в другому – ( $n=2$ )

$$\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2 = 0.$$

Другого наближення буває достатньо для отримання задовільного значення основної частоти.

Приклад. Візьмемо лопатку зі змінними шириною і товщиною. Розглянемо задачу у першому наближенні.

Нехай

$$z_0 = a \left( 6 \frac{x^2}{l^2} - 4 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right), \quad (11)$$

граничні умови:

$$z_0(0) = 0;$$

$$z_0'(0) = 0;$$

$$z_0''(l) = 0;$$

$$z_0'''(l) = 0.$$

Вираз (11) задовольняє ці умови.

У цьому випадку

$$\varphi_1 = \left( 6 \frac{x^2}{l^2} - 4 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right);$$

$$\varphi_1'' = \frac{12}{l^2} \left( 1 - 2 \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2} \right);$$

$$\varphi_1^{IV} = \frac{24}{l^4}.$$

На основі формули (10) маємо

$$\delta_{11} = \int_0^l [(EJ\varphi_1'')'' \varphi_1 - m \omega^2 \varphi_1^2] dx.$$

Оскільки в першому наближенні  $\delta_{11} = 0$ , то

$$\int_0^l [(EJ\varphi_1'')'' \varphi_1] dx = \int_0^l m \omega^2 \varphi_1^2 dx. \quad (12)$$

З рівняння (12) виведемо  $\omega^2$ :

$$\omega^2 = \frac{A}{B},$$

$$A = \int_0^l [(EJ\varphi_1'')'' \varphi_1] dx;$$

$$B = \int_0^l m \varphi_1^2 dx.$$

У цьому випадку

$$m(x) = m_0 \left( 1 - 0,546 \frac{x}{l} + 0,00955 \frac{x^2}{l^2} \right);$$

$$m_0 = \frac{\gamma}{g} F_0;$$

$$F_0 = 90,52 \text{ мм}^2;$$

$$J(x) = J_0 \left( 1 - 0,927 \frac{x}{l} + 0,212 \frac{x^2}{l^2} \right);$$

$$J_0 = 553,86 \text{ мм}^4.$$

Після підстановок отримуємо

$$A = \int_0^l (EJ_0 \left( 1 - 0,927 \frac{x}{l} + 0,212 \frac{x^2}{l^2} \right) \frac{12}{l^2} \left( 1 - 2 \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2} \right)) \left( 6 \frac{x^2}{l^2} - 4 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right) dx;$$

$$A = 1,865 \frac{EJ_0}{l^3};$$

$$B = \int_0^l m_0 \left( 1 - 0,546 \frac{x}{l} + 0,00955 \frac{x^2}{l^2} \right) \times$$

$$\times \left( 6 \frac{x^2}{l^2} - 4 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right)^2 dx;$$

$$B = 0,733 m_0 l.$$

Тоді  $\omega$  дорівнюватиме:

$$\omega = \frac{5,52}{l^2} \left( \frac{EJ_0}{m_0} \right)^{1/2};$$

$$\omega = \frac{5,52}{0,10457^2} \times \left( \frac{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 553,86 \cdot 10^{-12}}{7,7 \cdot 10^3 \cdot 90,52 \cdot 10^{-6}} \right)^{1/2} = 6521 \text{ 1/с}.$$

### Метод скінченних елементів

Метод Гальоркіна дозволяє наближено визначити першу частоту. Обчислення другої і наступних частот надзвичайно складне, тому для визначення спектра частот вільних коливань доцільніше визначити МСЕ і програмний комплекс. Програмний комплекс реалізований як інтегрована система аналізу напружено-деформованого стану і проектування елементів конячрукцій на базі МСЕ.

Наведемо приклад визначення спектра частот вільних коливань робочої лопатки (табл. 2).

Таблиця 2

#### Спектр частот вільних коливань робочої лопатки

Спектр частот	Колова частота вільних коливань, рад/с	Частота вільних коливань, Гц	Період, с
$\omega_1$	6241,4	993,3	1006,7
$\omega_2$	15246	2426	41211
$\omega_3$	23798	3787	26401
$\omega_4$	25491	4057	24648
$\omega_5$	34962	5564	17971

Під час визначення першої частоти вільних коливань МСЕ отримано  $\omega_1 = 6241,4$  рад/с, а методом Гальоркіна:  $\omega_1 = 6521$  рад/с.

Різниця цих даних становить 4,5 %.

У процесі експлуатації в лопатці можуть виникнути тріщини, що впливає на частоти вільних коливань лопатки.

Розглянемо визначення частот лопатки за наявності тріщин різної довжини (табл. 3).

Таблиця 3

#### Перша частота вільних коливань лопатки $\omega_1$ , рад/с

Довжина тріщини, мм	Тріщина		
	під кутом $0^\circ$	під кутом $30^\circ$	під кутом $60^\circ$
1	6239,8	6240,4	6240,3
3	6229,7	6232,8	6239,0
5	6202,2	6208,3	6234,5
7	6151,6	6156,9	6223,1
9	6075,2	6073,3	6203,3

Отримані результати також подано у вигляді графіка (рис. 3). З рис. 3 видно, що зі збільшенням довжини тріщини перша частота вільних коливань зменшується.

### Висновки

1. Визначено спектр частот вільних коливань робочих лопаток газотурбінних установок.

2. Робочу лопатку розглянуто як тривимірне тіло реальної геометричної форми. Наведено основні диференціальні рівняння коливання пружних тіл. Розглянуто наближений метод Гальоркіна визначення першої частоти вільних коливань як стржиня змінного перерізу. Визначено спектр частот вільних коливань МСЕ як тривимірного тіла. Наведено порівняння результатів обчислення першої частоти за методом Гальоркіна і за МСЕ.

3. Для лопатки з тріщинами розглянуто вплив довжини тріщини на першу частоту вільних коливань, а саме: тріщини, нахилені під різними кутами до основи лопатки. Як показали результати розрахунків, найменше на частоту вільних коливань впливає тріщина, яка нахилена під кутом  $60^\circ$  до основи. Чим менший кут, тим більший вплив тріщини на частоту вільних коливань лопатки.

У подальшому передбачено розв'язати задачу про змушені коливання лопатки.

Отримані результати можуть бути використані в розрахунковій практиці під час перевірки на міцність елементів газотурбінних установок.

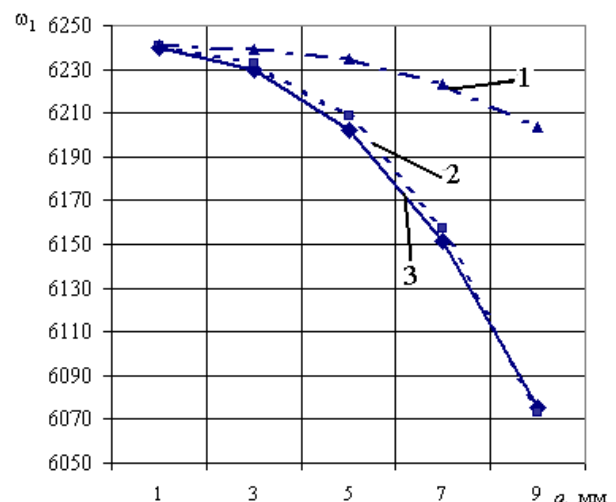


Рис. 3. Залежність першої частоти вільних коливань від довжини тріщини лопатки:

1 – під кутом  $60^\circ$ ;

2 – тріщина під кутом  $30^\circ$ ;

3 – тріщина, під кутом  $0^\circ$

**Література**

1. *Динамика* авиационных газотурбинных двигателей / Под ред. И.А. Биргера, Б.Ф. Шорра. – М.: Машиностроение, 1981. – 232 с.
2. *Костюк А.Г.* Динамика и прочность турбомашин. – М.: Машиностроение, 1982. – 264 с.
3. *Левин А.В., Боришанский К.Н., Консон Е.Д.* Прочность и вибрация лопаток и дисков паровых турбин. – Л.: Машиностроение, 1981. – 710 с.
4. *Манушин Э.А., Суровцев И.Г.* Конструирование и расчет на прочность турбомашин газотурбинных и комбинированных установок / Под ред. Н.Н. Малинина. – М.: Машиностроение, 1990. – 400 с.
5. *Буланчук О.М., Буланчук Г.Г., Довгий С.А.* Колебания пластины с упругой заделкой // Междунар. симпоз. “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики”. – Х.: ХНУ, 2005. – С. 47–50.
6. *Егизарян Т.А.* О собственных колебаниях пластинок, ослабленных трещиной // Изв. АН Армении. Механика. – 2005. – №1. – С. 9–14.
7. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
8. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.

Стаття надійшла до редакції 08.11.07.