УДК 519.872 (045)

О.М. Дишлюк, асист.

МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ПОКАЗНИКІВ ФУНКЦІОНУВАННЯ СИСТЕМ ВИПАДКОВОГО МНОЖИННОГО ДОСТУПУ З МНОЖИННИМИ ЗАЯВКАМИ

Національний авіаційний університет
E-mail: dyshliuk_o@ukr.net

Проаналізовано системи множинного доступу з урахуванням множинності заявки. Розглянуто системи масового обслуговування з множинними заявками з погляду сучасних досліджень систем із нетрадиційними потоками заявок. Отримано оцінки ймовірності перекриття (накладання) множинних заявок. Розв'язано задачу еквівалентної заміни системи з заявками складної структури системою з простими заявками.

The multiple-access systems are analyzed, taking into account the multiplicity of the requests. The systems of the mass services with multiply requests are researched from the point of view modern research of the systems with non-traditional streams of the requests. Estimates of probability of overlap of multiple applications are obtained. The problem of equivalent replacement the system with the requests of complex structure by the system with simple requests is solved.

Проанализированы системы множественного доступа с учетом множественности заявки. Рассмотрены системы массового обслуживания с множественными заявками с точки зрения современных исследований систем с нетрадиционными потоками заявок. Получены оценки вероятности перекрытия (наложения) множественных заявок. Решена задача эквивалентной замены системы с заявками сложной структуры системой с простыми заявками.

Постановка проблеми

Упровадження наукоємних технологій у виробничу й економічну діяльність розширює сферу застосування систем передачі інформації. Масштаби використання систем передачі інформації у складі автоматизованих комплексів, що контролюють різноманітні процеси та об'єкти керування, системи життєзабезпечення тих або інших організацій та установ постійно зростають.

Найбільшої уваги під час дослідження математичних моделей систем передачі інформації для оцінки параметрів їх функціонування приділяють математичним моделям систем випадкового множинного доступу у зв'язку з їх найбільшим розповсюдженням.

Як інструмент математичного моделювання таких систем використовують апарат теорії масового обслуговування (ТМО), за допомогою якого будують їх аналітичні моделі.

Для досягнення адекватності моделей реальним системам іноді вхідний потік заявок треба розглядати як потік заявок складної структури (множинних заявок). Такі заявки існують у системах випадкового множинного доступу:

– комп'ютерних системах та мережах як повідомлення, що розбивається на кадри;

– навігаційних системах як об'єкт навігації, що обслуговується неодноразово в зоні відповідальності;

– системах спостереження як об'єкт спостереження, що неодноразово є джерелом передачі координат місцезнаходження.

Особливий інтерес викликає оцінювання пропускної спроможності таких систем.

У разі перевантаження системи втрата інформації на етапі її отримання інколи не дозволяє визначити координати місцезнаходження об'єкта, або примушує повторювати її передавання. У математичних моделях таких систем, на відміну від класичної ТМО кожна заявка складається з окремих частин і потребує відповідного обслуговування.

Результати ТМО з роботи [1] неточно відображають реальні процеси, що досліджуються.

Єдиним методом розрахунку ефективності подібних систем є метод статистичного моделювання.

Проте процес моделювання такої системи (як складання моделюючого алгоритму, так і виконання реалізацій) складніший, ніж у випадку простих (одиночних) заявок, як показано в роботі [2]. Необхідно визначити, чи можна дану систему зі складними заявками замінити еквівалентною за деяким критерієм системою з простими заявками.

Еквівалентна заміна можлива в разі виконання відповідної умови часового розподілення заявок. Це значно спрощує алгоритм, що моделюється, і в той же час з'являється можливість використовувати вже існуючі формули ТМО або за їх зразком вивести нові.

Якщо еквівалентна заміна неможлива, постає задача розроблення зручного математичного імовірнісного апарату описання та аналізу систем масового обслуговування (СМО) з множинними заявками, а також пошук можливого спрощення формул і статистичних моделей для характеристики якості обслуговування при порівняно малих, що характерно для процесів, які спостерігаються, ймовірностях перекриття імпульсів, що утворюють заявки СМО.

Аналіз досліджень і публікацій

На підставі вивчення різних систем обслуговування виникає необхідність використання існуючих та розроблення нових методів дослідження типових систем із нетрадиційними потоками заявок. Частинний випадок аналогічної системи розкривається в роботі [3], де розглянуто однокональну СМО, в яку за законом Пуассона надходять заявки, кожна з яких потребує виконання двох операцій.

За сталої тривалості операції та інтервалу між ними для випадку, коли інтервал менше часу виконання операції, аналітично розв'язана задача визначення середнього часу очікування для першої і другої операції.

За розробленим алгоритмом проведено моделювання, результати якого підтверджують аналітичні розрахунки.

У роботі [4] розглянуто функціонування сотової мережі зв'язку як СМО з множинними заявками, що мають випадкову кількість імпульсів.

Отже, аналіз досліджень вказує на практичну актуальність СМО з множинними заявками.

Постановка завдання

На обслуговування надходить пуассонівський потік початкових заявок, з кожною з яких утворюється випадкова множина імпульсів. Причому кількість імпульсів та їх тривалість є довільно зв'язаними випадковими величинами.

Випадкову множину імпульсів, що породжені деякою початковою заявкою, будемо називати складною або множинною заявкою.

Множини імпульсів різних складних заявок є незалежними. Крім того, вони не залежать від розташування моменту початкової заявки на прямій часу. Унаслідок перекриття складних заявок можливі деякі інформаційні втрати.

Мета роботи – по-перше, оцінити ймовірність перетину складних заявок, по-друге, визначити умови еквівалентної заміни СМО з множинними заявками СМО з одиночними заявками.

Для розв'язання цих проблем було розроблено алгоритм обчислення «інтервалу перетину» двох множин імпульсів та доведено теорему еквівалентності потоків з множинними і одиночними заявками.

Алгоритм визначення довжини «інтервалу перетину» двох множин

Нехай задано дві числові множини

$$U=\bigcup_{i=1}^{\nu}(a_i,b_i),\ V=\bigcup_{k=1}^{\mu}(c_k,d_k),$$

$$0=a_1<b_1<a_2<\ldots<b_\nu,$$

$$0=c_1<d_1<c_2<\ldots<d_\mu,$$

де ν, μ – натуральні числа.

«Інтервалом перетину» (*і.п.*) множин U та V назвемо множину таких чисел τ будь-якого знаку, для яких множина U має хоча б одну точку перетину з множиною:

$$V+\tau=\bigcup_{k=1}^{\mu}\left(c_k+\tau,d_k+\tau\right).$$

Запропонуємо алгоритм обчислення лебегової міри T_{UV} «інтервалу перетину».

Якщо цей інтервал складається з декількох інтервалів, що не перетинаються, то T_{UV} буде їх сумарною довжиною:

$$"I.n."=\bigcup_{i=1}^{\nu}\bigcup_{k=1}^{\mu}\bigcup_{\tau}\left\{\tau:\left(a_i,b_i\right)\cap\left(c_k+\tau,d_k+\tau\right)\neq\varnothing\right\}.$$

Для довільно заданих *i* та *k* дослідимо, для яких *τ* виконується така умова*:*

$$\left(a_i,b_i\right)\cap\left(c_k+\tau,d_k+\tau\right)\neq\varnothing$$

Найменше допустиме значення τ – те, за якого $\left(c_k+\tau,d_k+\tau\right)$ примикає до $\left(a_i,b_i\right)$ зліва, найбільше – коли справа.

Відповідно

$$d_k+\tau=a_i;$$

$$c_k+\tau=b_i.$$

Таким чином, τ повинно входити в інтервал

$$W_{ik}=\left(a_i-d_k,b_i-c_k\right).$$

Довжина такого інтервалу для *τ* становить

$$T_{ik}=\left(b_i-a_i\right)+\left(d_k-c_k\right). \quad (1)$$

Підсумовуючи вираз (1) за всіма *i* та *k*, отримаємо

$$T_{UV}\le\sum_{i,k}\left[\left(b_i-a_i\right)+\left(d_k-c_k\right)\right]=$$

$$=\mu\sum_{i=1}^{\nu}\left(b_i-a_i\right)+\nu\sum_{k=1}^{\mu}\left(d_k-c_k\right). \quad (2)$$

Якщо лебегову міру множини позначити |·|, то вираз (2) можна переписати таким чином:

$$T_{UV}\le\mu\left|U\right|+\nu\left|V\right|. \quad (3)$$

У багатьох випадках оцінка (3) або абсолютно точна, або має малу відносну похибку, тому наведемо алгоритм точного обчислення величини T_{UV}.

Покладемо

$$\begin{aligned}\tau_{ik}&=a_i-d_k;\\ \tau'_{ik}&=b_i-c_k.\end{aligned} \quad (4)$$

Розглянемо множину

$$S=\bigcup_{i=1}^{\nu}\bigcup_{k=1}^{\mu}\left\{\tau_{ik},\tau'_{ik}\right\}$$

та впорядкуємо ці числа, перепозначивши їх $x_1\le x_2\le\ldots\le x_{2\nu\mu}$.

Очевидно, x_1 – це деяке τ_{ik}, $x_{2\nu\mu}$ – деяке τ'_{ik}.

Якщо $x_j\in\left\{\tau_{ik}\right\}$, покладемо $\omega_j=1$, якщо $x_j\in\left\{\tau'_{ik}\right\}$, то $\omega_j=-1$.

Оскільки $a_i<b_i, c_k<d_k$, то для будь-якого j або $\omega_j=1$, або $\omega_j=-1$. Тоді шукане T_{UV} можна обчислити за формулою

$$T_{UV}=\sum_{j=1}^{2\nu\mu-1}\left(x_{j+1}-x_j\right)\operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^{j}\omega_i\right), \quad (5)$$

де

$$\operatorname{sgn}a=\begin{cases}1, & \text{якщо } a>0,\\ 0, & \text{якщо } a=0,\\ -1, & \text{якщо } a<0.\end{cases}$$

Розглянемо формулу (5).

До моменту x_j включно почалося стільки інтервалів $\left(\tau_{ik},\tau'_{ik}\right)$, скільки одиниць у ряду $\omega_1,\ldots,\omega_j$, та закінчилось стільки, скільки мінус одиниць.

Отже, x_j належить деякому з цих інтервалів тоді і тільки тоді, коли $\sum_{i=1}^{j}\omega_i>0$, тобто $\operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^{j}\omega_i\right)=1$.

Але тоді довжину інтервалу (x_j, x_{j+1}) необхідно включати в суму, що й показано в формулі (5).

Якщо ні, то $\operatorname{sgn}(\cdot)=0$, а sgn $(\cdot)$ = 1 взагалі бути не може. Алгоритм обґрунтований.

Модифікація алгоритму знаходження довжини «інтервалу перетину» двох множин

Назвемо (a_i, b_i) U-імпульсами, (c_k, d_k) – V-імпульсами. На практиці потрібно розрізняти випадки, коли U-імпульс починається всередині V-імпульсу, тобто

$$c_k+\tau<a_i<d_k+\tau,$$

або коли V-імпульс починається всередині U-імпульсу, тобто

$$a_i<c_k+\tau<b_i .$$

У першому випадку міру «інтервалу перетину» позначимо $T_{U/V}$, в другому $T_{V/U}$.

Ці величини обчислюють за наведеним алгоритмом тільки з тією зміною, що τ_{ik}, τ'_{ik} потрібно задавати не формулою (4), а іншим способом.

У першому випадку, тобто для обчислення $T_{U/V}$, маємо

$$\tau_{ik}=a_i-d_k;$$

$$\tau'_{ik}=a_i-c_k,$$

у другому випадку:

$$\tau_{ik}=a_i-c_k;$$

$$\tau'_{ik}=b_i-c_k.$$

У цьому і полягає модифікація алгоритму.

Сумуючи по i та k, маємо

$$T_{U/V}\le\sum_{i,k}(\tau'_{ik}-\tau_{ik})=\sum_{i,k}(d_k-c_k),$$

або

$$T_{U/V}\le\nu|V|. \qquad (6)$$

Аналогічно

$$T_{V/U}\le\mu|U|. \qquad (7)$$

Оскільки $T_{UV}\le T_{V/U}+T_{U/V}$, то з виразів (6), (7) знову можемо отримати оцінку (3).

Оцінка ймовірності перекриття складних заявок

Розглянемо пуассонівський потік складних заявок с параметром λ. Із кожною заявкою асоціюється випадкова множина

$$U=\bigcup_{i=1}^{\nu}(a_i,b_i),$$

$$0=a_1<b_1<a_2<\ldots<b_\nu .$$

Випадкові величини ν, a_i, b_i визначаються загальною елементарною подією

$\omega\in\Omega$,

де Ω – простір елементарних подій.

Елемент ω реалізується за мірою $P(A)$ на деякій σ- алгебрі подій ξ.

Будемо вважати, що існує алгоритм, який дозволяє знаходити реалізації множини U.

Якщо t – момент надходження складної заявки, то множину U розташуємо на вісі часу з початком в моменті t.

Імовірності q перекриття між даним та іншим деяким імпульсом обчислюють методом Монте-Карло.

Гіпотетичний «заважаючий» імпульс позначимо V. Тоді

$$q=q_{UV},$$

$$q=q_{U/V},$$

$$q=q_{V/U},$$

$$q=q_{U/V}^{(\Delta)},$$

$$q=q_{V/U}^{(\Delta)}$$

де q_{UV} – імовірність перекриття хоча б одного U-імпульсу з одним V-імпульсом;

$q_{U/V}$ – імовірність початку хоча б одного U-імпульсу під час V-імпульсу;

$q_{V/U}$ – імовірність початку хоча б одного V-імпульсу під час U-імпульсу;

$q_{V/U}^{(\Delta)}$ – імовірність початку U-імпульсу під час V-імпульсу з урахуванням продовження на час Δ;

$q^{(\Delta)}_{V/U}$ – імовірність початку *V*-імпульсу під час *U*-імпульсу з урахуванням продовження на час Δ.

Позначимо λ^* інтенсивність потоку «забитих» заявок. Тоді з теорії Хінчина потоків однорідних подій [5] маємо

$$q = \frac{\lambda^*}{\lambda}.$$

Подія появи в інтервалі довжини dt заявки, якій призначено бути «забитою», дорівнює перетину двох подій:

– поява в інтервалі $(t_0, t_0 + dt)$ заявки з випадковою множиною *U*;

– поява в інтервалі $(t_0 + \tau, t_0 + \tau + d\tau)$ заявки з випадковою множиною *V*.

Множники *U* та *V* незалежні, *U* та $V + \tau$ перетинаються. Якщо *U* та *V* зафіксувати, то ймовірність перетину вказаних двох подій дорівнює $\lambda dt \lambda d\tau$ при перетині *U* з $V + \tau$ або нулю в протилежному випадку.

Інтегруючи за всіма τ, отримуємо $\lambda^2 T_{UV} dt$. Усереднюючи по *V* та *U* (ними визначається *T*), виводимо формулу

$$\lambda^* \le \lambda^2 MT_{UV},$$

звідки

$$q_{UV} \le \lambda MT_{UV}. \quad (8)$$

Аналогічні оцінки отримаємо й при інших визначеннях перекриттів імпульсів:

$$q_{U/V} \le \lambda MT_{U/V}; \quad (9)$$

$$q_{V/U} \le \lambda MT_{V/U}; \quad (10)$$

$$q^{(\Delta)}_{U/V} \le \lambda MT^{(\Delta)}_{U/V}; \quad (11)$$

$$q^{(\Delta)}_{V/U} \le \lambda MT^{(\Delta)}_{V/U}. \quad (12)$$

Множники *V* та *U* повинні бути незалежні, тобто генеруватися на основі незалежних елементів ω_1 та ω_2 з розподілом $P(A)$.

Маючи алгоритм побудови випадкової множини *U* (той самий для *V*) та застосовуючи алгоритм знаходження довжини «інтервалу перетину» двох множин, знаходимо реалізацію випадкової величини T_{UV} або аналогічних їй. Потім шляхом усереднювання знаходимо оцінку T_{UV}, а далі за цією оцінкою та за формулами (8)–(12) оцінку q, $q_{U/V}$, $q_{V/U}$, $q^{(\Delta)}_{U/V}$, $q^{(\Delta)}_{V/U}$.

Визначення τ-обмежених систем

Кожна СМО в абстрактному уявленні є випадковим оператором, що перетворює вхідний потік заявок у деяку функцію часу, яка характеризує роботу СМО.

Так, позначимо $X(t)$ кількість заявок, що надійшли в систему на інтервалі $(0,\ t)$, якщо $t > 0$, та мінус кількість заявок в інтервалі $(t,\ 0)$, якщо $t \le 0$.

Наприклад, $W(t)$ – віртуальний час чекання в момент t, тобто, якщо в момент t надходить уявна заявка, то її час чекання буде дорівнювати $W(t)$:

$$W(t) = A_t\left[X(s),\ -\infty < s \le t\right],$$

де A_t – оператор, що перетворює одну функцію в іншу (значення цієї другої функції в момент t).

Це випадковий оператор, оскільки $W(t)$ залежить не тільки від потоку, але і від часу обслуговування заявок, що надійшли. Дамо математичне означення.

Нехай маємо СМО, що характеризується процесом $W(t)$ (це не обов'язково час чекання), як оператором вхідного потоку $X(t)$.

Позначимо $L_X[W(t)]$ – закон розподілу $W(t)$ (сукупність скінченновимірних розподілів) випадкового процесу $W(t)$ при заданій траєкторії процесу $X(t)$.

Означення. Систему масового обслуговування назвемо системою з τ- обмеженою післядією, якщо для будь-яких траєкторій $X_1(t)$ та $X_2(t)$ процесу $X(t)$, збіжних при $t_0 - \tau \le t \le t_1$, спостерігається рівність

$$\mathrm{L}_{X1}\left[W(t)\right] = \mathrm{L}_{X2}\left[W(t)\right]$$

для скінченновимірних розподілів, що відносяться до значень процесу $W(t)$ на відрізку $t_0 \le t \le t_1$.

Розглянемо СМО з нескінченною кількістю каналів. Нехай $W(t)$ – випадковий процес, що описує роботу такої СМО. Випадковий потік заявок подамо множиною імпульсів, тобто кодуватимемо послідовністю (t_n,η_n), де t_n – момент надходження n-ї заявки (початок n-го імпульсу), η_n – довжина n-го імпульсу (час обслуговування n-ї заявки). Очевидно, що $W(t)$ є (вже не випадковий) оператор від потоку (t_n,η_n).

Теорема. Нехай $\eta_n \le \tau$ з імовірністю одиниця. Тоді ця СМО є системою з τ-обмеженою післядією.

Твердження теореми випливає з того, що за умовою $\eta_n \le \tau$, а отже, в будь-який момент t у системі можуть бути присутні тільки ті імпульси, які надійшли на відрізку $[t-\tau,t]$. Це визначає властивість τ-обмеженості післядії.

Для СМО з τ-обмеженою післядією розподіл $W(t)$ (процесу, що визначає якість роботи системи) залежить від моментів надходження імпульсів на відрізку $[t-\tau,t]$ та довжин цих імпульсів.

Розглянемо таку постановку задачі. Існує потік незв'язних (групових) імпульсів, для якого $W(t)$ має деякий розподіл $\mathrm{L}[W(t)]$.

Визначимо, чи можна підібрати еквівалентний потік одиночних імпульсів, за якого $\mathrm{L}[W(t)]$ залишиться незмінним.

Нехай задано тимчасовий інтервал довжини τ. Під скінченновимірним розподілом імпульсного потоку в межах цього інтервалу будемо розуміти одновимірні та багатовимірні розподіли, які пов'язані з такими величинами:

– кількістю імпульсів, що почалися в цьому інтервалі;

– моментами початку цих імпульсів;

– моментами закінчення імпульсів, завмирання та відновлення, якщо ці моменти в межах інтервалу.

Зокрема, є рівність (8) для X_1 та X_2, що збігіються на відрізку $[t-\tau,t]$.

Отже, поняття τ-обмеженості означає, що стан СМО в момент t залежить тільки від потоку заявок в інтервалі $[t-\tau,t]$ і не залежить від більш ранніх або більш пізніх заявок.

Означення. Система масового обслуговування, що не є СМО з τ-обмеженою післядією ні при якому $\tau>0$, назвемо СМО з τ-необмеженою післядією.

Означення системи з τ-обмеженою післядією показує, що такими системами оперувати значно простіше, оскільки на обмеженому інтервалі (довжини τ) може відбутися тільки скінченна кількість подій.

Означення. Два імпульсних потоки, скінченновимірні розподіли яких збігаються на інтервалах довжини не більше за τ, назвемо τ- еквівалентними.

Теорема про τ-еквівалентності потоку множинних імпульсів та потоку одиночних імпульсів. Нехай X – пуассонівський із параметром λ стаціонарний потік множинних імпульсів. У кожному множинному імпульсі – випадкове число ν одиночних імпульсів зі скінченним математичним сподіванням $\bar{\nu}$.

Одиночні імпульси, що входять в один множинний імпульс, починаються через інтервали, більші за $\tau+\tau_1$, а час існування будь-якого одиночного імпульсу не більше τ_1.

За цих умов потік X τ-еквівалентний пуассонівському потоку з параметром $\lambda\bar{\nu}$ одиночних імпульсів. Функція розподілу $B(t)$ довжини імпульсу еквівалентного потоку зв'язана з характеристиками початкового потоку X формулою

$$B(t)=\frac{1}{\bar{\nu}}\sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu\left(B_{\nu 1}(t)+B_{\nu 2}(t)+\ldots+B_{\nu\nu}(t)\right),$$

де p_v – імовірність часткового значення v;

$B_{\nu k}(t)$ – функція розподілу довжини k-го одиничного імпульсу в множинному імпульсі, який включає v одиничних імпульсів.

Позначимо

$$b = \int_0^\infty t dB(t).$$

Доведення. Зважаючи на стаціонарність імпульсного процесу, можна вважати, що розглянутий інтервал $(0, \tau)$.

Із умов теореми випливає, що в інтервалі $(-\tau_1, \tau)$ може початися максимум один одиночний імпульс кожного даного множинного імпульсу. Через ξ позначили загальну кількість одиночних імпульсів, які існують в інтервалі $(0, \tau)$, та

$$\varphi_{\tau,n}(t_1, t_2, ..., t_n; x_1, x_2, ..., x_n) dt_1 dt_2 ..., dt_n$$

імовірність такої складної події:

1) $\xi = n$;

2) моменти початків одиночних імпульсів належить інтервалам

$$(t_1, t_1 + dt_1), (t_2, t_2 + dt_2), ..., (t_n, t_n + dt_n),$$
$$(-\tau_1 \le t_1 < ... < t_n \le \tau);$$

3) довжини цих імпульсів менші

$$x_1, x_2, ..., x_n.$$

Оскільки за пуассонівського потоку множинні імпульси зароджуються незалежно, то

$$\varphi_{\tau,n}(....) dt_1 dt_2 ... dt_n = c\chi_{\tau,n}(...) dt_1 dt_2 ... dt_n,$$

де c – імовірність відсутності початку інших імпульсів в інтервалі $(0, \tau)$;

$\chi_{\tau,n}(...) dt_1 dt_2 ... dt_n$ – ймовірність існування імпульсів з указаними властивостями безвідносно до інших імпульсів, наприклад, проміжних між ними.

Через незалежне зародження імпульсів

$$\nu_{\tau,n}(t_1, t_2, ..., t_n; x_1, x_2, ..., x_n) dt_1 dt_2 ..., dt_n =$$
$$= \chi_{\tau,1}(t_1; x_1) dt_1 \chi_{\tau,1}(t_2; x_2) dt_2 ... \chi_{\tau,1}(t_n; x_n) dt_n. \quad (13)$$

Із формули (13) випливає, що достатньо визначити $\chi_{\tau,1}(t; x) dt$.

Ця ймовірність дорівнює інтервалу ймовірностей елементарних подій такого вигляду:

– в інтервалі $(s, s + ds)$, що передує інтервалу $(t, t + dt)$, зароджується множинний імпульс, що складається з конкретного числа v одиночних імпульсів;

– в інтервал $(t, t + dt)$ потрапляє число k-го одиночного імпульсу цього множинного імпульсу;

– довжина вказаного одиночного імпульсу не більша за x.

Отже:

$$\chi_{\tau,1}(t; x) dt = \int_{-\infty}^{t} \lambda ds \sum_{v=1}^{\infty} p_v \sum_{k=1}^{v} a_{\nu k}(t - s) B_{\nu k}(x) dt, \quad (14)$$

де $a_{\nu k}(x)$ – щільність розподілу часу початку k-го одиночного імпульсу після початку множинного імпульсу.

Зокрема, $a_{\nu 1}(x) = \delta(x)$ – дельта-функція.

Оскільки

$$\int_0^\infty a_{\nu k}(x) dx = 1,$$

то з рівняння (14) отримуємо

$$\chi_{\tau,1}(t; x) = \lambda \sum_{v=1}^{\infty} p_v \sum_{k=1}^{v} B_{\nu k}(x) = \lambda \bar{v} B(x). \quad (15)$$

Підстановка рівняння (15) у формулу (13) дає

$$\chi_{\tau,n}(t_1, t_2, ..., t_n; x_1, x_2, ..., x_n) dt_1 dt_2 ... dt_n =$$
$$= (\lambda \bar{v})^n B(x_1) B(x_2) ... B(x_n) \times dt_1 dt_2 ... dt_n.$$

Це відповідає пуассонівському потоку одиночних імпульсів, довжина яких має розподіл $B(x)$. Теорему доведено.

Константа c визначається тим, що імовірнісна міра всього простору дорівнює одиниці:

$$1 = c \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(\lambda \bar{v} b)^k}{k!},$$

звідки $c = e^{-\lambda \bar{v} b}$.

Остаточна формула для $\varphi_{\tau,n}$:

$$\varphi_{\tau,n}\left(t_1,t_2,...,t_n;x_1,x_2,...,x_n\right)dt_1dt_2...dt_n =$$

$$= e^{-\lambda\bar{v}b}\left(\lambda\bar{v}\right)^n B\left(x_1\right)B\left(x_2\right)...B\left(x_n\right).$$

Інтегруванням по $t_1,t_2,...,t_n$ та переходом до границі при $x_k \to \infty$, $1 \le k \le n$ отримуємо формулу

$$P\{\xi = n\} = e^{-\lambda\bar{v}b}\frac{\left(\lambda\bar{v}b\right)^n}{n!}.$$

Висновки

Запропонований метод оцінки ймовірності перетину заявок не відноситься до очевидних, оскільки він заснований не на розрахунку можливого перетину випадкових множин, що майже малоймовірно, а на розробленому алгоритмі «протяжки» однієї множини імпульсів через іншу. Це спрощує оцінювання показників функціонування систем із множинним доступом і потоком множинних заявок.

Іншим спрощеним методом дослідження таких СМО є заміна потоку СМО з множинними заявками потоком з одиночними заявками.

Було знайдено достатні умови такої заміни, в процесі доведення введено поняття системи з τ-обмеженою післядією та τ-еквівалентних потоків.

Література

1. *Бочаров П.П.* Теория массового обслуживания / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин. – М.: РУДН, 1995. – 529 с.

2. *Коба Е.В.* Оценка вероятности наложения сигналов бортовых ответчиков методом статистического моделирования / Е.В. Коба // Повышение эффективности автоматизированных систем управления: сб. науч. тр. – К.: КИИГА, 1992. – С. 23–26.

3. *Коба Е.В.* Система обслуживания пуассоновского потока сдвоенных заявок / Е.В. Коба // Доп. НАН України. – 1995. – №3. – С. 9–11.

4. *Дишлюк О.М.* Модель процесу обслуговування викликів в сотових мережах зв'язку / О.М. Дишлюк // зб. тез III Міжнар. наук.-техн. конф. «Комп'ютерні системи та мережні технології» (CSNT-2010). – К.: НАУ-друк, 2010. – С. 35.

5. *Хинчин А.Я.* Работы по математической теории массового обслуживания / А.Я. Хинчин. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. – 235 с.

Стаття надійшла до редакції 17.01.2011.