

УДК 539.375

Т. В. Доник, студ.

ВИЗНАЧЕННЯ ГРАНИЧНОГО СТАНУ ПЛАСТИНИ, ПІДКРІПЛЕНОЇ ДВОМА ПРЯМОКУТНИМИ РЕБРАМИ

НАУ, Аерокосмічний інститут, e-mail: aviacosm@nau.edu.ua

Розглянуто задачу про граничний стан пластини, підкріпленої двома прямокутними ребрами. Досліджено вплив ребер на напружено-деформований та граничний стан пластини.

The problem about a limited condition of a plate supported is considered by two rectangular edges. Influence of edges on intense-deformed and a limiting condition of a plate is investigated.

Постановка проблеми

Розглядається завдання про граничний стан пластини, підкріпленої двома прямокутними ребрами. Досліджується вплив цих ребер на напружений та граничний стан пластини. Розглянуто два випадки, коли ребра цілі і коли одне з ребер зламане на половині висоти. Основну увагу приділено визначенню критичних напружень. Розглянуто пластину розмірами 320×160 мм і товщиною 3 мм. Пластина підкріплена двома прямокутними ребрами перерізом 5×15 мм і має центральний отвір діаметром 11 мм. Пластина виготовлена з алюмінієвого сплаву Д-18Т. Пластина розтягується в напрямку осі рівномірно-розподіленими по верхній та нижній гранях зусиллями σ_0 (рис. 1).

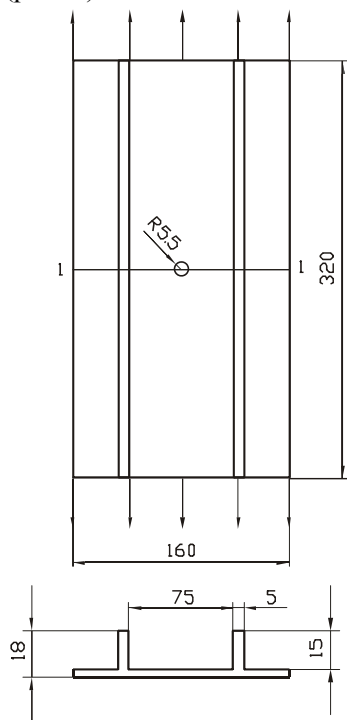


Рис. 1. Схема конструктивного елемента

Характеристики матеріалу пластини: коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,33$; модуль зсуву

$\mu = 2,7 \cdot 10^4$ МПа; модуль Юнга $E = 7,4 \cdot 10^4$ МПа; критичний коефіцієнт інтенсивності напружень $K_c = 36$ МПа \cdot м^{1/2}; границя міцності $\sigma_B = 460$ МПа; границя текучості $\sigma_T = 320$ МПа. Зображено графік, за допомогою якого можна визначити критичне напруження і критичну довжину тріщини.

Мета

Вирішити проблему про вплив ребер, а також оцінити вплив пошкодження одного з ребер на напружено-деформований стан та граничний стан пластини.

Актуальність проблеми

Тонкостінні підкріплені конструкції за відносно малої маси мають високі характеристики міцності, завдяки чому вони набули широкого застосування в авіації. Типові елементи підкріплених тонкостінних конструкцій – крило і фюзеляж літака; вони мають відносно тонку обшивку і силовий набір (каркас), створений такими елементами, як шпангоути, лонжерони, нервюри і стрингери.

Метод розв'язання проблеми

Проблему розглядаємо як просторову задачу теорії пружності. Диференціальні рівняння просторової задачі теорії пружності мають такий вигляд:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u = 0;$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v = 0;$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w = 0,$$

де $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа;

де u, v, w – проекції вектора переміщень відповідно на осі x, y, z ; θ – об'ємне розширення; λ, μ – постійні Ламе.

Задачу розв'язуємо за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ) і програмного комплексу.

Програмний комплекс реалізовано як інтегровану систему аналізу напружено-деформованого стану і проектування елементів конструкцій на базі МСЕ. Теоретичною основою комплексу є МСЕ у формі методу переміщень. Скінченно-елементна модель підкріпленої конструкції має бути, по можливості, простою, але водночас вона повинна правильно відтворювати найбільш істотні особливості силової роботи. Як і в традиційних методах розрахунку, обшивку можна вважати безмоментною.

Пластина з непошкодженими ребрами

Розглянемо пластину з боку ребер. У цьому разі небезпечний переріз 1–1. Будемо епюру напружень σ_y у цьому перерізі (рис 2).

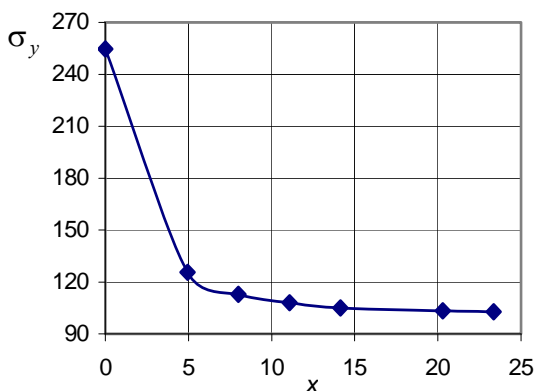


Рис. 2. Епюра напружень σ_y у перерізі 1–1

За цими даними будемо інтерполяційний поліном

$$\sigma_y(x) = 254,96 - 48,041x + 5,458x^2 - 0,209x^3.$$

Цей поліном отримано при $\sigma_0 = 100$ МПа.

Перетворимо його для будь-якої величини σ_0 . У результаті отримаємо

$$\sigma_y(x) = \frac{\sigma_0}{100} \cdot (254,96 - 48,041x + 5,458x^2 - 0,209x^3).$$

У межах зони граничного стану матеріалу виконується умова $\sigma_y(x) = \sigma_B$ (де σ_B – границя міцності). Тоді приходимо до рівняння

$$\frac{\sigma_0^{\text{міц}}}{100} \cdot (254,96 - 48,041x + 5,458x^2 - 0,209x^3) = \sigma_B.$$

Звідси знаходимо

$$\sigma_0^{\text{міц}} = \frac{100 \cdot \sigma_B}{254,96 - 48,041x + 5,458x^2 - 0,209x^3} = g(x).$$

Ця функція $g(x)$ установлює залежність граничного напруження від величини зони граничного стану матеріалу. Далі будемо функцію $f(a)$, яка визначає залежність критичної довжини тріщини від величини напруження σ_0 . Для цього вводимо у зразок тріщину, яка виходить з краю отвору. Цій тріщині надаємо значення $a = 1, 2, 3, 5$ мм.

В основу визначення коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) на базі переміщень покладено формулу

$$K_1 = (2\pi)^{1/2} \frac{(1+\nu)\mu}{4} \lim_{x \rightarrow a-0} \left[\frac{v(x,0) - v(x,-0)}{(a-x)^{1/2}} \right], \quad (1)$$

де ν – коефіцієнт Пуассона; a – довжина тріщини.

Оскільки задачу розглянемо за числовим методом на базі методу скінченних елементів, то формулу (1) будемо використовувати в такому вигляді:

$$K_1 \approx (2\pi)^{1/2} \frac{(1+\nu)\mu}{4} \left[\frac{v(x_0,+\Delta y) - v(x_0,-\Delta y)}{(a-x_0)^{1/2}} \right],$$

де Δy – дуже мала величина.

Як приклад розглянемо послідовність обчислень величини K_1 для випадку, коли довжина тріщини становить 5 мм (табл. 1).

Таблиця 1

v , мм	x , мм	y , мм	z , мм
0,21926	89,5	160	3
0,20196	89,5	159,5	3

$$K_1 = (2\pi)^{1/2} \frac{(1+0,33) \cdot 2,7 \cdot 10^4}{4} \times \frac{(0,21926 - 0,20196) \cdot 10^{-3}}{(0,5 \cdot 10^{-3})^{1/2}} = 17,4 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}.$$

Аналогічно можна обчислити величину K_1 для інших значень довжини тріщини. Результати обчислень наведено в табл. 2.

Таблиця 2

Довжина тріщини a , мм	1	2	3	5
КІН, МПа·м ^{1/2}	14,2	16,0	16,9	17,4

Графік КІН показано на рис. 3.

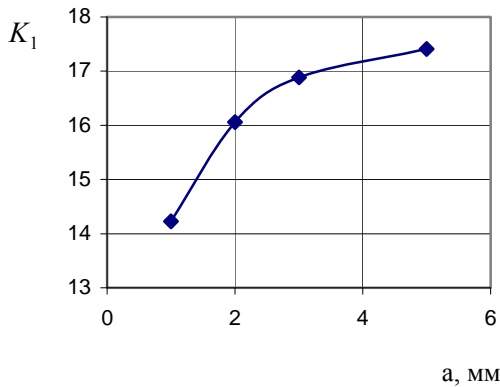


Рис. 3. Графік КІН

За цими даними будемо інтерполяційний поліном для КІН:

$$K_1(a) = 10,92 + 4,203a - 0,974a^2 + 0,079a^3.$$

Цей поліном отримано для $\sigma_0 = 100$ МПа.

Перетворимо його для будь-якого значення σ_0 :

$$K_1(a) = \frac{\sigma_0}{100} \cdot (10,92 + 4,203a - 0,974a^2 + 0,079a^3).$$

Використовуючи умову руйнування Ірвіна, маємо

$$\frac{\sigma_0^{міц}}{100} \cdot (10,92 + 4,203a - 0,974a^2 + 0,079a^3) = K_c.$$

Звідси отримуємо

$$\sigma_0^{міц} = \frac{100 \cdot K_c}{10,92 + 4,203a - 0,974a^2 + 0,079a^3} = f(a).$$

Таким чином, якщо $\sigma_B = 460$ МПа і $K_c = 36$ МПа · м^{1/2}, маємо дві функції $g(a)$ і $f(a)$:

$$g(a) = \frac{100 \cdot 460}{254,96 - 48,041a + 5,45a^2 - 0,209a^3};$$

$$f(a) = \frac{100 \cdot 36}{10,92 + 4,203a - 0,974a^2 + 0,079a^3}.$$

Далі потрібно розв'язати рівняння $g(a) - f(a) = 0$.

Розв'язання цього рівняння зручно виконати графічно (рис. 4).

У результаті знаходимо $\sigma_k = 239,5$ МПа; $a_k = 1,359$ мм.

Коли напруження σ_0 дорівнюватиме $\sigma_0^{міц}$, тріщина досягне критичної величини a_k . Після цього почеться спонтанне розвинення тріщини і нарешті тріщина розповсюдиться вздовж перерізу 1–1 від лівого підкріплювального елемента до правого.

Подібним способом були розглянуті напружений та граничний стани, коли напруження і переміщення обчислювали на зворотному боці

пластини (на якій ребер немає). У результаті було встановлено, що напруження відрізняються від попереднього випадку на 1–2%. Тому ці дані не наведено.

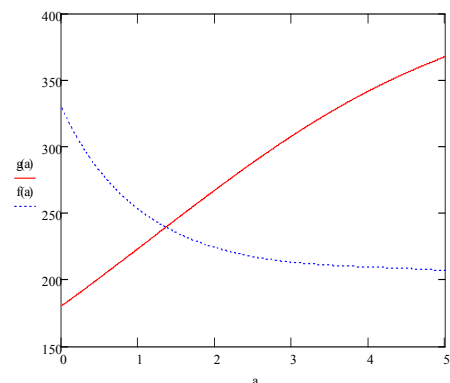


Рис. 4. Графічне розв'язання рівняння $g(a) - f(a) = 0$

Пластина з одним пошкодженим ребром

Розглянемо питання про напружений і граничний стани пластини, коли праве ребро зламане на половині висоти перерізу.

У небезпечному перерізі 1–1 будемо епюру напружень σ_y (рис 5).

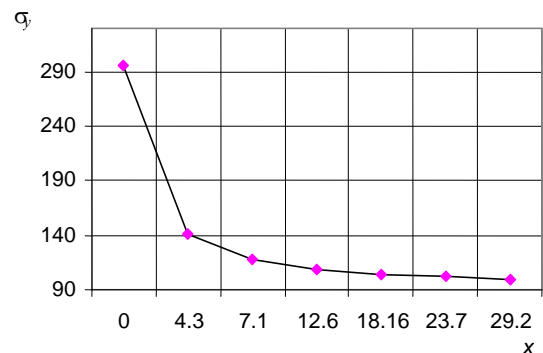


Рис. 5. Епюра напружень σ_y у перерізі 1–1

Згідно з попереднім випадком знаходимо функцію $g'(x)$:

$$\sigma_0^{міц} = \frac{100 \cdot \sigma_B}{29558 - 61644x + 7204x^2 - 0,288x^3} = g'(x).$$

Будемо функцію $f'(a)$. Для цього обчислюємо коефіцієнт інтенсивності напружень K_1 для всіх значень довжини тріщини. Результати обчислень наведено в табл. 3.

Таблиця 3

Довжина тріщини a , мм	1	2	3	5
КІН, МПа · м ^{1/2}	14,95	17,0	17,6	18,6

За даними табл. 3 будуємо графік КІН (рис 6).

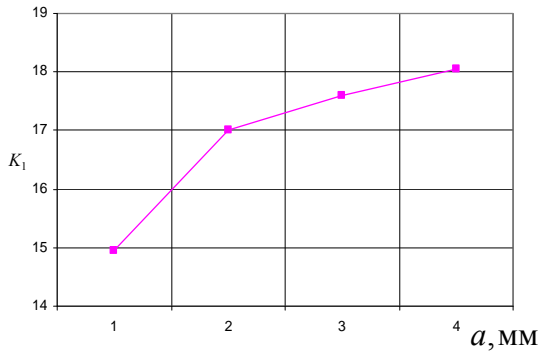


Рис. 6. Графік КІН

За цими даними знаходимо функцію $f'(a)$:

$$\sigma_0^{\text{мін}} = \frac{100 \cdot K_c}{10,14 + 6,627a - 2,035a^2 + 0,218a^3} = f'(a).$$

Таким чином, якщо $\sigma_B = 460$ МПа і $K_c = 36$ МПа \cdot м^{1/2}, маємо дві функції $g'(a)$ і $f'(a)$:

$$g'(a) = \frac{100 \cdot 460}{295,58 - 61,644a + 7,204a^2 - 0,288a^3};$$

$$f'(a) = \frac{100 \cdot 36}{10,14 + 6,627a - 2,035a^2 + 0,218a^3}.$$

Далі потрібно розв'язати рівняння $g''(a) - f''(a) = 0$.

Розв'язок цього рівняння виконуємо графічно (рис. 7).

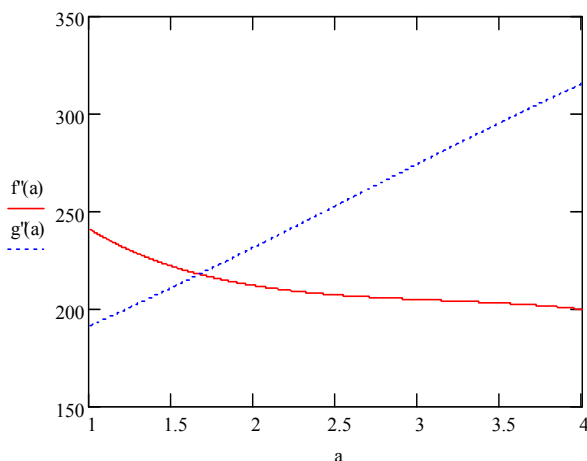


Рис. 7. Графічне розв'язання рівняння $g''(a) - f''(a) = 0$

У результаті знаходимо $a''_k = 1,359$ мм;
 $\sigma''_k = 239,5$ МПа.

Висновки

1. Розглянуто три варіанти розрахунку: пластина з боку ребер, пластина із зовнішнього боку і пластина з пошкодженим ребром.

2. Як свідчать дані розрахунків, напруження і КІН для двох перших варіантів майже збігаються (різниця близько 1–2 %).

3. За наявності пошкодження в ребрі (тріщина на половину висоти ребра) критичне напруження $\sigma''_k = 217,6$ МПа, а критична довжина тріщини $a''_k = 1,669$ мм. Тоді як без пошкодження ребра ці величини відповідно дорівнювали $\sigma''_k = 235,8$ МПа і $a''_k = 1,482$ мм.

4. Наявність пошкодження в ребрі знижує критичне напруження.

Надалі передбачається розв'язати подібну задачу із врахуванням як підкріплювальних елементів, так і температури пластинки.

Отримані результати можна використати в розрахунковій практиці для перевірки на міцність елементів авіаційних конструкцій.

Література

1. Образцов И. Ф., Савельев Л. М., Хазанов Х. С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М.: Высш. шк., 1985. – 392 с.
2. Панасюк В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. – К.: Наук. думка, 1991. – 416 с.
3. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2 т. / Под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – Т.1 – 448 с., Т.2 – 565 с.
4. Строительная механика летательных аппаратов / Под ред. И. Ф. Образцова. – М.: Машиностроение, 1986 – 536 с.
5. Хеллан К. Введение в механику разрушения. – М.: Мир, 1998. – 364 с.
6. Sheikh I. A., Elwi A. E., Grondin G. Y. Stiffened steel plates under combined compression and bending // J. Constr. Steel Res. – 2003. – 59. – №7. – P. 911–930.
7. Yang Li, Sun Qinghong, Zhu Zhuangrui, Xu Zhihuo. Finite element analysis of the free-damped beam-stiffened plate // J. Southeast Univ. – 2004. – 20. – №3. – P. 328–331.
8. Xie M., Chapman J. C. Design of web stiffeners axial forces // J. Constr. Steel Res. – 2003. – 59. – №8. – P. 1035–1056.

Стаття надійшла до редакції 18.12.06.