

## СУЧАСНІ АВІАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 539.3

**В.В. Астанін**, д-р техн. наук, проф.  
**М.М. Бородачов**, д-р техн. наук, проф.  
**С.Ю. Богдан**, канд. техн. наук, доц.

### АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПЛАСТИНИ В УМОВАХ УДАРНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

*Розглянуто задачу про напружено-деформований стан пластинки від дії динамічного ударного навантаження з різним рівнем інтенсивності ударного імпульсу із застосуванням методу скінченних елементів.*

*The problem concerning the stress-strain state of a plate under load impact with various intensity levels of collision momentum applying finite-element method was considered.*

#### Постановка проблеми

Розглянемо тонку прямокутну пластинку, серединна площина якої лежить у площині  $xOy$ , а вісь  $z$  напрямлена вниз (рис. 1).

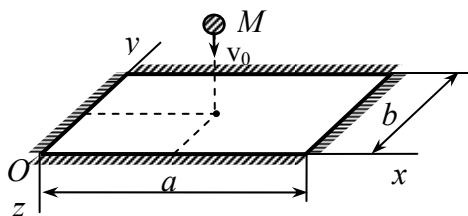


Рис. 1. Розрахункова схема задачі

У цьому разі переміщення  $w$  у напрямку осі  $z$  являє собою прогин пластинки. Нехай пластинка защемлена по контуру.

Якщо  $t \leq 0$ , то пластинка перебуває у ненапруженому та недеформованому стані, а в момент часу  $t = 0$  зазнає зіткнення з вантажем, який має масу  $M$  і швидкість  $v_0$ .

Вектор швидкості  $v_0$  напрямляємо перпендикулярно до серединної площини пластинки. Тобто розглядаємо задачу про удар вантажу по пластинці в точці з координатами  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = \frac{b}{2}$ .

#### Основні положення дослідження

Диференціальне рівняння змущених поперечних коливань пластинки має вигляд

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t), \quad (1)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

$$m = \frac{\gamma h}{g},$$

де  $D$  – циліндрична жорсткість пластинки;

$w$  – прогин;

$m$  – маса одиниці площі пластинки;

$q(x, y, t)$  – інтенсивність навантаження;

$E$  – модуль Юнга;

$h$  – товщина пластинки;

$\nu$  – коефіцієнт Пуассона;

$\gamma$  – питома вага матеріалу пластинки;

$g$  – прискорення вільного падіння.

Вихідні умови задачі

$$w = 0 \text{ та } \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \text{ якщо } t = 0. \quad (2)$$

Унаслідок защемлення пластинки вздовж контуру граничні умови будуть мати вигляд:

$$w = 0 \text{ та } \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \text{ якщо } x = 0 \text{ та } x = a; \quad (3)$$

$$w = 0 \text{ та } \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \text{ якщо } y = 0 \text{ та } y = b.$$

Отримати точний аналітичний розв'язок рівняння (1), яке б задовольняло початкові умови (2) та граничні умови (3), майже неможливо. Тому для розв'язання поставленої задачі доцільно застосувати наближені аналітичні або числові методи.

У цій роботі для розв'язання поставленої задачі про удар вантажу по пластинці застосуємо числовий спосіб, який ґрунтується на використанні методу скінченних елементів (МСЕ).

Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки від удару має вигляд

$$M(v_1 - v_0) = \sum S_j, \quad (4)$$

де  $v_0$ ,  $v_1$  – відповідно швидкість вантажу, що ударяє, на початку та в кінці удару.

Зміна кількості руху матеріальної точки за час удару дорівнює сумі діючих на точку ударних імпульсів  $S_j$ .

Формулу (4) у проекції на вісь  $z$  можна подати у вигляді:

$$M(1+k)v_{0z} = \sum S_{jz}, \quad (5)$$

де  $k$  – коефіцієнт відновлення під час удару.  
Ударний імпульс

$$S_{уд} = \int_0^{\tau} F_{уд} dt = F_{уд}^{сеп} \tau, \quad (6)$$

де  $F_{уд}$  – ударна сила;  
 $\tau$  – час дії імпульсу.  
Зазвичай припускають, що

$$\tau = 2,5T_1 = 2,5 \frac{2\pi}{\omega_1}, \quad (7)$$

де  $\omega_1$  – перша колова частота вільних коливань пластинки.

На основі формул (5)–(7) маємо

$$F_{уд(z)}^{сеп} = \frac{M(1+k)v_{0z}}{\tau}. \quad (8)$$

У формулі (8) припускається, що був один удар (без повторень).

За формулою (8) визначаємо ударну силу, яку потрібно прикласти до пластинки протягом відрізку часу  $\tau$ .

У цьому випадку інтенсивність навантаження  $q(x,y,t)$ , яка входить у рівняння (1), буде мати такий вигляд:

$$q(x,y,t) = F_{уд(z)}^{сеп} \delta\left(x - \frac{a}{2}\right) \delta\left(y - \frac{b}{2}\right) \varphi(t),$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & \text{якщо } t > \tau, \end{cases}$$

де  $\delta(x)$  – дельта-функція.

Поставлену задачу будемо розв'язувати МСЕ за допомогою програмного комплексу Ліра 9.4. Цей комплекс ґрунтується на МСЕ у вигляді методу переміщень.

Реалізований метод розв'язання динамічної задачі полягає в поєднанні МСЕ з розкладанням за формами коливань.

Теорії ударного навантаження конструкцій присвячено монографії [1–3].

Останні результати стосовно розрахунків на удар містяться у працях [4–9].

### Приклад розрахунку пластинки під час удару матеріальної точки

Розроблена методика ілюструється прикладом розрахунку сталюї пластинки, розрахункову схему якої зображено на рис. 2.

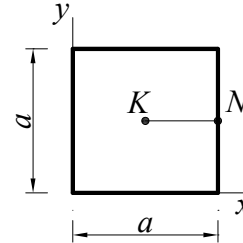


Рис. 2. Розрахункова схема пластинки

Виконано аналіз напружено-деформованого стану конструктивного елемента від дії динамічного ударного навантаження з різним рівнем інтенсивності ударного імпульсу сталої форми із застосуванням МСЕ.

Пластинка зі сторонами  $a = 1$  м і товщиною  $h = 1,25$  см виготовлена з низьковуглецевої сталі з такими характеристиками:

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$\nu = 0,28;$$

$$\gamma = 77 \text{ кН/м}^3.$$

Пластинку, що жорстко закріплена вздовж контуру, моделювали рівномірною скінченно-елементною сіткою (кількість скінченних елементів – 100, кількість вузлів сітки – 121).

Удар вантажу об пластинку відбувався в точці  $K$  з координатами

$$x = y = \frac{a}{2} = 0,5 \text{ м.}$$

Ураховували власні колові частоти вільних коливань пластинки:

$$\omega_1 = 692,772 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_2 = \omega_3 = 1408,08 \text{ с}^{-1}.$$

Час дії ударного імпульсу розглядали за першої колової частоти вільних коливань пластинки  $\tau = 0,023$  с.

Під час аналізу результатів обчислень враховували симетричний розподіл напружено-деформованого стану елемента.

Для розглядуваної пластинки за маси вантажу  $M = 3$  кг та початкової швидкості удару  $v_{0z} = 20$  м/с наведено епюри розподілу інтенсивності прогинів  $w$ , згинальних моментів  $M_x$  і поперечних сил  $Q_x$  у вузлах серединної площини пластинки (рис. 3), а також епюри головних  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  і еквівалентного  $\sigma_{екв}$  напружень у вузлах нижнього шару пластинки (рис.4) у перерізі  $KN$ .

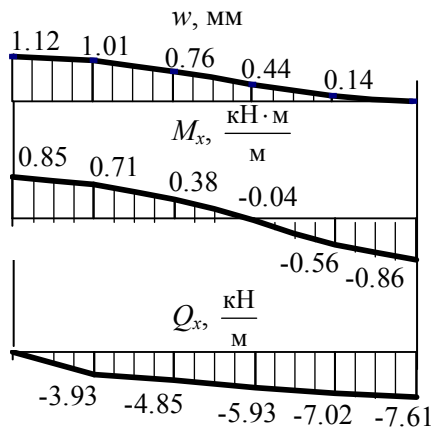


Рис. 3. Епюри розподілу інтенсивності прогинів  $w$  та зусиль  $M_x, Q_x$  у перерізі  $KN$

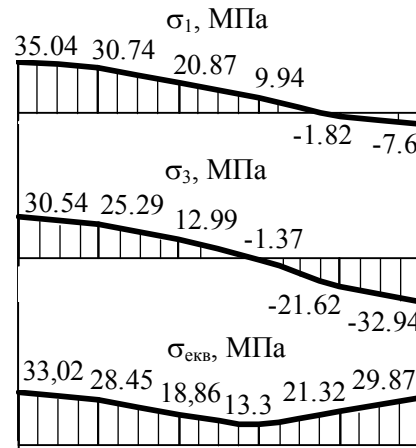


Рис. 4. Епюри розподілу напружень у перерізі  $KN$

Результати аналізу напружено-деформованого стану пластинки від дії динамічного ударного навантаження з різним рівнем інтенсивності ударного імпульсу подано у вигляді побудови функціональних залежностей рівня еквівалентних напружень  $\sigma_{екв}$  та прогинів  $w$  в зоні екстремальних значень у точці  $K$  від маси вантажу, що здійснює удар об пластинку (рис. 5).

Під час дослідження впливу форми імпульсу на напружено-деформований стан конструктивного елемента враховували лінійні (рис. 6,  $a, б, в$ ) та криволінійні (рис. 6,  $з, д$ ) залежності імпульсного навантаження  $F = f(t)$ .

Епюри інтенсивності прогинів  $w$  та еквівалентних напружень  $\sigma_{екв}$  у перерізі  $KN$  пластинки для різних форм імпульсу показано на рис. 7 за маси вантажу  $M = 3$  кг та початкової швидкості удару  $v_{0z} = 20$  м/с відповідно.

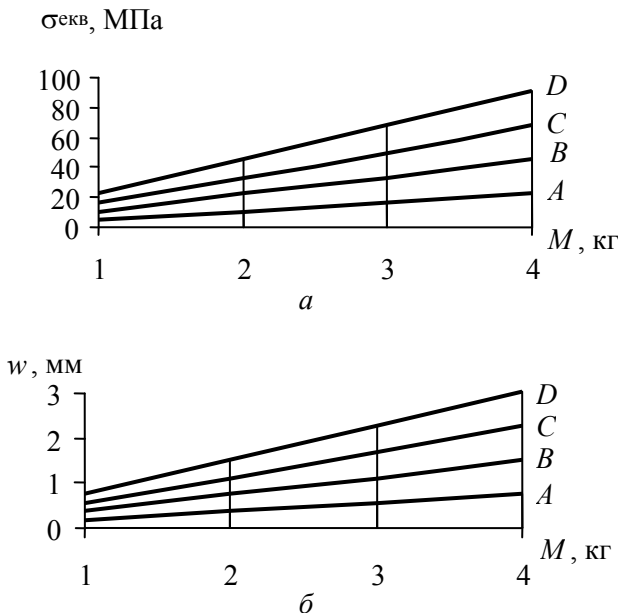


Рис. 5. Залежності  $\sigma_{екв} = f(M)$  та  $w = f(M)$  за варіації початкової швидкості удару  $v_{0z}$  у точці  $K$ :

- $a - \sigma_{екв} = f(M)$ ;
- $б - w = f(M)$ ;
- $A - 10$  м/с;
- $B - 20$  м/с;
- $C - 30$  м/с;
- $D - 40$  м/с

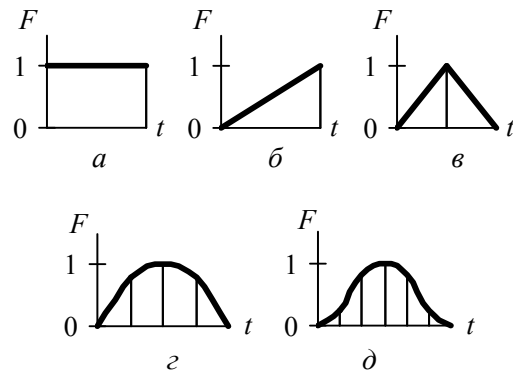


Рис. 6. Форми імпульсу:  $a, б, в$  – лінійні залежності;  $з, д$  – криволінійні залежності

Для форми імпульсу, показаної на рис. 6,  $a$ :

- $w_{max} = 1,12$  мм;
  - $\sigma_{екв max} = 33,02$  МПа,
- на рис. 6,  $б$ :
- $w_{max} = 1,14$  мм;
  - $\sigma_{екв max} = 33,40$  МПа,
- на рис. 6,  $в$ :
- $w_{max} = 1,28$  мм;
  - $\sigma_{екв max} = 37,81$  МПа,
- на рис. 6,  $з$ :
- $w_{max} = 1,20$  мм;
  - $\sigma_{екв max} = 35,56$  МПа

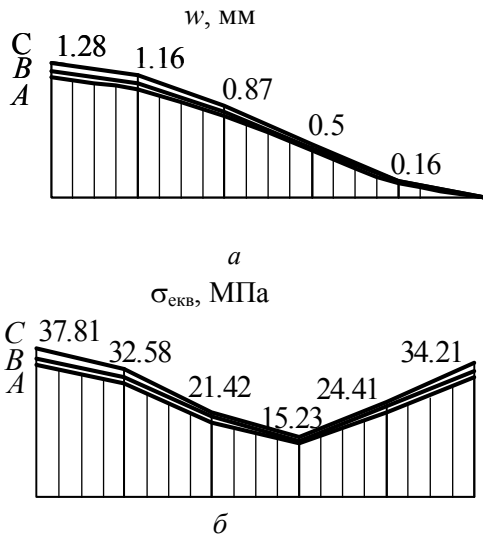


Рис. 7. Епюри розподілу інтенсивності прогинів (а) та еквівалентних напружень (б) у перерізі  $KN$  за формами імпульсу:

$A$  – рис. 6, б;  
 $B$  – рис. 6, з;  
 $C$  – рис. 6, в

### Приклад розрахунку пластинки під час удару масивного тіла

Розглянуто також пластинку, яку ударяє тіло скінченних розмірів.

Площина удару  $40 \times 40$  см.

Величина інтенсивності імпульсного навантаження та маса тіла, що ударялось, розподілялися відповідно по площі ударної взаємодії.

Виконано аналіз напружено-деформованого стану конструктивного елемента за сталої форми інтенсивності ударного імпульсу.

Значення найбільшого прогину в точці  $K$  зменшилася до  $w_{\text{max}} = 0,831$  мм. Епюру розподілу інтенсивності прогинів по поверхні пластини показано на рис. 8.

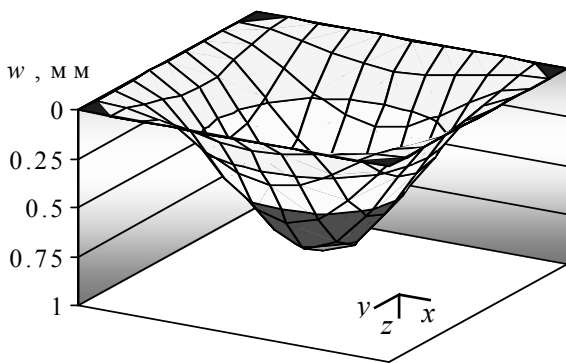


Рис. 8. Епюра прогинів пластини

Найбільше еквівалентне напруження в цьому випадку виникає в точці  $N$  (рис. 2) і становить  $\sigma_{\text{екв. max}} = 23,25$  МПа, що свідчить про перерозподіл найбільшої інтенсивності напружень до зовнішнього контуру пластини.

Епюру розподілу інтенсивності еквівалентних напружень  $\sigma_{\text{екв}}$  на відрізку  $KN$  пластини зображено на рис. 9.

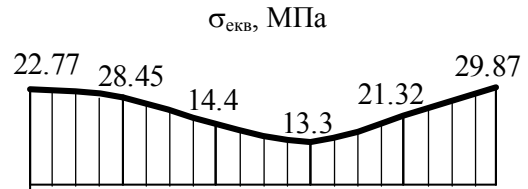


Рис. 9. Епюра еквівалентних напружень у перерізі  $KN$

### Приклад розрахунку пошкодженої пластинки внаслідок ударних навантажень

У практиці експлуатації листових конструктивних елементів актуальними є питання утворення пошкоджень на поверхні конструкцій унаслідок корозії матеріалу та з інших причин. Подібні пошкодження часто виникають в авіаційній, наземній та військовій техніці.

Більшого значення ця проблема набуває у випадках динамічних навантажень, наприклад, у разі удару пошкоджених листових конструкцій тілами зі значною інтенсивністю ударного імпульсу внаслідок великої маси тіла або швидкості удару. Аналіз напружено-деформованого стану пластинки з пошкодженням у центрі, площею  $40 \times 40$  см і товщиною  $h = 0,5$  см, зі сталою інтенсивністю ударного імпульсу, ілюструється епюрами прогинів (рис. 10, а) та еквівалентних напружень (рис. 10, б) у перерізі  $KN$ .

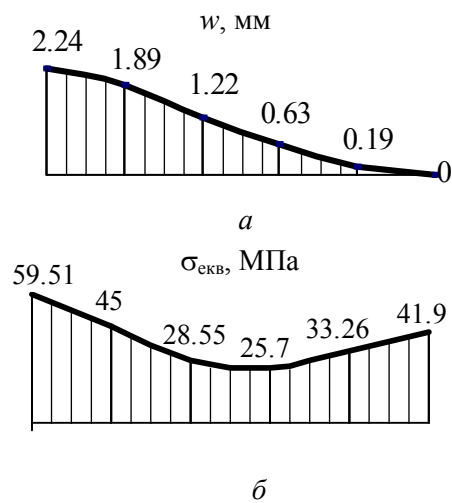


Рис. 10. Епюри розподілу інтенсивності прогинів (а) та еквівалентних напружень (б) у перерізі  $KN$  пошкодженої пластини

## Висновки

За результатами досліджень, виконаних на основі поданої методики, можна сформулювати такі положення.

1. Запропоновано ефективну методику, яка дозволяє ефективно розв'язувати задачі ударної дії вантажу і ґрунтується на МСЕ і теорії удару для розрахунку пластинчастих конструкцій.

2. Досліджено вплив форми ударного імпульсу (розглянуто чотири випадки). При цьому виявлено, що найбільш небезпечною є форма ударного імпульсу, який показано на рис. 6, в.

3. Виконані розрахунки показали, що врахування розмірів тіла, яке здійснює удар, впливає на зменшення величин динамічних прогинів і еквівалентних напружень.

4. Досліджено вплив корозійних пошкоджень пластинки. Аналіз напружено-деформованого стану показав, що зі зменшенням товщини пластини в місці пошкодження на 40 % максимальні значення прогину збільшилися на 100,5 %, а еквівалентного напруження – на 80,2 %.

Подалі передбачається розвиток запропонованої методики для розв'язання подібних задач із врахуванням підкріплених ребер жорсткості. Отримані результати можна застосовувати в розрахунковій практиці для аналізу напружено-деформованого стану листових конструктивних елементів на дію ударного навантаження.

## Література

1. Гольдсмит В. Удар. – М.: Стройиздат, 1965. – 448 с.
2. Харрис С.М., Криз Ч.И. Справочник по ударным нагрузкам.: – Л.: Судостроение, 1980. – 359 с.
3. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
4. Акимов А.А. Пространственное моделирование соударения компактного элемента с преградой методом сглаженных частиц // 9-й Всерос. съезд по теории и прикладной механике: Аннотации докладов. Т. 3. – Нижний Новгород: НАГУ, 2006. – С. 11.
5. Радченко П.А. Численный анализ высокоскоростного взаимодействия анизотропных тел // Физика и химия наноматериалов: Сб. материалов междунар. шк. конф. – Томск, ТГУ, 2005. – С. 442–445.
6. Sburlati Roberta. An exact solution for the impact law in thick elastic plates // Int. J. Solids and Struct. – 2004. – 41, N 9 – 10. – P. 2539–2550.
7. Gao Zhen, Gu Yong-ning, Hu Zhi-giang. Impact strength analysis of ship hull. Shanghai Jiao Tong University, China. Chanbo lixue // J. Ship Mech. 2005. – 9, N 2. – P. 77–82.
8. Онищенко А.В. Повреждаемость пластин при действии ударных нагрузок // Материалы 4-й междунар. науч. конф. – Донецк: Юго-Восток ЛТД, 2006. – С. 283–285.
9. Орлов А.С., Шатров А.К. Расчетно-экспериментальная оценка нагружения космических аппаратов при высокоинтенсивных импульсных воздействиях // Вестн. Сиб. гос. аэрокосмического ун-та. – 2005. – № 6. – С. 153–155.

Стаття надійшла до редакції 27.09.07.