УДК 621.391(045)

Ю. О. Єгоршин, канд. техн. наук, доц.
О. Ю. Красноусова, канд. техн. наук, доц.

ВИКОРИСТАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ δ-ІМПУЛЬСІВ ПРИ ВИЗНАЧЕННІ СПЕКТРІВ СИГНАЛІВ

Показано, що спектральні щільності сигналів поліноміального типу можна визначити без обчислень інтегралів Фур'є на основі використання спектральних властивостей δ-імпульсів, їхніх похідних, а також їхніх примітивних функцій.

It's shown that a spectral density of the signals of polynomial type is possible determinate without signal calculation on the base of using of the spectral properties of the δ-impulses, their derivatives, as well as their antiderivatives.

Вступ

Класичний спосіб визначення спектральної щільності $\dot{S}(\omega)$ для сигналу $u(t)$ полягає в обчисленні інтеграла Фур'є [1]:

$$\dot{S}_u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt .$$

У деяких випадках спектри $\dot{S}_u(\omega)$ можна визначити за спектром похідної

$$u^{(1)} = \frac{du}{dt}$$

у вигляді [2, 3]:

$$\dot{S}_u = \frac{1}{j\omega} \dot{S}_{u^{(1)}} , \qquad (1)$$

де $\dot{S}_{u^{(1)}}$ – спектральна щільність похідної.

Формула (1) виявляється справедливою лише в тому випадку, коли постійна C у виразі примітивної функції

$$u(t) = \int u^{(1)}(t) dt + C$$

дорівнює нулю. Назвемо таку примітивну функцію центральною (ЦПФ). Зокрема, одинична функція Хевісайда не є ЦПФ відносно функції Дірака $\delta(t)$, тому визначення спектра $\dot{S}_h$ за спектром $\dot{S}_\delta = 1$ з використанням рівняння (1) приведе до неправильного результату.

Вираз імпульсного сигналу може містити в собі кілька функцій $h(t)$, наприклад:

$$\overset{*}{u}(t) = u(t)[h(t) - h(t-\tau)] , \qquad (2)$$

де $\overset{*}{u}(t)$ – імпульс, що починається в момент t = 0, закінчується в момент $t = \tau$ і характеризований на ділянці неперервності функцією $u(t)$.

Для функцій $u(t)$ поліноміального типу вирази похідних істотно спрощуються при послідовному диференціюванні.

Становить практичний інтерес обґрунтування способу визначення спектра сигналу $\overset{*}{u}(t)$ за спектром його деякої n-похідної за допомогою розподілу останнього спектра на $(j\omega)^n$:

$$\dot{S}_{\overset{*}{u}} = \frac{\dot{S}\left[\overset{*}{u}{}^{(n)}\right]}{(j\omega)^n} . \qquad (3)$$

Дійсно, похідна порядку n+1 для функції $\overset{*}{u}(t)$, якщо степінь поліноміальної функції дорівнює n, дорівнює зваженій сумі δ - функцій і їхніх похідних, порядку не більше n. Оскільки спектри δ-імпульсів і їхніх похідних є елементарними функціями, спектри похідної $\overset{*}{u}{}^{(n)}$ визначаються без використання інтеграла Фур'є. У разі справедливості рівняння (3) неважко визначити й спектр імпульсу $\overset{*}{u}(t)$ без обчислень інтегралів Фур'є.

Теорема про спектр імпульсу поліноміального типу (у часовій області)

Імпульс поліноміального типу можна подати у вигляді зваженої суми ЦПФ стосовно δ - імпульсів.

Доведення теореми. Розглянемо ЦПФ різного порядку стосовно δ - імпульсу.

Центральна примітивна функція першого порядку стосовно δ - імпульсу дорівнює:

$${}^{(1)}\delta(t) = y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sgn} t .$$

Центральна примітивна функція другого порядку для δ - імпульсу дорівнює:

$${}^{(2)}\delta(t) = {}^{(1)}y(t) = t y(t) .$$

Неважко показати, що ЦПФ порядку (n+1) для δ - імпульсу дорівнює:

$$^{(n+1)}\delta(t) = {}^{(n)}y(t) = \frac{t^n}{n!}\, y(t)\,. \qquad (4)$$

Вираз (4) є рекурентним і справедливим за будь-якого n. Для цих ЦПФ спектральні щільності є симетричними функціями. Для ЦПФ $^{(n)}\delta(t)$ непарного порядку n спектри є непарними функціями щодо нуля частоти ω і чисто уявними. Для ЦПФ парного порядку - спектри парної функції і є дійсними:

$$\dot{S}_{(n)_\delta} = (j\omega)^{-n}\,. \qquad (5)$$

Неважко показати, що ЦПФ для імпульсу $\delta(t-\tau)$ має вигляд:

$$^{(n+1)}\delta(t-\tau) = \frac{(t-\tau)^n}{n!}\, y(t-\tau)\,, \qquad (6)$$

а її спектр:

$$\dot{S} = (j\omega)^{-n} e^{-j\omega\tau}\,. \qquad (7)$$

Імпульсний сигнал (2), що містить одиничні функції, можна подати у вигляді

$$\overset{*}{u}(t) = u(t)[y(t) - y(t-\tau)]\,, \qquad (8)$$

оскільки

$h(t) = y(t) + 1/2,\ h(t-\tau) = y(t-\tau) + 1/2\,.$

Нехай поліном степеня n

$$u(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^n\,,$$

тоді добуток $u(t).y(t)$, що входить у формулу (8), є зваженою сумою ЦПФ порядку не більше n стосовно $y(t)$ і порядку не більше (n+1) стосовно $\delta(t)$ відповідно до рівняння (6).

Добуток $u(t)y(t-\tau)$, що входить у вираз (8), також можна подати зваженою сумою ЦПФ порядку не більше n+1 стосовно $\delta(t-\tau)$. Підтвердимо останнє положення, послідовно збільшуючи показник n, тобто використовуємо принцип індукції.

Нехай

$n = 0$,

тоді

$u(t) = a_0\,.$

Одержуємо ЦПФ з коефіцієнтом a_0:

$$u(t)y(t-\tau) = a_0 y(t-\tau) = a_0{}^{(1)}\delta(t-\tau)\,.$$

Нехай

$n = 1$,

тоді

$u(t) = a_0 + a_1 t\,.$

Одержуємо

$$u(t)\,y(t-\tau) = a_0\,y(t-\tau) + a_1 t y(t-\tau) =$$
$$= a_0\,y(t-\tau) + a_1(t-\tau)\,y(t-\tau) + a_1\tau y(t-\tau) =$$
$$= \left[a_0 + a_1\tau\right] y(t-\tau) + a_1(t-\tau)\,y(t-\tau).$$

Таким чином, одержимо зважену суму ЦПФ першого й другого порядків стосовно імпульсу $\delta(t-\tau)$ з вагами $\left(a_0 + a_1\tau\right)$ та a_1.

Нехай

$n = 2$

і в окремому випадку

$a_0 = a_1 = 0$,

тобто

$u(t) = a_2 t^2$,

тоді

$$u(t)\,y(t-\tau) = a_2\left[(t-\tau)^2 + 2t\tau - \tau^2\right] y(t-\tau) =$$
$$= a_2\left[(t-\tau)^2 + 2(t-\tau)\tau + \tau^2\right] y(t-\tau),$$

тобто одержуємо зважену суму ЦПФ першого, другого й третього порядку.

Отже, відповідно до принципу індукції, можна завжди складову $u(t)y(t-\tau)$ у рівнянні (8) подати у вигляді зваженої суми ЦПФ стосовно $y(t-\tau)$ і $\delta(t-\tau)$. Природно, що врахування обох складових − зважених сум у виразі (8) − зумовить зміну результуючих ваг.

Теорему доведено.

Наслідок 1. Спектр сигналу $\overset{*}{u}(t)$ (див. формулу (2)) у частотній області можна подати у вигляді рівняння (3), якщо ступень полінома, що описує сигнал $u(t)$ на ділянці неперервності, дорівнює $n-1$.

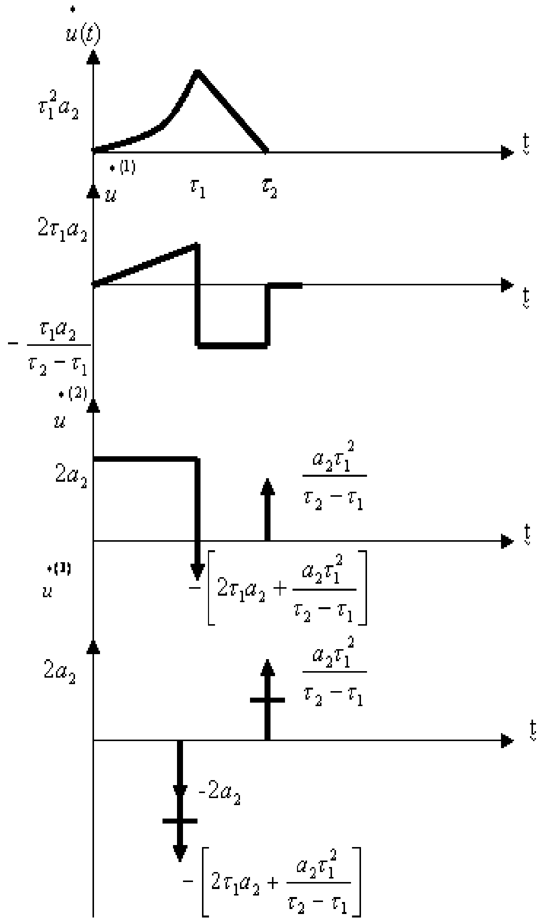
Дійсно, у цьому випадку похідна $\overset{*(n)}{u}$ являє собою зважену суму δ-функцій і їхніх похідних порядку не більше n − 1.

Приклад використання. Нехай сигнал імпульс, заданий на інтервалі t, є $(0, \tau_2\ )$. Причому, на підінтервалі t є $(0, \tau_1\ )$ $\overset{*}{u}(t) = a_2 t^2$ − поліном другого степеня, на підінтервалі t є $(\tau_1; \tau_2)$ сигнал $\overset{*}{u}$ описується поліномом першого степеня.

Знайдемо похідну третього порядку, використовуючи для цього принцип графоаналітичного диференціювання (див. рисунок).

Запишемо цю похідну:

$$\overset{*(3)}{u} = 2a_2\left[\delta(t) - \delta(t-\tau_1)\right] + \frac{a_2\tau_1^2}{\tau_2 - \tau_1}\delta^{(1)})t - \tau_2) -$$
$$-\left[2\tau_1 a_2 + \frac{a_2\tau_1^2}{\tau_2 - \tau_1}\right]\left[\delta^{(1)}(t-\tau_1)\right].$$



Імпульс і його похідні

З урахуванням $\overset{*(3)}{u}$ запишемо спектр $\overset{*(3)}{u}$:

$$\dot{S}_u^{*(3)} = 2a_2\left[1-e^{-j\omega\tau_1}\right] + j\omega a_2\tau_1^2\,\frac{e^{-j\omega\tau_2}}{\tau_2-\tau_1} - \left[2\tau_1 a_2 + \frac{a_2\tau_1^2}{\tau_2-\tau_1}\right] j\omega\left[e^{-j\omega\tau_1}\right].$$

З урахуванням виразу $\dot{S}_u^{*(3)}$ одержимо спектр вихідного сигналу $\overset{*}{u}(t)$ у вигляді

$$\dot{S}_u^{*} = \frac{1}{(j\omega)^3}\dot{S}_u^{*(3)}.$$

Наслідок 2. Спектр сигналу $\overset{*}{u}(t)$ (див. вираз (2)) у частотній області можна визначити у вигляді зваженої суми частотних спектрів ЦПФ для δ-імпульсів порядку не більше n+1, якщо сигнал $\overset{*}{u}(t)$ подати у вигляді зваженої суми ЦПФ для δ-імпульсів, де n − степінь полінома для функції сигналу на його неперервній ділянці.

Приклад використання. Нехай

$$\overset{*}{u}(t) = a_2 t^2 (h(t) - h(t-\tau_1)).$$

Подаємо $\overset{*}{u}(t)$ у вигляді

$$\overset{*}{u}(t) = a_2 t^2 \left[y(t) - y(t-\tau_1)\right],$$

де $y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sgn} t$.

Використовуємо наведений запис:

$$a_2 t^2 y(t-\tau_1) = a_2\left[(t-\tau_1)^2 + 2(t-\tau_1)\tau_1 + \tau_1^2\right]\times$$
$$\times\, y(t-\tau_1),$$

після чого запишемо сигнал у вигляді:

$$\overset{*}{u}(t) = a_2 t^2 y(t) - a_2 (t-\tau_1)^2 y(t-\tau_1) -$$
$$-2a_2(t-\tau_1)\tau_1 y(t-\tau_1) - \tau_1 2a_2 y(t-\tau_1).$$

Використовуючи рівняння (6), переписуємо функцію $\overset{*}{u}(t)$ у вигляді

$$\overset{*}{u}(t) = 2a_2\left[{}^{(3)}\delta(t) - {}^{(3)}\delta(t-\tau_1)\right] -$$
$$-2a_2\tau_1\left[{}^{(2)}\delta(t-\tau_1)\right] + a_2\tau_1^2\,{}^{(1)}\delta(t-\tau_1).$$

Використовуючи вираз (7), записуємо спектр для отриманої формули $\overset{*}{u}(t)$:

$$\dot{S}_u^{*} = 2a_2(j\omega)^{-3}\left[1-e^{-j\omega\tau_1}\right] -$$
$$-2a_2\tau_1(j\omega)^{-2}e^{-j\omega\tau_1} + a_2\tau_1^2(j\omega)^{-1}e^{-j\omega\tau_1}.$$

Для перевірки правильності отриманого виразу $\dot{S}_u^{*}$ можна використовувати властивість

$$\dot{S}_u^{*}(0) = S,$$

де S − площа заданого імпульсу.

У цьому випадку

$$S = \int_0^{\tau_1} a_2 t^2 dt = a_2\frac{\tau_1^3}{3}.$$

Використовуючи правило Лопіталя, неважко бачити, що

$$\dot{S}_u^{*}(0) = S.$$

Другий розглянутий спосіб визначення спектра виявляється зручним за невисокого степеня полінома. В іншому випадку доведеться мати справу із громіздкими арифметичними перетвореннями. У свою чергу, у першому розглянутому способі визначення спектра доцільно використовувати принцип графоаналітичного диференціювання. В іншому випадку доведеться мати справу із громіздкими перетвореннями δ-функцій.

Висновки

1. Отримано рекурентні вирази для ЦПФ будь-якого порядку стосовно δ-імпульсів.
2. Доведено, що імпульс поліноміального типу можна подати зваженою сумою ЦПФ порядку не більше n+1 стосовно δ-імпульсів, де n − степінь полінома, що описує імпульс на ділянках його неперервності.
3. Похідна порядку n+1 для функції імпульсу поліноміального типу дорівнює зваженій сумі δ-імпульсів і їхніх похідних порядку не більше n.
4. Частотний спектр імпульсу поліноміального типу дорівнює спектру його похідної порядку n+1, поділеному на $(j\omega)^{n+1}$.
5. Частотний спектр імпульсу поліноміального типу можна визначити, записуючи функцію імпульсу у вигляді зваженої суми ЦПФ стосовно δ-імпульсів і використовуючи елементарні вирази спектрів цих функцій.
6. Запропоновано два способи визначення частотних спектрів поліноміальних імпульсів без обчислень інтегралів Фур'є, наведено приклади використання цих способів.

Література

1. *Корн Г. , Корн Т.* Справочник по математике. − М.: Наука,1977. − 832 с.

2. *Белецкий А. Я., Бабак В. П.* Детерминированные сигналы и спектры. − К.: КИТ, 2002. − 502 с.

3. *Белецкий А. Я. ,Егоршин Ю. А.* Спектры конечно-дифференцируемых сигналов // Електроніка та системи управління −К.: НАУ, 2004. − №1. − С. 20−32.

Стаття надійшла до редакції 18.12.06.