ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 517.95

І. С. Клюс, канд. фіз.-мат. наук, доц.

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ІНТЕГРОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ, НЕ РОЗВ'ЯЗНИХ СТОСОВНО СТАРШОЇ ПОХІДНОЇ

НАУ, кафедра вищої математики, E-mail: Klyus_i@ukr.net

Досліджено коректність задачі з локальними багатоточковими умовами за часовою змінною для лінійних рівнянь з частинними похідними, не розв'язних стосовно старшої похідної за часом, збурених нелінійним інтегро-диференціальним оператором.

The correctness of a problem with multi–point conditions on temporary variable of linear partial differential equations not solved as to the highest derivative with respect to time, perturbed by the nonlinear integro-differential operator is investigated

Вступ

У цій статті продовжено й розвинено результати, отримані в працях [1–3], на випадок лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, не розв'язних стосовно старшої похідної за часом, збурених нелінійним інтегро-диференціальним оператором.

Постановка завдання

В області $Q=\{(t,x):t\in(0,T),x\in G\}$, де G – обмежена однозв'язна область із R^p, розглядаємо задачу

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n\sum_{s=0}^{l}b_sL^su(t,x)++\sum_{\beta=0}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\beta\sum_{s=0}^{m}\alpha_s^\beta L^su(t,x)=$$

$$=f(t,x)+\varepsilon\int_G K(t,x,y)F(t,y,\bar{u}(t,y))dy, \tag{1}$$

$$u(t_j,x)=0,\ j=1,...,n,\ 0\le t_1<t_2<...<t_n\le T, \tag{2}$$

$$L^iu(t,x)\big|_{\partial G}=0,\ i=0,1,...,\tau-1, \tag{3}$$

де L – оператор, визначений у праці [3], $\varepsilon\in C\setminus\{0\}; \bar{u}=\left\{\frac{\partial^{|\hat{q}|}u}{\partial t^{q_0}\partial x_1^{q_1}\cdots\partial x_p^{q_p}}, q_0\le n, |q|\le 2\tau\right\}$,

$\tau=\max\{m,l\}$; функція $F(t,y,\bar{u})$ визначена та неперервна за всіма змінними в області

$$Q_1=\left\{(t,y,\bar{u}):(t,y)\in\overline{Q},u(t,y)\in\overline{S}(u^0,r)\right\}$$

і задовольняє в ній умову Ліпшіца відносно всіх компонент вектора $\bar{u}$:

$$\left|F(t,x,\bar{u}_2(t,x))-F(t,x,\bar{u}_1(t,x))\right|\le$$

$$\le H\sum_{q_0=0}^{n}\sum_{|q|\le 2\tau}\left|\frac{\partial^{q_0+|q|}u_1(t,x)}{\partial t^{q_0}\partial x_1^{q_1}\cdots\partial x_p^{q_p}}-\frac{\partial^{q_0+|q|}u_2(t,x)}{\partial t^{q_0}\partial x_1^{q_1}\cdots\partial x_p^{q_p}}\right|. \tag{4}$$

Причому $\max_{Q_1}\left|F(t,x,\bar{u})\right|\le M$,

$$\overline{S}(u^0,r)=\left\{u\in C^{(n,2\tau)}(\overline{Q}):\left\|u-u_0\right\|_{C^{(n,2\tau)}}\le r\right\},$$

а функція $u^0\equiv u^0(t,x)$ – розв'язок незбуреної (коли $\varepsilon=0$) задачі (1) – (3), який подано формулою(14) із праці [3]. Функція $K(t,x,y)$ визначена в області $Q_2=\left\{(t,x,y):(t,x)\in\overline{Q},y\in\overline{G}\right\}$.

Припустімо, що $K(t,x,y)$ як функцію змінної x виражено рядом

$$K(t,x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}K_k(t,y)X_k(x); \tag{5}$$

$$K_k(t,y)=\int_G K(t,x,y)X_k(x)dx,\quad k\in N,$$

де $X_k(x)$, $k\in N$ – повна ортонормована система власних функцій.

Розв'язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)X_k(x). \tag{6}$$

Тоді вектор $u_k(t)$, $k\in N$ є розв'язком такої n-точкової задачі для зліченної системи інтегро-диференціальних рівнянь:

$$u_k^{(n)}(t)\sum_{s=0}^{l}b_s\lambda_k^s+\sum_{\beta=0}^{n-1}u_k^{(\beta)}(t)\sum_{s=0}^{m}\alpha_s^\beta\lambda_k^s=$$

$$=f_k(t)+\varepsilon\int_G K_k(t,y)F(t,y,\bar{u}(t,y))dy, \tag{7}$$

$$u_k(t_j)=0,\ j=1,...,n, \tag{8}$$

де

$$\bar{u}(t,y)=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^{q_0}u_k(t)}{\partial t^{q_0}}\frac{\partial^{|q|}X_k(y)}{\partial x_1^{q_1}\cdots\partial x_p^{q_p}},q_0\le n,|q|\le 2\tau\right\} \tag{9}$$

За допомогою функцій Гріна $G_k(t,\tau),k\in N$, визначених формулами (14) із [3], зводимо задачу (7), (8) до еквівалентної їй системи інтегро - диференціальних рівнянь:

$$u_k(t)=\int_0^T G_k(t,\tau)d\tau+\int_{\bar{Q}} G_k(t,\tau)K_k(t,y)F(t,y,\bar{u})dyd\tau. \tag{10}$$

Якщо в області $\bar{Q}\times\bar{Q}$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}G_k(t,\tau)K_k(t,\tau)X_k(x) \tag{11}$$

рівномірно збігається і його сума дорівнює $R(t,x,\tau,y)$, то з рівнянь (6) і (10) випливає, що задача (1)–(3) еквівалентна такому інтегро-диференціальному рівнянню:

$$u(t,x)=u^0(t,x)+\varepsilon\int_{\bar{Q}}R(t,x,\tau,y)F(t,y,\bar{u}(\tau,x))d\tau dy. \tag{12}$$

Розглянемо задачу (1–3) у випадку $m>l$. Позначимо через $C(\bar{Q},B_\delta^\gamma(\bar{G}))$ простір функцій $V(x,t,y)$, визначених і неперервних в області $\bar{Q}\times\bar{G}$, які для кожної фіксованої точки $(t,y)\in\bar{Q}$ належать простору $B_\delta^\gamma(\bar{G})$,

$$\|V\|_{C(\bar{Q},B_\delta^\gamma(\bar{G}))}=\sum_{k=1}^{\infty}\max_{(t,y)}|V_k(t,y)|\exp(\delta\lambda_k^\gamma),$$

де $V_k(t,y)=\int_G V(t,x,y)X_k(x)dx$.

Теорема 1. Нехай справджуються умови теореми 2 з праці [3] і нехай функція $F(t,x,\bar{u})$ задовольняє умову (4), а $K\in C(\bar{Q},B_\delta^\gamma(\bar{G}))$, де $\delta>(2n+1)AT$, $A-$ додатна стала. Тоді для всіх ε, $|\varepsilon|<\varepsilon_0$, для довільного фіксованого η та майже всіх (стосовно міри Лебега в R^{p+n}) векторів $(h,\bar{t})$, де $\bar{t}=(t_1,...,t_n)\in R^n$, існує єдиний розв'язок задачі (1)–(3), який належить замкненій кулі $\bar{S}(u^0,r)\subset C^{(n,2m)}(\bar{Q})$ і неперервно залежить від функції $f(t,x)$, де

$$\varepsilon_0=\min\left\{\frac{r}{BM},\frac{1}{BH}\right\},\ B=WV\|K(t,x,y)\|_{C(\bar{Q},B_\delta^\gamma(\bar{G}))},$$

$V-$ об'єм області G.

Доведення. Застосуємо принцип нерухомої точки Качіополі–Банаха. Позначимо через P_ν – оператора, який визначений на множині функцій $u\in\bar{S}(u^0,r)$, таким чином:

$$P_\nu=\nu(t,x)+\varepsilon\int_{\bar{Q}}\sum_{k=1}^{\infty}G_k(t,\tau)K_k(t,y)X_k(x)F(t,y,\bar{u})dyd\tau, \tag{13}$$

Тоді рівняння (12) запишемо у вигляді

$$u(t,x)=P_{u^0}(u(t,x)).$$

Позначимо через $Z-$ сукупність функцій $\nu\in C^{(n,2m)}(\bar{Q})$ для яких виконується нерівність

$$\|P_\nu-u^0\|_{C^{(n,2m)}(\bar{Q})}\le\beta=r-|\varepsilon|BM.$$

Із кожним $\nu\in Z$ оператор P_ν переводить кулю $\bar{S}(u^0,r)$ у себе. Дійсно,

$$\|P_\nu-u^0\|_{C^{(n,2m)}}\le\|\nu-u^0\|_{C^{(n,2m)}}+$$

$$+\left\|\varepsilon\int_{\bar{Q}}\sum_{k=1}^{\infty}G_k(t,\tau)K_k(t,y)X_k(x)F(t,y,\bar{u})dyd\tau\right\|_{C^{(n,2m)}}\le$$

$$\le\|\nu-u^0\|_{C^{(n,2m)}}+|\varepsilon|J. \tag{14}$$

На підставі формули (14) нерівностей (16–18) із [3] та формули (5) отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в R^{p+n}) векторів $(h,\bar{t})$ справедлива оцінка

$$J\le\sum_{q_0=0}^{n}\sum_{|q|\le 2m}\max_{(t,x)}\left|\int_{\bar{Q}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^{q_0}G_k(t,\tau)}{\partial t^{q_0}}\frac{\partial^{|q_0|}X_k(x)}{\partial x_1^{q_1}\cdots\partial x_p^{q_p}}\times\right.$$

$$\left.\times K_k(\tau,y)F(\tau,y,\bar{u}(\tau,y))dyd\tau\right|\le$$

$$\le MVW\sum_{k=1}^{\infty}\bar{K}_k\exp(\delta\lambda_k^{m-l})=MVW\|K\|_{C(Q,B_\delta^\gamma(G))}=BM,$$

де $\bar{K}_k=\max_{(t,y)}|K_k(t,y)|$.

Отже,

$$\|P_\nu-u^0\|_{C^{(n,2m)}}\le\beta+|\varepsilon|BM=r.$$

Покажемо, що P_ν – оператор стискання. Нехай $u_1,u_2\in\bar{S}(u^0,r)$, а $\nu\in Z$. Тоді для майже всіх векторів $\bar{t}=(t_1,...,t_n)\in R^n$ і майже всіх $\eta\in R^p$:

$$\|P_\nu(u_1)-P_\nu(u_2)\|_{C^{(n,2m)}}\le|\varepsilon|BH\|u_1-u_2\|_{C^{(n,2m)}}\le$$

$$\le\|u_1-u_2\|_{C^{(n,2m)}}.$$

Очевидно, що оператор P_ν неперервний за ν. Із принципу Качіополі–Банаха випливає доведення теореми.

Зауваження. Розв'язок задачі знаходимо як границю за $n \to \infty$ послідовності $\{u_n(t,x)\}$, де $u_0(t,x) = u^0(t,x), u_n(t,x) = P_{u_0}(u_{n-1}(t,x)), \quad n \in N$; P_{u_0} – інтегро-диференціальний оператор, заданий формулою (13), а $u^0(t,x)$ – розв'язок незбуреної задачі (1)–(3), із праці [3].

За допомогою принципу нерухомої точки Шаудера можна довести існування розв'язку задачі (1)–(3) не накладаючи умову Ліпшіца на функцію $F(t,x,\bar{u})$.

Теорема 2. Нехай виконуються умови теореми 1, крім нерівності (4). Тоді для всіх ε, $|\varepsilon| < \varepsilon_1 = r/(BM)$, довільного фіксованого вектора η та майже всіх (стосовно міри Лебега в R^{p+n}) векторів $(h,\bar{t})$, де $\bar{t} = (t_1,...,t_n) \in R^n$, існує єдиний розв'язок задачі (1)–(3), який належить замкненій кулі $\bar{S}(u^0,r) \subset C^{(n,2m)}(\bar{Q})$, де B,M – сталі з теореми 1.

Доведення. Скористаємось принципом нерухомої точки Шаудера. Позначимо $P = P_{u_0}$. Аналогічно, як і в теоремі 1, доводиться , що якщо $|\varepsilon| < \varepsilon_1$, то оператор P переводить опуклу замкнену множину $\bar{S}(u^0,r)$ в себе. Покажемо, що P – неперервний в кулі $\bar{S}(u^0,r)$ оператор. Нехай $u_q(t,x), q \in N$, послідовність функцій з $\bar{S}(u^0,r)$ така, що

$$\|u_q - u_0\|_{C^{(n,2m)}(\bar{Q})} \underset{q\to\infty}{\to} 0.$$

Із неперервності функції $F(t,x,\bar{u})$ в області Q_1 випливає, що для довільного $\sigma > 0$ за достатньо великих q, $q \ge q_0(\sigma)$ виконується нерівність

$$\|Pu_q(t,x) - Pu_0(t,x)\|_{C^{(n,2m)}(\bar{Q})} \le \sigma,$$

тому

$$\|Pu_q(t,x) - Pu_0(t,x)\|_{C^{(n,2m)}(\bar{Q})} \underset{q\to\infty}{\to} 0.$$

Доведемо, що множина $P(\bar{S}(u^0,r)) \equiv P(\bar{S})$ відносно компактна. Для цього треба показати, що функції кожної з множин

$$E_{\hat{s}} = \left\{ \frac{\partial^{|\hat{s}|} z(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}}, z(t,x) \in P(\bar{S}) \right\} s_0 \le n, |s| \le 2m$$

є рівномірно обмежені та одностайно неперервні.

Перше випливає з того, що в області $P(\bar{S}) \subset \bar{S}(u^0,r)$. Покажемо одностайну неперервність функції множини $E_{(0,2m,0,\dots,0)}$ (для функції решти множин доведення аналогічне). Враховуючи формулу (12), ці функції можна записати у вигляді

$$\frac{\partial^{2m} z}{\partial x_1^{2m}} = \frac{\partial^{2m} u^0}{\partial x_1^{2m}} + \varepsilon \int_Q \sum_{k=1}^{\infty} G_k(t,\tau) K_k(t,y) \times$$

$$\times \frac{\partial^{2m} X_k(x)}{\partial x_1^{2m}} F(t,y,\bar{u}(t,y)) dy d\tau.$$

Із рівнянь (5), (6) і умов теореми випливає, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в R^p) векторів h і для майже всіх (стосовно міри Лебега в R^n) векторів $\bar{t}$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_k(t,\tau) K_k(t,\tau) X_k(x)$$

абсолютно і рівномірно збігається в області $\bar{Q} \times \bar{Q}$ до деякої неперервної функції $R(t,x,\tau,y)$. Тоді для будь-якої функції $z \in P(\bar{S})$ справедлива нерівність

$$\left| \frac{\partial^{2m} z(t',x')}{\partial x_1^{2m}} - \frac{\partial^{2m} z(t'',x'')}{\partial x_1^{2m}} \right| \le \left| \frac{\partial^{2m} u^0(t',x')}{\partial x_1^{2m}} - \frac{\partial^{2m} u^0(t'',x'')}{\partial x_1^{2m}} \right| +$$

$$+ |\varepsilon| M \int_Q |R(t,x',\tau,y) - R(t'',x'',\tau,y)| dy d\tau,$$

з якої випливає одностайна неперервність функції з множини $E_{(0,2m,0,\dots,0)}$. Теорему доведено.

Література

1. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
2. *Клюс І. С., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 1999. – 51, №12. – С. 1604–1613.
3. *Клюс І. С.* Багатоточкова задача для диференціальних рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами // Вісн. НАУ. – 2006. – №4. – С. 209–211.

Стаття надійшла до редакції 02.02.07.