ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 532.529

В.М. Буйвол, д-р фіз.-мат. наук, проф.

СТИСКАННЯ ЕЛІПСОЇДАЛЬНИХ КАВЕРН

Розглянуто процес стискання каверни (бульбашки) еліпсоїдної форми в рідині. Запропоновано математичну модель процесу та числову її реалізацію. Досліджено залежності основних розмірів каверни від параметрів еліпсоїда, режиму течії та моменту часу.

The process of ellipsoidal cavity (bubble) compression in liquid is considering. The mathematical model and its computational realization are proposed. The dependences of basic cavity dimensions on ellipsoid parameters, flow regime and time are investigating.

Вступ

Задачу про стискання каверни сферичної форми в рідині вперше поставив англійський вчений Безант у 1859 р. [1]. Він вважав, що каверна виникає миттєво в результаті того, що з нескінченної маси однорідної нестисливої рідини, на яку не діють ніякі зовнішні сили, раптово зникає частина рідини, яка заповнювала сферичну область радіуса R. Оскільки тиск на нескінченності припускався сталим, то під його дією каверна почне стискатися. Однак Безант не дослідив цю задачу. Лише Релєй [2] повністю розв'язав її в 1917 р. Проінтегрувавши рівняння Лапласа у випадку сферичної симетрії, він спочатку знайшов радіальну швидкість $v = \dot{R}Rr^{-2}$ у довільній точці через швидкість $\dot{R}$ на поверхні сфери. Потім знайшов кінетичну енергію сферичного шару товщиною dr і густиною ρ, проінтегрувавши яку, визначив і кінетичну енергію всієї рідини: $E = \frac{\rho}{2}\int_R^\infty v^2 4\pi r^2 dr = 2\pi\rho\dot{R}^2R^3$.

Роботу, яку виконує вся маса рідини при стисканні каверни від початкового радіуса R_0 до R, можна обчислити як добуток тиску на нескінченності і зміни об'єму каверни:

$$A = \frac{4\pi p_\infty}{3}\left(R_0^3 - R^3\right).$$

За умов задачі вся ця робота перетворюється в кінетичну енергію, тому

$$\dot{R}^2 = \frac{2p_\infty}{3\rho}\left(\frac{R_0^3}{R^3} - 1\right).$$

Це і є рівняння Релєя.

Аналіз досліджень та мета статті

У задачах гідродинаміки каверн-бульбашок використовують зазвичай ті чи інші математичні моделі рідини [3–6].

Побудова таких моделей на основі рівнянь Нав'є – Стокса, котрі найбільш адекватно описують дію в'язких сил, є складним і не до кінця розв'язаним завданням. Крім того, ці моделі досить складні, мають різні розв'язки в різних діапазонах чисел Рейнольда. Проте за певних умов можна побудувати хоча й менш точні [6], але значно простіші математичні моделі, які дозволяють описати стискання початково еліпсоїдної порожнини за умов дії різних збурень.

Дослідження показують, що серед властивостей рідини, які найбільш суттєво відображають властивості реальних рідин, треба назвати наявність поля тяжіння в рідині. Воно не тільки спричиняє дію сили Архімеда, але і є причиною появи вихрових рухів навколо порожнини.

Для малих каверн типу бульбашок та за наявності великих кривизн поверхні може істотно впливати на форму каверни поверхневий натяг, а також наявність в'язкості рідини.

Якщо прояв цих факторів незначний, то можна побудувати достатньо прості математичні моделі руху каверни і на їх основі отримати розрахункові дані для побудови форми каверни в різні моменти стискання.

Результати, отримані в такий спосіб, будуть тим більше відображати реальність, чим меншим буде прояв дії цих сил. За досить значного впливу цих та подібних сил, які будемо називати збуреннями, їх уже не можна визначити простою сумою окремих компонентів, як це випливає з принципу суперпозиції. Тому лінеаризовані моделі можуть бути застосовані, якщо не до великих проявів дії збурень, то до цілком помірних, тобто середніх.

Одна з таких моделей, запропонована в працях [6; 7] і використана в ряді інших. Вона зводиться до системи диференціальних рівнянь стосовно мод деформацій порожнини.

© В.М. Буйвол, 2007

Постановка завдання

В основу дослідження покладено гідродинаміку сферичних каверн в ідеальній рідині. Вважаючи потенціал Φ_0 швидкостей незбуреної течій навколо каверни відомим, як також і форми самої каверни, що описується її радіусом R_0, потенціал збуреної течії і радіус каверни будемо визначати у вигляді суми

$$\Phi(t,r,\vartheta)=\Phi_0(t,r)+\varphi(t,r,\vartheta);$$

$$R(t,\vartheta)=R_0(t)+f(t,\vartheta),$$

де t – час;

r,ϑ,ψ – система сферичних координат.

Уважається, що каверна має форму поверхні обертання, тобто від координати ψ поле течії не залежить.

Задача визначення збурень (φ потенціалу і $f(t)$ форми каверни) зводиться до інтегрування системи рівнянь [6]:

$$\nabla^2\varphi=0, \qquad (1)$$

$$-\frac{\partial f}{\partial t}=(\nabla\Phi_0-\vec{c})\nabla f-\nabla\varphi\nabla F_0-f\frac{\partial(\nabla\Phi_0-\vec{c})\nabla F_0}{\partial n}; \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(\nabla\Phi_0-c)\nabla\varphi+f\left[\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial n\partial t}+(\nabla\Phi_0-c)\frac{\partial\nabla\Phi_0}{\partial n}\right]=$$

$$=-\frac{\partial\Phi_0}{\partial t}+\vec{c}\nabla\Phi_0-\frac{1}{2}(\nabla\Phi_0)^2-\frac{\widetilde{p}_n-p_\infty}{\rho}\quad, \qquad (3)$$

де $\vec{c}$ – вектор швидкості переміщення системи координат (вона може бути пов'язана з дією сили Архімеда);

$\widetilde{p}_k, p_\infty$ – узагальнений тиск у порожнині та тиск на нескінченності;

ρ – густина рідини.

Рівняння Лапласа (1) має виконуватися зовні порожнини. Рівняння (2), що виражає кінематичну умову, і рівняння (3), яке є інтегралом руху Лагранжа – Коші, виконуються на збуреній межі каверни.

Рівняння незбуреної поверхні каверни має вигляд:

$$F_0(x,t)=0.$$

Узагальнений тиск може бути обчислений за формулою [7]:

$$\widetilde{p}=p_i+p_\tau+p_g+p_\mu,$$

$$p_g=\rho gZ,\quad p_\tau=-2\tau H,$$

$$p_\mu=-4\mu\frac{\dot{R}}{R},$$

де τ, μ – коефіцієнти поверхневого натягу і в'язкості відповідно.

До збурень можна віднести все, що відрізняє конкретну математичну модель від моделі незбуреної течії (Φ_0,R_0). Це, наприклад, збурення, пов'язані з наявністю поля сили тяжіння і поверхневого натягу, стисливості рідини та її в'язкості, місцевого тиску, а також з геометричною формою незбуреної каверни, її орієнтацією, несиметричністю, обмеженістю течії та ін.

Якщо межа сферичної каверни визначається її радіусом $R_0(t)$, а межі еліпсоїдної каверни рівнянням, яке є розкладом у ряд за поліномами Лежандра $P_n(\mu)$ функції $R(t,\vartheta)$:

$$R(t,\vartheta)=R_0(t)+\sum_{n=0}^{\infty}f_n(t)P_n(\mu),\mu=\cos\theta, \qquad (4)$$

то із системи рівнянь (1)–(3) для невідомих функцій $f_n(t)$ отримується нескінченна система диференціальних рівнянь [6]:

$$\begin{aligned}
&-R_0\ddot{f}_0-3\dot{R}_0\dot{f}_0-\ddot{R}_0f_0+\frac{u^2}{4R_0}-\\
&-\frac{8\overline{H}_0}{W_e}+\frac{\overline{Z}_0}{2Fr^2}-\frac{\dot{u}}{2}(R_0+f_0-\frac{7}{5}f_2)-\\
&-\frac{u}{2}\left(\dot{R}_0+\dot{f}_0-\frac{3}{5}\dot{f}_2-\frac{4\dot{R}_0}{5R_0}f_2\right)+\frac{27u^2}{70R_0}f_3=\widetilde{\sigma}_1,\\
&-\frac{R_0\ddot{f}_n+3\dot{R}_0\dot{f}_n}{n+1}+\\
&+\left[\frac{n-1}{n+1}\ddot{R}_0+\frac{9nu^2}{2R_0}\frac{n^2(2n+1)-2(n-1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\right]f_n-\\
&-\frac{3u}{2}\left(\dot{f}_{n-1}-\frac{2n+1}{2n+3}\dot{f}_{n+1}\right)-\\
&-\left[\frac{nu}{2}+(n-1)\frac{3u\dot{R}_0}{R_0}\right]\frac{f_{n-1}}{2n-1}+\\
&+\left[\frac{5n+2}{2}u+(n+1)\frac{3u\dot{R}_0}{R_0}\right]\frac{f_{n+1}}{2n+3}+\\
&+\delta_{n2}\left[\frac{3u^2}{4}+\left(\frac{\dot{u}}{2}+\frac{u\dot{R}_0}{R_0}\right)f_1\right]-\\
&-\frac{9nu^2}{4R_0}\left[\frac{(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)}f_{n-2}\right]-\\
&-\frac{9nu^2}{4R_0}\left[\frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)}f_{n+2}\right]+\\
&+\frac{9u^2f_1}{10R_0}\delta_{n3}=\sigma_n+\frac{8\overline{H}_n}{We}-\frac{\overline{Z}_n}{2Fr^2},(n\geq 2),
\end{aligned} \qquad (5)$$

де δ_{n3} – символ Кронекера;

We, Fr – числа Вебера і Фруда, обчислені за однією з півосей еліпсоїдної каверни або за радіусом рівновеликої сфери;

$\sigma_n, \overline{H}_n, \overline{Z}_n$ – коефіцієнти розкладів у ряди за поліномами Лежандра перепаду тиску, середньої кривизни і підвищення точки на межі каверни над горизонтальною площиною відповідно.

У праву частину рівняння для моди $f_0(t)$ не ввійшов доданок σ_0, але це зумовлено тим, що функція $R_0(t)$ є розв'язком рівняння Релєя, в яке і входить величина σ_0.

Нелінійна система рівнянь (5) та її особливості досить детально досліджувалась у працях [6–8], де показано, що члени рівнянь, які в своєму складі мають моди f_{n+1} і f_{n-1}, та моди f_{n+2} і f_{n-2}, малі і мало впливають на формування поверхні каверни. Проте їх треба враховувати, якщо розглядаються не зовсім малі або ж середньої величини збурення.

Розв'язками системи рівнянь (5) (за відповідних початкових умов) є функції $f_n(t)$, за допомогою яких знаходяться моди потенціалу

$$\frac{(n+1)a_n}{R_0^{n+2}} = -\dot{f}_n - 2\dot{R}_0 \frac{f_n}{R_0}, n = 0,2,...,$$

потенціал збурень

$$\varphi = \sum_{n=0} \frac{a_n(t)}{r^{n+1}} P_n(\mu)$$

і потенціал збуреної течії

$$\Phi = -R_0^2 r^{-1} + \varphi .$$

За потенціалом Φ обчислюється як тиск на поверхню каверни, так і поле тисків навколо неї. А використавши формулу (4), можна побудувати і форму деформованої каверни, яка, звичайно, буде змінюватися з часом.

Початкові умови, потрібні для інтегрування системи (5), можна визначити, розглядаючи еліпсоїдну каверну як результат збурення сферичної каверни.

Тоді "радіус" такої каверни буде залежати від одного кута, якщо порожнина є поверхнею обертання:

$$R_{\text{п}} = R_{\text{п}}(t, \vartheta),$$

де індекс "п" означає "початковий", тобто це радіус порожнини в початковий момент часу. Він визначається рівнянням поверхні еліпсоїда. Розклавши цю функцію за поліномами Лежандра, будемо мати

$$R_{\text{п}}(t, \vartheta) = R_{\text{п}0} + \sum_{n=0}^{\infty} f_{n0}(t) P_n(\mu). \qquad (6)$$

Радіус $R_{\text{п}0}$ можна також розрахувати як радіус кулі, рівновеликої із заданим еліпсоїдом. Це і є умова для визначення початкового радіуса сферичної каверни.

Функції $f_{n0}(t)$ з рівняння (6) можна розглядати як початкові збурення сферичної каверни з радіусом $R_{\text{п}0}$.

Систему диференціальних рівнянь (5) у цьому випадку слід доповнити такими початковими умовами:

$$f_n(0) = f_{n0}; \qquad (7)$$

$$\dot{f}_n(0) = 0. \qquad (8)$$

Рівність (8) означає, що початкові швидкості зміни деформацій дорівнюють нулю, хоча, звичайно, можна було б розглядати задачу і з ненульовими швидкостями деформацій.

Отже, якщо початкова порожнина мала форму еліпсоїда обертання

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

то радіус-вектор точки на еліпсоїді є функцією лише координат r і ϑ. Запишемо рівняння цього еліпсоїда за допомогою функції $r = r(\vartheta)$, маючи при цьому на увазі, що

$$z = r\cos\vartheta, \quad x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi;$$

$$\frac{r^2\sin^2\vartheta}{a^2} + \frac{r^2\cos^2\vartheta}{c^2} = 1.$$

Звідси

$$r = \frac{ac}{\sqrt{c^2\sin^2\vartheta + a^2\cos^2\vartheta}}.$$

Можливі два випадки:

$a < c$ або $a > c$.

Якщо ввести ексцентриситети, то

$$r = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\vartheta}};$$

$$e^2 = 1 - \frac{a^2}{c^2}, \quad a < c$$

або

$$r = \frac{c}{\sqrt{1 - e_1^2\sin^2\vartheta}};$$

$$e_1^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2}, \quad a > c.$$

Функції r можна розкласти в ряди за поліномами Лежандра:

$$r = r(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n P_n(\mu), \quad \mu = \cos\vartheta.$$

Перші чотири коефіцієнти цього розкладу мають такий вигляд, якщо $a < c$ [8]:

$$\frac{r_0}{a} = 1 + \frac{e^2}{6} + \frac{3e^4}{40} + \frac{5e^6}{112} + \cdots; \qquad (9)$$

$$\frac{r_2}{a}=\frac{e^2}{3}\left(1+\frac{9e^2}{14}+\frac{25e^4}{56}+\cdots\right); \quad (10)$$

$$\frac{r_2}{a}=\frac{e^2}{3}\left(1+\frac{9e^2}{14}+\frac{25e^4}{56}+\cdots\right); \quad (11)$$

$$r_4=\frac{3ce^4}{35}\left(1+\frac{175}{154}e^2+\frac{1225}{1144}e^4+\frac{1505}{2288}e^6\cdots\right). \quad (12)$$

У випадку $a>c$ у формулах (9)–(12) треба покласти c замість a і e_1 замість e. У останньому випадку кут ϑ відраховується від осі Oy, а не від осі Oz, як у випадку $a<c$. Таким чином, система рівнянь (5) і початкові умови (7), (8) повністю визначають задачу Коші для цієї системи. Її можна розв'язати, наприклад, методом Рунге-Кутта з автоматичним виведенням результатів розрахунків на друк у фіксовані моменти часу.

Висновки

Залежності від часу «вертикальних» *Dw* діаметрів каверн і «горизонтальних» *Dh* їх діаметрів в ідеальній рідині показано на рис. 1.

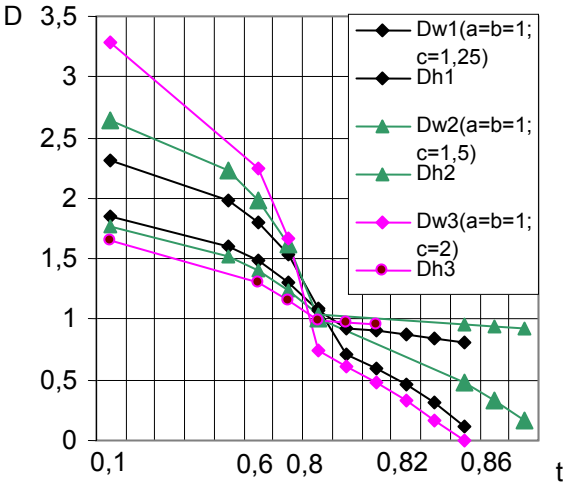

Рис. 1. Розміри каверн, якщо Fr = We = 10^6

Видно, що для всіх каверн настає момент часу, в який "вертикально" видовжена каверна стає близькою до сфери, а надалі – навіть "горизонтально" видовженою. Момент часу, коли форма стає майже сферичною, мало залежить від ексцентриситету еліпсоїда.

Цікаво порівняти час стискання сферичної і еліпсоїдної каверн. У книзі Р. Кнеппа [9] наведено таблицю, яка відображає залежність радіуса каверни від часу в процесі стискання. Якщо знайти середній радіус еліпсоїдної каверни як половину суми "вертикального" і "горизонтального" розмірів еліпсоїдної каверни і порівняти процес зміни цього середнього радіуса з наведеним у роботі Кнеппа і отриманого числовим інтегруванням рівняння Релея, то матимемо рис. 2.

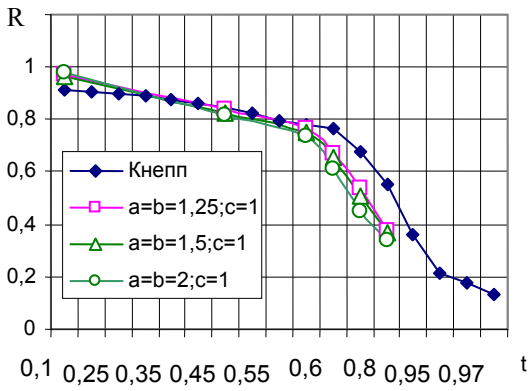

Рис. 2. Час стискання каверн

Розбіжність у результатах на початку процесу стискання для каверн $c<a$ майже не помітна і тільки на кінцевій стадії вона стає помітною. Але це цілком закономірно, оскільки на кінцевому етапі стискання деформація каверни стає великою, на що не розраховано викладену тут теорію. Різке збільшення швидкості стискання спостерігається в тому діапазоні часу, в якому відбувається зближення еліпсоїдної каверни зі сферичною (рис.1), тобто, якщо $t\approx 0{,}8$. Чим менший ексцентриситет еліпсоїда, тим збіг цих кривих є кращим, що свідчить, на наш погляд, про достовірність отриманих тут результатів. Істотна розбіжність спостерігається лише в разі значних видовжень вертикально орієнтованої каверни.

Література

1. *Besant W.H.*, Hydrjstatics and Hidrodynamics. Art. – 158, Cambridge University Press, London, 1859.

2. *Rayleigh, Lord(Strutt J.W/).* On the Pressure Developed in a Liquid During the Collapse of a Spherical Cavity // Phil. Mag. – 1917. – 34. – P. 94–98.

3. *Воронин В.В., Мачехина Т.Н.* Современное состояние исследований кавитационных течений // Обзоры. – М.: ОНТИ ЦАГИ,1985.– № 651.– 146 с.

4. *Plesset M.S., Prosperitti A.* Bubble dynamics and cavitation // Ann. Rev. Fluid mech. – 1977. – №9. – P. 145–185.

5. *Herman W.A.H.J.* On the instability of the translating gas bubble under the influence of a pressure step // Philips Res. Repts Suppl. – 1973. – № 3. – P. 2–26.

6. *Буйвол В.Н.* Движение и деформация газонаполненных полостей в жидкости // Прикл. гидромеханика: Сб.– К.: Наук. думка, 1989. − С. 5–27.

7. *Буйвол* В.М. Концепція гіпотетичних течій // Вісн. НАУ. – 2004. − № 1. – С. 176–179.

8. *Буйвол* В.М. Еволюція несферичних порожнин в рідині // Вісн. НАУ. – 2005. – № 1. − С. 211–214.

9. *Кнепп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф.* Кавитация. – М.: Мир, 1976. – 688 с.

Стаття надійшла до редакції 05.09.07.