УДК 621.391(045)

Ю. О. Єгоршин, канд. техн. наук, доц.
О. Ю. Красноусова, канд. техн. наук, доц.

СПОСІБ ВИЗНАЧЕННЯ ОПЕРАТОРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ПРОЦЕСІВ І СИГНАЛІВ БЕЗ ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ ЛАПЛАСА

НАУ, Інститут електроніки і систем управління, e-mail: fsu@ nau.edu.ua

Запропоновано спосіб, що дозволяє знаходити вирази операторних зображень функцій часу без обчислення інтегралів Лапласа. Цей спосіб зручно використовувати, якщо сигнал чи процес описуються на ділянках неперервності гармонічними, експоненціальними і поліноміальними функціями часу, а також їх комбінаціями.

This method allow us to find the expression of operational representations of processes and signals without calculation of the Laplace's integrals. This method comfortably can be used if process or signal is described on area of regularity by harmonious, exponential and polynomial time functions and also by theirs combinations.

Вступ

Класичний спосіб визначення операторного зображення функції часу $u(t)$ полягає в обчисленні інтеграла Лапласа:

$$L[u(t)] = \int_0^\infty u(t)e^{-pt}dt \ . \qquad (1)$$

Лапласові зображення для похідних функцій часу мають вигляд [1]:

$$\left.\begin{aligned} L\left[u^{(1)}\right] &= pL[u] - u(0); \\ L\left[u^{(2)}\right] &= p^2L[u] - pu(0) - u^{(1)}(0) \end{aligned}\right\} \ldots, \qquad (2)$$

де $u(0)$, $u^{(1)}(0)$ …,– початкові умови.

В окремих випадках за нульових початкових умов з виразу (2) випливає:

$$L\left[u^{(1)}\right] = pL[u], L\left[u^{(2)}\right] = p^2L\left[u^{(2)}\right]\ldots$$

У цих випадках операторне зображення $L[u]$ легко знаходити за зображеннями похідних, якщо останні зображення відомі. У формулах перетворень (2) не використано, принаймні в явному вигляді, ні одиничну функцію Хевісайда $h(t)$, ні імпульсної функції Дірака $\delta(t)$. Разом з тим використання цих узагальнених функцій дозволяє не тільки спростити вираз (2) для зображення похідних, але й запропонувати простий спосіб визначення операторних зображень великого класу функцій часу без обчислення інтегралів Лапласа. Маються на увазі гармонічні, експоненціальні, полінональні функції часу, їх комбінації, а також імпульси, які описуються на ділянках неперервності схожими функціями. Саме такі функції часу відповідають більшості типів перехідних процесів у лінійних електричних колах, а також періодичним процесам перетворення струмів і напруг в нелінійних колах: випрямлячів (діодних і тиристорних), імпульсних регуляторів, безпосередніх перетворювачів частоти, формувачів імпульсів експоненціальної форми і т. ін. Далі обґрунтовуються і пояснюються на прикладах способи визначення операторних зображень функцій часу, які ґрунтуються на використанні властивостей таких узагальнених функцій, як $h(t), \delta(t)$, а також властивостей операторних зображень для похідних функцій часу.

Обґрунтування і суть запропонованого способу

Інтегральне перетворення Лапласа (1) являє собою, по суті, зображення не всієї функції $u(t)$, а її частини:

$$\overset{*}{u}(t) = u(t)h(t)\,, \qquad (3)$$

де $h(t) = 1$ при $t \geq 0$, $h(t) = 0$ при $t > 0$.

Таким чином, можна вважати, що

$$L[u] \equiv L\left[\overset{*}{u}\right]. \qquad (4)$$

Якщо в лапласових виразах для зображень похідних замість функції $u(t)$ використовувати функцію $\overset{*}{u}(t)$, то вирази (2) суттєво спростяться. Дійсно, перша похідна (3)

$$\overset{*}{u}{}^{(1)} = u^{(1)}h(t) + u(0)\delta(t). \qquad (5)$$

Друга похідна для (3) з урахуванням рівняння (5)

$$\overset{*}{u}{}^{(2)} = u^{(2)}h(t) + u^{(1)}(0)\delta(t) + u(0)\delta^{(1)}(t), \qquad (6)$$

де $\delta^{(n)}$ – *n-а* похідна для $\delta(t)$.

З урахуванням формул (2), (4), (5) та (6) можна записати:

$$L\left[\overset{*}{u}{}^{(1)}\right] = pL[u] - u(0) + u(0) = pL[u] = pL\left[\overset{*}{u}\right], \qquad (7)$$

$$\begin{aligned} L\left[\overset{*}{u}{}^{(2)}\right] &= p^2L[u] - pu(0) - u^{(1)}(0) + \\ &+ u^{(1)}(0) + u(0)p = p^2L[u] = p^2L\left[\overset{*}{u}\right], \end{aligned} \qquad (8)$$

оскільки $L[\delta]=1, L[\delta^{(1)}]=p$.

Таким чином, можна показати, що за будь-яких початкових умов

$$L\left[\overset{*}{u}^{(n)}\right]=p^n L[u]=p^n L\left[\overset{*}{u}\right]. \qquad (9)$$

Тепер зазначимо, що існує ряд функцій $\overset{*}{u}(t)$, для яких похідна деякого порядку n приводить до виразу:

$$\overset{*}{u}^{(n)}=k_1\overset{*}{u}+k_2\delta(t)+...+k_{n+2}\delta^{(n)}(t). \qquad (10)$$

Такими є функції включення експоненціальних і гармонічних коливань, а також коливань, описаних поліномами. Для отримання виразу (10) у випадку експоненціальних функцій достатньо використати першу похідну, у випадку гармонічних функцій – другу похідну, у випадку полінома степеня (n–1) – похідну порядку n. Для перших двох типів функцій у формулі (10) $k_1 \neq 0$, тобто початкова функція частково відтворюється при диференціюванні. Для поліноміальної функції n-похідна складається тільки з δ-функцій та їх похідних, тобто $k_1=0$. Відзначимо, що для $\delta^{(n)}(t)$ операторне зображення дорівнює p^n.

Тоді для функції включення експоненціальних коливань $\overset{*}{u}$ можна записати, згідно з рівнянням (9) і (10):

$$L\left[\overset{*}{u}^{(1)}\right]=k_1\cdot L\left[\overset{*}{u}\right]+k_2=pL\left[\overset{*}{u}\right], \qquad (11)$$

звідки випливає:

$$L\left[\overset{*}{u}\right]=\frac{k_2}{p-k_1}. \qquad (12)$$

Для функції включення гармонічних коливань $\overset{*}{u}$ можна записати відповідності до виразів (9) і (10):

$$L\left[\overset{*}{u}^{(2)}\right]=k_1L\left[\overset{*}{u}\right]+k_2+k_3p=p^2L\left[\overset{*}{u}\right], \qquad (13)$$

звідки випливає:

$$L\left[\overset{*}{u}\right]=\frac{k_2+k_3p}{p^2-k_1}. \qquad (14)$$

Для полінома степені n-1=2 можна записати:

$$L\left[\overset{*}{u}^{(3)}\right]=k_2+k_3p+k_4p^2=p^3L\left[\overset{*}{u}\right], \qquad (15)$$

тоді:

$$L\left[\overset{*}{u}\right]=\frac{k_4p^2+k_3p+k_2}{p^3} \text{ і т. д.}$$

Відзначимо, що багато імпульсних сигналів мають двостороннє обмеження в часі. Наприклад, для імпульсу тривалістю τ, який з'являється в момент t = 0, функцію часу можна записати у вигляді

$$\overset{*}{u}(t)=u(t)[h(t)-h(t-\tau)].$$

У разі диференціювання такої функції часу з'являються δ-функції типу $\delta(t)$ і $\delta(t-\tau)$.

Для сигналів і процесів $u(t)$, інтегрованих за Фур'є [1], операторне зображення $L\left[\overset{*}{u}\right]$ дозволяє отримати спектральну щільність $\dot{S}_u^*(\omega)$ через заміни оператора p на $j\omega$.

Для періодичної послідовності імпульсів легко знайти вираз комплексних амплітуд у вигляді $\dot{A}_k=\frac{1}{T}\dot{S}_u(\omega=k\omega_0)$, де $\omega_0=2\pi\cdot\frac{1}{T}$, де T – період. (Якщо $k=0$, необхідно подвоїти значення $\dot{A}_k$.)

Розглянемо приклади використання запропонованого способу (з урахуванням відомих властивостей δ-функції та її похідних [1].

Приклад 1. Експоненціальний імпульс.

Нехай $u(t)=1\cdot e^{-\alpha t}$, якщо $t\geq 0$. Подамо цей сигнал у вигляді $\overset{*}{u}=e^{-\alpha t}h(t)$. Перша похідна $\overset{*}{u}^{(1)}$ становить:

$$\overset{*}{u}^{(1)}=-\alpha e^{-\alpha t}h(t)+\delta(t)=-\alpha\overset{*}{u}(t)+\delta(t).$$

Звідси : $L\left[\overset{*}{u}^{(1)}\right]=-\alpha L\left[\overset{*}{u}\right]+1$.

Прирівнюючи $L\left[\overset{*}{u}^{(1)}\right]$ до виразу (9), маємо згідно з виразом (12) $L\left[\overset{*}{u}\right]=\frac{1}{p+\alpha}$.

Замінивши у виразі $L\left[\overset{*}{u}\right]$ p на $j\omega$, отримаємо спектральну щільність:

$$\dot{S}_u=\frac{1}{\alpha+j\omega}.$$

Особливий випадок. Нехай $u(t)=1\cdot e^{-\alpha|t|}$.

Подамо цей сигнал у вигляді $u(t) = \overset{*}{u}_1(t) + \overset{*}{u}_2(t) = 1 \cdot e^{-\alpha t} h(t) + 1 \cdot e^{\alpha t} h(-t)$.

Отже, тоді $\overset{*}{u}_2(t) = \overset{*}{u}_1(-t)$ і

$$\dot{S}_{\overset{*}{u}2} = \frac{1}{\alpha - j\omega}.$$

Звідси: $\dot{S}_u = \dot{S}^*_{u1} + \dot{S}^*_{u2} = \frac{1}{\alpha + j\omega} + \frac{1}{\alpha - j\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$.

Особливий випадок. Нехай $u(t)$ – періодична послідовність імпульсів типу $1 \cdot e^{-\alpha t} h(t)$, причому $T >> \frac{1}{\alpha}$. Тоді комплексні амплітуди дискретного спектра з урахуванням виразу $\dot{S}_{u1}(\omega)$ дорівнюють:

$$\dot{A}_k = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{\alpha + jk \cdot \frac{2\pi}{T}}; \quad \dot{A}_0 = \frac{2}{\alpha T},$$

$k = 1,\ 2, ...$

Особливий випадок. Заряд конденсатора через резистор від джерела напруги E_0.

Напруга конденсатора, якщо $t \ge 0$, становить

$$u(t) = E_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right), \ \tau = RC.$$

Подамо цей процес у вигляді

$$\overset{*}{u} = E_0 h(t) \left[1 - e^{-t/\tau}\right].$$

Перша похідна процесу $\overset{*}{u}$ дорівнює:

$$\overset{*}{u}^{(1)} = +\frac{E_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot h(t) = -\frac{\overset{*}{u}}{\tau} + \frac{h(t)}{\tau} E_0.$$

Звідси маємо $L\left[\overset{*}{u}^{(1)}\right] = -\frac{1}{\tau} L\left[\overset{*}{u}\right] + \frac{E_0}{p\tau}$.

Якщо $L\left[\overset{*}{u}^{(1)}\right]$ дорівнюватиме $pL\left[\overset{*}{u}\right]$, то тоді $L\left[\overset{*}{u}\right] = \frac{E_0}{(1 + p\tau)p}$.

Приклад 2. Функція включення комплексної експоненти. Нехай $u(t) = 1 \cdot e^{j\omega_0 t}$, якщо $t \ge 0$.

Подамо цей сигнал у вигляді $\overset{*}{u} = e^{j\omega_0 t} h(t)$

Перша похідна:

$$\overset{*}{u}^{(1)} = j\omega_0 e^{j\omega_0 t} h(t) + \delta(t) = j\omega_0 \overset{*}{u} + \delta(t).$$

Звідси $L\left[\overset{*}{u}^{(1)}\right] = j\omega_0 L\left[\overset{*}{u}\right] + 1$.

Прирівнюючи це зображення до виразу $L\left[\overset{*}{u}^{(1)}\right] = pL\left[\overset{*}{u}\right]$, отримаємо:

$$L\left[\overset{*}{u}\right] = \frac{1}{p - j\omega_0}.$$

Для особливого випадку, коли $\overset{*}{u}(t) = 1 \cdot e^{-j\omega_0 t} h(t)$, якщо $t \ge 0$, аналогічним способом отримаємо:

$$L\left[\overset{*}{u}\right] = \frac{1}{p + j\omega_0}.$$

Розглянемо особливий випадок, коли $u(t) = 1 \cdot \cos\omega_0 t$, якщо $t \ge 0$.

Використовуючи запис $\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$, з урахуванням наведених вище виразів, отримаємо

$$L\left[\overset{*}{u}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p - j\omega_0} + \frac{1}{p + j\omega_0}\right].$$

Розглянемо ще один особливий випадок, коли $u(t) = e^{-\alpha t} \cdot \sin\omega_0 t$, якщо $t \ge 0$, тобто мультиплікативну комбінацію експоненціальної і гармонічної функцій.

Подамо цей процес у вигляді:

$$\overset{*}{u}(t) = \frac{1}{2j}\left[e^{-\alpha t} e^{j\omega_0 t} - e^{-\alpha t} e^{-j\omega_0 t}\right] h(t).$$

Використовуючи наведені вище співвідношення, можна записати:

$$L\left[\overset{*}{u}\right] = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{p + \alpha - j\omega_0} + \frac{1}{p + \alpha + j\omega_0}\right].$$

Приклад 3. Додатний імпульс синусоїди (рис. 1).

Подамо цей сигнал, що обмежений зліва і справа у часі, у вигляді

$$\overset{*}{u} = 1 \cdot \sin\omega_0 t\left[h(t) - h(t - \tau)\right],$$

де $\tau = \frac{T_0}{2} = \frac{\pi}{\omega_0}$.

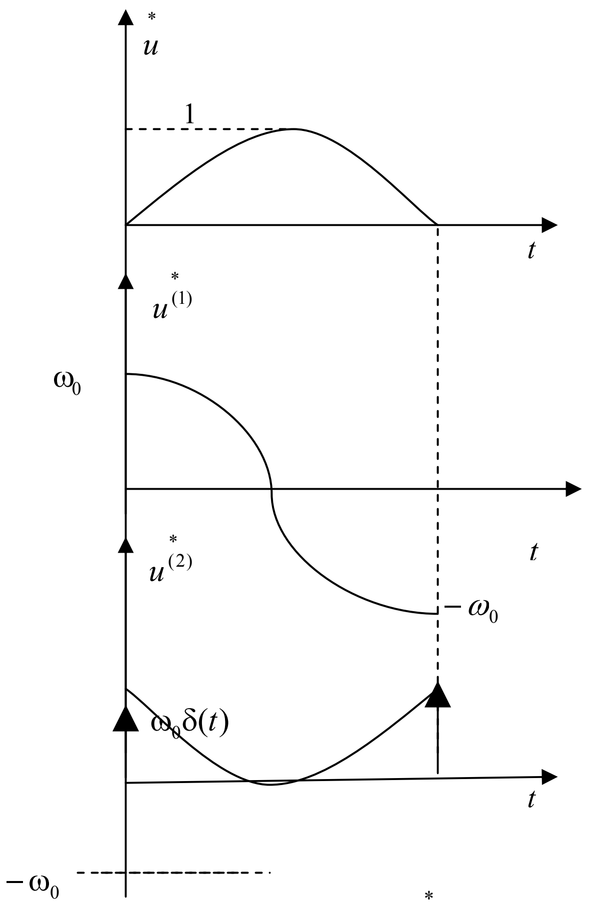

Рис. 1. Імпульс синусоїди $\overset{*}{u}(t)$ і його похідні $\overset{*}{u}^{(1)}$, $\overset{*}{u}^{(2)}$

Запишемо похідні:

$$\overset{*}{u}^{(1)} = \omega_0 \cos\omega_0 t\left[h(t) - h(t-\tau)\right],$$

$$\overset{*}{u}^{(2)} = -\omega_0^2 \sin\omega_0 t\left[h(t) - h(t-\tau)\right] + \omega_0\left[\delta(t) - \delta(t-\tau)\right].$$

З урахуванням виду $\overset{*}{u}^{(2)}$ (рис. 1) маємо:

$$L\left[\overset{*}{u}^{(2)}\right] = -\omega_0^2 L\left[\overset{*}{u}\right] + \omega_0\left[1 + e^{-p\tau}\right].$$

Прирівнюючи отриманий вираз до значення: $p^2 L\left[\overset{*}{u}\right]$, отримаємо:

$$L\left[\overset{*}{u}\right] = \frac{\omega_0\left[1 + e^{-j\omega\tau}\right]}{\omega_0^2 - \omega_0^2}.$$

Замінивши p на $j\omega$, отримаємо спектральну щільність:

$$\dot{S}_{и} \ \frac{\omega_0\left(1 + e^{-j\omega\tau}\right)}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Для періодичної послідовності таких імпульсів, наприклад для двопівперіодного випряму $(T = \frac{T_0}{2})$, комплексна амплітуда $к$-ї гармоніки з урахуванням виразу $\dot{S}_u$ буде дорівнювати:

$$\dot{A}_k = \frac{1}{T} \cdot \frac{2\omega_0}{\omega_0^2 - 4k^2\omega_0^2}, \ k = 1,2,...$$

Приклад 4. Трикутний симетричний імпульс, що описаний поліномами першого степеня.

Подамо цей імпульс у вигляді рис. 2.

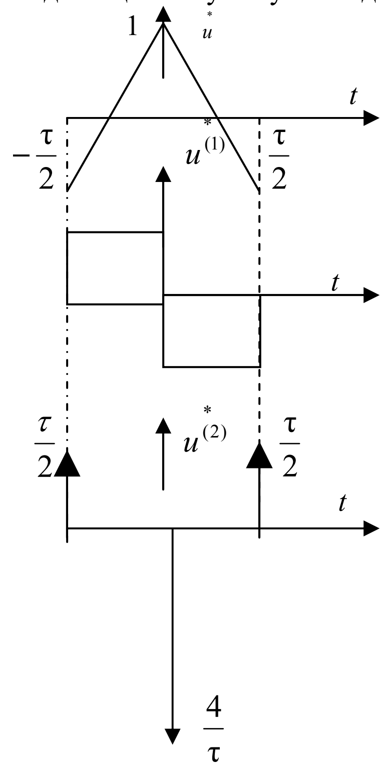

Рис. 2. Імпульс $\overset{*}{u}(t)$ і його похідні

Використовуючи графоаналітичне диференціювання $\overset{*}{u}(t)$ (рис. 2), отримаємо

$$\overset{*}{u}^{(2)} = \frac{2}{\tau}\left[\delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) + \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right] - \frac{4}{\tau}\delta(t).$$

Запишемо зображення $\overset{*}{u}^{(2)}$:

$$L\left[\overset{*}{u}^{(2)}\right] = \frac{2}{\tau}\left[e^{p\frac{\tau}{2}} + e^{-p\frac{\tau}{2}}\right] - \frac{4}{\tau}.$$

Якщо припустити, що отриманий вираз дорівнює $p^2 L\left[\overset{*}{u}\right]$, тоді

$$L\left[\overset{*}{u}\right]=\frac{2}{p^2\tau}\left[e^{-p\frac{\tau}{2}}+e^{p\frac{\tau}{2}}-2\right].$$

Замінивши в останньому виразі p на $j\omega$, отримаємо спектральну щільність імпульсу:

$$\dot{S}_u[\omega]=-\frac{2}{\omega^2\tau}\left[e^{j\omega\frac{\tau}{2}}+e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}-2\right].$$

Знайдемо значення спектра, якщо $\omega=0$.

Застосовуємо правило Лопіталя стосовно $\dot{S}_u(\omega)$:

$$\dot{S}(0)=-2\lim_{\omega\to 0}\frac{e^{j\omega\frac{\tau}{2}}+e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}-2}{\omega^2\tau}=\frac{\tau}{2}.$$

Це значення дорівнює площі імпульсу (рис. 2), як і має бути.

Можна показати, що спектральні щільності сигналів (що неінтегровані відповідно до Фур'є) у загальному випадку мають дві складові. Перша визначається з операторного зображення після заміни оператора p на $j\omega$. Друга складова є виваженою сумою δ-функцій. Наприклад, $L[h(t)]=\frac{1}{p}$, де полюсами для першої складової щільності є значення $\omega=0$. Друга складова щільності має вигляд $\pi\delta(\omega)$. У деяких випадках спектри таких сигналів можуть складатися тільки з однієї складової. Наприклад, для сигналу $y=\frac{1}{2}\mathrm{Sgn}t$ маємо: $\dot{S}_y=\frac{1}{j\omega}$, а для сигналу $u=\cos\omega_0 t$:

$\dot{S}_n=\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$, де полюси $\omega=\pm\omega_0$ – операторне зображення для $\overset{*}{u}=u(t)h(t)$ визначили вигляд δ-функцій.

Висновки

1. Лапласові зображення похідних функцій часу значно спрощують, якщо під час диференціювання враховуються δ-імпульси, які виникають у разі обмеження функції у часі.

2. Для ряду функцій часу, обмежених зліва, їх похідні або частково відтворюють початкову функцію часу, або являють собою суму δ-функцій і їх похідних. Для таких функцій часу операторні зображення можна визначити, розглядаючи похідну функцію часу, а також співвідношення між зображенням функції і її похідної.

3. Запропонований спосіб зручний для визначення операторних зображень майже всіх перехідних процесів в лінійних колах, а також для визначення операторних і спектральних зображень імпульсів і їх періодичних послідовностей, описаних на ділянках неперервності експоненціальними, гармонічними, поліноміальними функціями і їх комбінаціями.

Література

1. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1977. –582 с.

Стаття надійшла до редакції 05.03.07.