ІНФОРМАЦІЙНО-ДІАГНОСТИЧНІ СИСТЕМИ

УДК 519.652:519.254 (045)

П.О. Приставка, д-р техн. наук, доц.

ПОПОВНЕННЯ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ВІДЛІКІВ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ НА ОСНОВІ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ СПЛАЙНІВ

Для чотирикратного поповнення послідовностей відліків гладких функцій двох змінних подано лінійні оператори, отримані з використанням двовимірних локальних поліноміальних сплайнів на основі B-сплайнів підвищеної точності апроксимації, що є близькими до інтерполяційних у середньому.

This article is the solution of practical research of the polynomial splines of two variables based on the B-splines that, on average, are related to the interpolar. These splines allow us to get simple calculating schemes which are convenient for the practical application.

Постановка проблеми

Розвиток обчислювальної техніки стимулює удосконалення математичного апарату опрацювання дискретних даних. Порівняно громіздкі класичні методи апроксимації гладких функцій за подібними даними все менше задовольняють розробників програмного та апаратного забезпечення розв'язку задач стиснення та відтворення зображень, опрацювання сигналів тощо. Під час обробки растрових зображень, зокрема, даних фотозйомки, серед інших може постати завдання збільшення розміру вихідного зображення. Зазвичай подібна операція супроводжується обчисленнями на великих обсягах даних за результатом оцифровування, що містить файли графічних форматів. Наприклад, якісний цифрований знімок для друку фотографії формату А4-А3 містить приблизно 4 мегапіксели, а враховуючи, що біль-шість зображень виконано в кольоровому просторі sRGB, останню цифру слід потроїти за рахунок розкладу на складові червоного, зеленого та синього. Під час проведення аерофотозйомки кількість пікселів цифрованого зображення на порядок може перевищувати вказаний. Тому при масштабуванні растра актуальним є завдання вибору математичного забезпечення обробки, яке відповідало б вимогам високої апроксимації та швидкодії обчислень одночасно.

Аналіз досліджень

Останні кілька десятиріч активно розвивались методи, що базуються на обчислювальному аспекті, зокрема, вейвлети та процедури, засновані на бінарному поповненні послідовностей відліків гладких функцій. Щодо останніх, можна зазначити можливість їх отримання на підставі некласичних методів сплайн-апроксимації, зокрема, з використанням поліноміальних сплайнів, визначених на локальних носіях, для яких і обчислювальний апарат, і дослідження проведено досить розлого.

Задачі відтворення гладких функцій на основі лінійних комбінацій *B*-сплайнів висвітлено у багатьох роботах І. Шоенберга, К. Де Бора, М.П. Корнійчука та ін. Увагу поліноміальним сплайнам, визначеним на локальних носіях, близьким до інтерполяційних у середньому, приділено А.О. Лигуном [1] та в інших працях, зокрема [2]. Щодо методів, побудованих на бінарному поповненні послідовностей, то звертають увагу роботи [3−7], зокрема і за усередненими на інтервалах розбиття значеннями гладких функцій як однієї, так і двох змінних [2; 8−10]. Стосовно відтворення функцій за усередненими значеннями, на рівномірних розбиттях можна зазначити, що вибір як апарату апроксимації операторів, близьких до інтерполяційних, у середньому обумовлений більш високою стійкістю оцінки наближення за даними результатів вимірювань [1; 2].

Поставимо за мету у подальшому викладенні подати процедури чотирикратного поповнення двовимірних послідовностей відліків гладких функцій (двократного масштабування) на підставі алгоритмізації обчислювальних схем двовимірних сплайнів на основі *B*-сплайнів. У працях [2; 10] завдання масштабування на площині вирішується за рахунок ітераційних процедур бінарного поповнення двовимірних послідовностей. Проте обчислювальна складність такого підходу не може повною мірою задовольняти розробників програмного забезпечення з вимогою функціонування в режимі реального часу. За рахунок додаткових ітераційних циклів зростає кількість простіших арифметичних операцій.

Виклад основного матеріалу

Нехай маємо розбиття площини на прямокутники з кроками h_t, h_q вздовж відповідних осей, отже, задано масив точок

$$\left\{\left(t_{i,0};q_{j,0}\right)\right\}=\left\{\left(ih_t;jh_q\right)\right\}_{i,j\in\mathbf{Z}},$$

кожному елементу якого поставлено у відповідність усереднене на прямокутній області

$$\left\{\left(t_{i,0}-0,5h_t;q_{j,0}-0,5h_q\right);\left(t_{i,0}+0,5h_t;q_{j,0}+0,5h_q\right)\right\}$$

значення деякої $p(t,q)\in C^{k_1,k_2}$, $k_1,k_2=2,3,\ldots$ функції у вигляді масиву $\left\{p_{i,j,0}\right\}_{i,j\in\mathbf{Z}}$.

Для чотирикратного рекурентного поповнення кількості членів послідовності $\left\{p_{i,j,0}\right\}_{i,j\in\mathbf{Z}}$ достатньо на кожному κ-му (κ = 1, 2….) кроці рекурсії мати нову, більш згущену сітку вузлів:

$$\left\{(t_{2i,\kappa},q_{2j,\kappa}),(t_{2i+1,\kappa},q_{2j,\kappa}),\right.$$
$$\left.(t_{2i,\kappa},q_{2j+1,\kappa}),(t_{2i+1,\kappa},q_{2j+1,\kappa})\right\}_{i,j\in\mathbf{Z}},$$

які визначають за формулами:

$$t_{2i,\kappa}=t_{i,\kappa-1};$$
$$q_{2j,\kappa}=q_{j,\kappa-1};$$
$$t_{2i+1,\kappa}=\frac{t_{i,\kappa-1}+t_{i+1,\kappa-1}}{2}=t_{i,\kappa-1}+\frac{h_t}{2^{\kappa+1}};$$
$$q_{2j+1,\kappa}=\frac{q_{j,\kappa-1}+q_{j+1,\kappa-1}}{2}=q_{j,\kappa-1}+\frac{h_q}{2^{\kappa+1}},$$

причому

$$\begin{aligned}&p_{2i,2j,\kappa}=A\left(p^{\kappa-1,i,j}\right);\\&p_{2i+1,2j,\kappa}=B\left(p^{\kappa-1,i,j}\right);\\&p_{2i,2j+1,\kappa}=C\left(p^{\kappa-1,i,j}\right);\\&p_{2i+1,2j+1,\kappa}=D\left(p^{\kappa-1,i,j}\right),i,j\in\mathbf{Z},\end{aligned}\qquad(1)$$

де $A\left(p^{\kappa-1,i,j}\right)$; $B\left(p^{\kappa-1,i,j}\right)$; $C\left(p^{\kappa-1,i,j}\right)$; $D\left(p^{\kappa-1,i,j}\right)$ – лінійні функціонали, що побудовано на даних попереднього кроку рекурсії.

Наприклад, функціонали (1) неважко отримати із явного вигляду сплайну $S_{2,1}(p,t,q)$ [2], якщо покласти відповідно: ($x=0$, $y=0$); ($x=1$, $y=0$); ($x=0$, $y=1$); ($x=1$, $y=1$). У результаті отримаємо:

$$\begin{aligned}A^{(S_{2,1})}(\cdot)=p^{(S_{2,1})}_{2i,2j,\kappa}=\frac{1}{2304}\Big(&p_{i-2,j-2,\kappa-1}-\\-2p_{i-1,j-2,\kappa-1}&-46p_{i,j-2,\kappa-1}-2p_{i+1,j-2,\kappa-1}+\\+p_{i+2,j-2,\kappa-1}&-2p_{i-2,j-1,\kappa-1}+4p_{i-1,j-1,\kappa-1}+\\+92p_{i,j-1,\kappa-1}&+4p_{i+1,j-1,\kappa-1}-2p_{i+2,j-1,\kappa-1}-\\-46p_{i-2,j,\kappa-1}&+92p_{i-1,j,\kappa-1}+2116p_{i,j,\kappa-1}+\\+92p_{i+1,j,\kappa-1}&-46p_{i+2,j,\kappa-1}-2p_{i-2,j+1,\kappa-1}+\\+4p_{i-1,j+1,\kappa-1}&+92p_{i,j+1,\kappa-1}+4p_{i+1,j+1,\kappa-1}-\\-2p_{i+2,j+1,\kappa-1}&+p_{i-2,j+2,\kappa-1}-2p_{i-1,j+2,\kappa-1}-\\-46p_{i,j+2,\kappa-1}&-2p_{i+1,j+2,\kappa-1}+p_{i+2,j+2,\kappa-1}\Big);\end{aligned}\qquad(2)$$

$$\begin{aligned}B^{(S_{2,1})}(\cdot)=p^{(S_{2,1})}_{2i+1,2j,\kappa}=\frac{1}{576}\Big(&p_{i-1,j-2,\kappa-1}-7p_{i,j-2,\kappa-1}-\\-7p_{i+1,j-2,\kappa-1}&+p_{i+2,j-2,\kappa-1}-2p_{i-1,j-1,\kappa-1}+\\+14p_{i,j-1,\kappa-1}&+14p_{i+1,j-1,\kappa-1}-2p_{i+2,j-1,\kappa-1}-\\-46p_{i-1,j,\kappa-1}&+322p_{i,j,\kappa-1}+322p_{i+1,j,\kappa-1}-\\-46p_{i+2,j,\kappa-1}&-2p_{i-1,j+1,\kappa-1}+14p_{i,j+1,\kappa-1}+\\+14p_{i+1,j+1,\kappa-1}&-2p_{i+2,j+1,\kappa-1}+p_{i-1,j+2,\kappa-1}-\\-7p_{i,j+2,\kappa-1}&-7p_{i+1,j+2,\kappa-1}+p_{i+2,j+2,\kappa-1}\Big);\end{aligned}\qquad(3)$$

$$\begin{aligned}C^{(S_{2,1})}(\cdot)=p^{(S_{2,1})}_{2i,2j+1,\kappa}=\frac{1}{576}\Big(&p_{i-2,j-1,\kappa-1}-2p_{i-1,j-1,\kappa-1}-\\-46p_{i,j-1,\kappa-1}&-2p_{i+1,j-1,\kappa-1}+p_{i+2,j-1,\kappa-1}-\\-7p_{i-2,j,\kappa-1}&+14p_{i-1,j,\kappa-1}+322p_{i,j,\kappa-1}+14p_{i+1,j,\kappa-1}-\\-7p_{i+2,j,\kappa-1}&-7p_{i-2,j+1,\kappa-1}+14p_{i-1,j+1,\kappa-1}+\\+322p_{i,j+1,\kappa-1}&+14p_{i+1,j+1,\kappa-1}-7p_{i+2,j+1,\kappa-1}+\\+p_{i-2,j+2,\kappa-1}&-2p_{i-1,j+2,\kappa-1}-46p_{i,j+2,\kappa-1}-\\-2p_{i+1,j+2,\kappa-1}&+p_{i+2,j+2,\kappa-1}\Big);\end{aligned}\qquad(4)$$

$$\begin{aligned}D^{(S_{2,1})}(\cdot)=p^{(S_{2,1})}_{2i+1,2j+1,\kappa}=\frac{1}{144}\Big(&p_{i-1,j-1,\kappa-1}-7p_{i,j-1,\kappa-1}-\\-7p_{i+1,j-1,\kappa-1}&+p_{i+2,j-1,\kappa-1}-7p_{i-2,j,\kappa-1}+\\+49p_{i-1,j,\kappa-1}&+49p_{i+1,j,\kappa-1}-7p_{i+2,j,\kappa-1}-\\-7p_{i-1,j+1,\kappa-1}&+49p_{i,j+1,\kappa-1}+49p_{i+1,j+1,\kappa-1}-\\-7p_{i+2,j+1,\kappa-1}&+p_{i-1,j+2,\kappa-1}-7p_{i,j+2,\kappa-1}-\\-7p_{i+1,j+2,\kappa-1}&+p_{i+2,j+2,\kappa-1}\Big).\end{aligned}\qquad(5)$$

У стислому вигляді функціонали (2)–(5) можна подати так:

$$p^{(S_{2,1})}_{2i,2j,\kappa}=\sum_{i_t=i-2}^{i+2}\sum_{j_q=j-2}^{j+2}\gamma^{(S_{2,1})}_{A,i_t,j_q}p_{i_t,j_q,\kappa-1};\qquad(6)$$

$$p^{(S_{2,1})}_{2i+1,2j,\kappa}=\sum_{i_t=i-2}^{i+2}\sum_{j_q=j-2}^{j+2}\gamma^{(S_{2,1})}_{B,i_t,j_q}p_{i_t,j_q,\kappa-1}; \qquad (7)$$

$$p^{(S_{2,1})}_{2i,2j+1,\kappa}=\sum_{i_t=i-2}^{i+2}\sum_{j_q=j-2}^{j+2}\gamma^{(S_{2,1})}_{C,i_t,j_q}p_{i_t,j_q,\kappa-1}; \qquad (8)$$

$$p^{(S_{2,1})}_{2i+1,2j+1,\kappa}=\sum_{i_t=i-2}^{i+2}\sum_{j_q=j-2}^{j+2}\gamma^{(S_{2,1})}_{D,i_t,j_q}p_{i_t,j_q,\kappa-1}, \qquad (9)$$

де

$$\gamma^{(S_{2,1})}_{A}=\frac{1}{2304}\begin{pmatrix}1&-2&-46&-2&1\\-2&4&92&4&-2\\-46&92&2116&92&-46\\-2&4&92&4&-2\\1&-2&-46&-2&1\end{pmatrix}; \qquad (10)$$

$$\gamma^{(S_{2,1})}_{B}=\frac{1}{576}\begin{pmatrix}0&1&-7&-7&1\\0&-2&14&14&-2\\0&-46&322&322&-46\\0&-2&14&14&-2\\0&1&-7&-7&1\end{pmatrix}; \qquad (11)$$

$$\gamma^{(S_{2,1})}_{C}=\frac{1}{576}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&-2&-46&-2&1\\-7&14&322&14&-7\\-7&14&322&14&-7\\1&-2&-46&-2&1\end{pmatrix}; \qquad (12)$$

$$\gamma^{(S_{2,1})}_{D}=\frac{1}{144}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&-7&-7&1\\0&-7&49&49&-7\\0&-7&49&49&-7\\0&1&-7&-7&1\end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Вирази (6)–(13) дозволяють подавати функціонали (1), отримані з використанням уточнюючих сплайнів [2] $S_{2,2}(p,t,q)$; $S_{4,1}(p,t,q)$; $S_{3,1}(p,t,q)$:

$$p^{(\bullet)}_{a,b,\kappa}=\sum_{i_t=i-3}^{i+3}\sum_{j_q=j-3}^{j+3}\gamma^{(\bullet)}_{\Lambda,i_t,j_q}p_{i_t,j_q,\kappa-1},$$

де

$$(\bullet)=\left[\begin{array}{l}(2,2),\\(4,1);\end{array}\right. \quad \Lambda=\left[\begin{array}{l}A: a=2i, b=2j,\\B: a=2i+1, b=2j,\\C: a=2i, b=2j+1,\\D: a=2i+1, b=2j+1;\end{array}\right. \qquad (14)$$

$$\gamma^{(S_{2,2})}_{C}=\frac{1}{20736}\begin{pmatrix}0&0&0&0&\cdots\\1&-4&-5&304&\cdots\\-9&36&45&-2736&\cdots\\44&-176&-220&13376&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix};$$

$$\gamma^{(S_{2,2})}_{D}=\frac{1}{5184}\begin{pmatrix}0&0&0&0&\cdots\\0&1&-9&44&\cdots\\0&-9&81&-396&\cdots\\0&44&-396&1936&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix};$$

$$\gamma^{(S_{4,1})}_{A}=\frac{1}{2359296}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}1&70&-225&-1228&\cdots\\70&4900&-15750&-85960&\cdots\\-225&-15750&50625&276300&\cdots\\-1228&-85960&276300&1507984&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix};$$

$$\gamma^{(S_{4,1})}_{B}=\frac{1}{147456}\begin{pmatrix}0&1&5&-54&\cdots\\0&70&350&-3780&\cdots\\0&-225&-1125&12150&\cdots\\0&-1228&-6140&66312&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix};$$

$$\gamma^{(S_{4,1})}_{C}=\frac{1}{147456}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}0&0&0&0&\cdots\\1&70&-225&-1228&\cdots\\5&350&-1125&-6140&\cdots\\-54&-3780&12150&66312&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix};$$

$$\gamma^{(S_{4,1})}_{D}=\frac{1}{9216}\begin{pmatrix}0&0&0&0&\cdots\\0&1&5&-54&\cdots\\0&5&25&-270&\cdots\\0&-54&-270&2916&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix},$$

де задля економії місця для $\gamma^{(\bullet)}_{\Lambda}$ приводяться коефіцієнти з індексами

$$\begin{pmatrix} i-3,j-3 & i-3,j-2 & i-3,j-1 & i-3,j & \cdots \\ i-2,j-3 & i-2,j-2 & i-2,j-1 & i-2,j & \cdots \\ i-1,j-3 & i-1,j-2 & i-1,j-1 & i-1,j & \cdots \\ i,j-3 & i,j-2 & i,j-1 & i,j & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix};$$

$$p_{a,b,\kappa}^{(3,1)} = \sum_{i_t=i-2}^{i+3} \sum_{j_q=j-2}^{j+3} \gamma_{\Lambda,i_t,j_q}^{(3,1)} p_{i_t,j_q,\kappa-1},$$

де Λ − визначається з виразу (14);

$$\gamma_A^{(S_{3,1})} = \frac{1}{1327104} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 25 & 405 & -3310 & -3310 & \cdots \\ 405 & 6561 & -53622 & -53622 & \cdots \\ -3310 & -53622 & 438244 & 438244 & \cdots \\ -3310 & -53622 & 438244 & 438244 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix};$$

$$\gamma_B^{(S_{3,1})} = \frac{1}{165888} \begin{pmatrix} 0 & 25 & -70 & -630 & \cdots \\ 0 & 405 & -1134 & -10206 & \cdots \\ 0 & -3310 & 9268 & 83412 & \cdots \\ 0 & -3310 & 9268 & 83412 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix};$$

$$\gamma_C^{(S_{3,1})} = \frac{1}{165888} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 25 & 405 & -3310 & -3310 & \cdots \\ -70 & -1134 & 9268 & 9268 & \cdots \\ -630 & -10206 & 83412 & 83412 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix};$$

$$\gamma_D^{(S_{3,1})} = \frac{1}{20736} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 25 & -70 & -630 & \cdots \\ 0 & -70 & 196 & 1764 & \cdots \\ 0 & -630 & 1764 & 15876 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Функціонали, отримані з використанням сплайнів $S_{3,2}(p,t,q)$; $S_{4,2}(p,t,q)$, не наведено через громіздкість формул.

Висновки

Сплайни $S_{2,1}(p,t,q)$; $S_{2,2}(p,t,q)$; $S_{3,1}(p,t,q)$; $S_{3,2}(p,t,q)$; $S_{4,1}(p,t,q)$; $S_{4,2}(p,t,q)$ мають досить малу похибку апроксимації гладких функцій двох змінних [2]. Фактично вони є близькими (в асимптотичному сенсі) до інтерполяційних. Саме тому лінійні функціонали поповнення послідовностей відліків таких функцій, отримані зі згаданих сплайнів, можуть бути рекомендовані для високоточних обрахунків. Стосовно обробки цифрованих зображень з урахуванням вимоги швидкодії обчислювальних схем цілком достатньо у відповідних автоматизованих системах реалізовувати функціонали (2)−(5) для зменшення кількості простіших арифметичних операцій. Практична апробація функціоналів (2)−(5) показала, що за двократного збільшення розміру растрового зображення форматом А3, відповідне програмне забезпечення виконує цю операцію в режимі реального часу.

Подальші дослідження мають ураховувати можливість модифікацій поданих лінійних функціоналів під час опрацювання послідовностей відліків функцій трьох та більше змінних, а також взаємодію методів стиснення та відтворення інформації.

Література

1. *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Асимптотические методы восстановления кривых. – К.: ІМ НАН України, 1996. − 358 с.

2. *Приставка П.О.* Поліноміальні сплайни при обробці даних. – Д.: Дніпропетр. ун-т, 2004. – 236 с.

3. *Dubuk S.* Interpolation through an Iterative Scheme // Journal of Math. An. and Appl., 1986. − P. 185−204.

4. *De Marchi S.* The Dyadic Iterative Interpolation Method and some extensions // TR nr. 10/94, University of Padua, 1994. − 483 p.

5. *Holschneider M.* Wavelets. An analysis Tool. − Oxford. Oxford University Press, 1995.

6. *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Исследования линейных операторов порожденных методами пополнения данных // Математичне моделювання. − Дніпродзержинськ: ДГТУ, 2000. − 2 (5). − С. 11−19.

7. *Иванин Д.А., Лигун А.А.* Линейный метод восстановления поверхностей по её значениям в узлах квадратной решетки // Математичне моделювання. − Дніпродзержинськ: ДГТУ, 2001. − 1 (6). − С. 8−12.

8. *Лигун А.А., Шумейко А.А., Голобородько П.Л.* О гарантированных оценках для линейных методов восстановления, основанных на бинарном расслоении // Математичне моделювання. − Дніпродзержинськ: ДГТУ, 2001. − 2 (7). − С. 30−39.

9. *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Об одном способе восстановления функций по средним значениям на равномерной сетке // Математичне моделювання. − Дніпродзержинськ: ДГТУ, 2001. − 1 (6). − С. 16−17.

10. *Приставка П.О.* Поліноміальні сплайни в задачах бінарного поповнення // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій. − Д.: Дніпропетр. ун-т, 2003. − Т.7. – С. 39−53.

Стаття надійшла до редакції 30.10.07.

Стаття надійшла до редакції 30.10.07.