УДК 621.39

О. К. Юдін, канд. техн. наук, доц.

ОБҐРУНТУВАННЯ ВЗАЄМООДНОЗНАЧНОСТІ ДВООЗНАКОВОГО СТРУКТУРНОГО ПОДАННЯ ДВІЙКОВИХ ДАНИХ У ПОЛІАДИЧНОМУ ПРОСТОРІ

НАУ, кафедра комп’ютеризованих систем захисту інформації, e-mail: kszi@ukr.net

Доведено взаємооднозначність двоознакового структурного поліадичного кодування двійкових даних.

Reciprocation bi-indication structural polyadic coding is proved.

Вступ

Одна з головних проблем, що виникають у процесі функціонування систем керування й зв’язку, полягає у великих тимчасових затримках на етапах обробки й передачі даних у телекомунікаційних системах [1]. Основна причина зумовлена потребою доведення більших обсягів даних. Для зменшення обсягів даних виконується їх компактне подання. Методи стискання поділяють на два класи: стискання без втрати інформації і стискання із частковою втратою інформації [2; 3]. Найбільший ступінь стискання досягається методом із частковою втратою інформації. Однак у цьому випадку інформація на приймальному боці буде частково безповоротно загублена. Методи першого класу забезпечують взаємооднозначне відновлення, але характеризуються низькими значеннями ступеня стискання. Отже, розроблення методів стискання без унесення похибок є актуальним напрямом досліджень. У праці [4] викладено метод двоознакового структурного подання в поліадичному просторі, що забезпечує виграш за ступенем стискання щодо існуючих методів стискання. Водночас, щоб віднести цей метод стискання до методів першого класу, необхідно довести, що в процесі оброблення інформації похибки не вносяться. Отже, мета статті полягає в доведенні взаємооднозначності двоознакового структурного поліадичного кодування двійкових даних.

Обґрунтування взаємооднозначності двоознакового поліадичного подання двійкових даних

Для того щоб обґрунтувати взаємооднозначність процесу обробки, потрібно довести, що для двоознакового поліадичного числа

$$A(m,\Theta^{(x)})_j:$$

$$A(m,\Theta^{(x)})_j=\{a_{11j},\dots,a_{m_1,1j},\dots,a_{1,\gamma,j},\dots,a_{m_\gamma,\gamma,j},\dots,a_{1Zj},\dots,a_{m_Z,Zj}\} \quad (1)$$

із заданими значеннями довжини послідовності m, обмеженнями Λ на позиції із припустимою появою одиничних елементів і обмеженнями $\Theta^{(x)}$ на кількість серій одиниць у припустимих зонах можна сформувати тільки один код-номер $N\left(m,\Lambda,\Theta^{(x)}\right)_j$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{N}\left(m,\Lambda,\Theta^{(x)}\right)_j=\\
&=\sum_{z=1}^{Z}\sum_{i=1}^{m_z} a_{izj}\,(r^{(x)}_{i-1,zj}-r^{(x)}_{i,zj})\prod_{\varphi=z+1}^{Z}V(\vartheta^{(x)}_{\varphi})=\\
&=\sum_{z=1}^{Z}\Big(a_{1zj}\,(r^{(x)}_{0,zj}-r^{(x)}_{1,zj})+a_{2zj}\,(r^{(x)}_{1,zj}-r^{(x)}_{2,zj})+\\
&\quad\dots+a_{\alpha zj}\,(r^{(x)}_{\alpha-1,zj}-r^{(x)}_{\alpha,zj})+\\
&\quad+\dots+a_{m_z zj}\,(r^{(x)}_{m_z-1,zj}-r^{(x)}_{m_z,zj})\Big)\prod_{\varphi=z+1}^{Z}V(\vartheta^{(x)}_{\varphi})=\\
&=\Big(a_{11j}\,(r^{(x)}_{0,1j}-r^{(x)}_{1,1j})+a_{21j}\,(r^{(x)}_{1,1j}-r^{(x)}_{2,1j})+\\
&\quad\dots+a_{\alpha 1j}\,(r^{(x)}_{\alpha-1,1j}-r^{(x)}_{\alpha,1j})+\\
&\quad+\dots+a_{m_1,1j}\,(r^{(x)}_{m_1-1,1j}-r^{(x)}_{m_1,1j})\Big)\prod_{\varphi=2}^{Z}V(\vartheta^{(x)}_{\varphi})+\\
&\quad+\dots+\Big(a_{1\gamma j}\,(r^{(x)}_{0,\gamma j}-r^{(x)}_{1,\gamma j})+a_{2\gamma j}\,(r^{(x)}_{1,\gamma j}-r^{(x)}_{2,\gamma j})+\\
&\quad\dots+a_{\alpha\gamma j}\,(r^{(x)}_{\alpha-1,\gamma j}-r^{(x)}_{\alpha,\gamma j})+\\
&\quad+\dots+a_{m_\gamma,\gamma j}\,(r^{(x)}_{m_\gamma-1,\gamma j}-r^{(x)}_{m_\gamma,\gamma j})\Big)\prod_{\varphi=\gamma+1}^{Z}V(\vartheta^{(x)}_{\varphi})+\\
&+\dots+\Big(a_{1Zj}\,(r^{(x)}_{0,Zj}-r^{(x)}_{1,Zj})+\\
&+a_{2Zj}\,(r^{(x)}_{1,Zj}-r^{(x)}_{2,Zj})+\dots+a_{\alpha Zj}\,(r^{(x)}_{\alpha-1,Zj}-r^{(x)}_{\alpha,Zj})+\\
&\quad+\dots+a_{m_Z,Zj}\,(r^{(x)}_{m_Z-1,Zj}-r^{(x)}_{m_Z,Zj})\Big),
\end{aligned} \qquad (2)$$

де $\Theta^{(x)}$ – вектор обмежень на кількість серій одиниць у припустимих зонах

$$\Theta^{(x)}=\{\vartheta^{(x)}_1,\dots,\vartheta^{(x)}_z,\dots,\vartheta^{(x)}_Z\};$$

$\vartheta^{(x)}_z$ – кількість серій одиниць в z-й припустимій зоні оброблюваної послідовності;

m_z – кількість двійкових елементів в z-й припустимій зоні; $\Lambda=\{\lambda_i\}_{i=\overline{1,m}}$;

a_{izj} – елемент двійкового двоознакового поліадичного числа $A(m,\Theta^{(x)})_j$;

$r^{(x)}_{i,z\,j}$ – величина, що дорівнює кількості двійкових комбінацій, складених з $(m_z - i + 1)$ елементів за умови $a_{i\,z\,j} = 0$, а кількість серій одиниць дорівнює $\beta^{(x)}_i$:

$$r^{(x)}_{i,z\,j} = \frac{(m_z - i + 1)\,!}{(\beta^{(x)}_{i\,z\,j})!\;(m_z - i + 1 - \beta^{(x)}_{i\,z\,j})\,!};$$

$\beta^{(x)}_{i\,z\,j}$ – рекурентний параметр, дорівнює кількості двійкових перепадів (переходів між «0» і «1») для послідовності, що складається з $(m_z - i + 1)$ неопрацьованих елементів.

Теорема про взаємооднозначності двоознакового структурного подання двійкових даних у поліадичному просторі

Для обраного лексикографічного правила нумерації, заданих обмежень на кількість серій одиниць у кожній припустимій зоні й на розміщення одиничних елементів для двійкової послідовності $A(m, \Theta^{(x)})_j$ (поданої записом (1)) можна сформувати тільки один код-номер $N(m, \Lambda, \vartheta)_j$, заданий співвідношенням (2).

Доведення. Припустімо протилежне, тобто те, що знайдеться як мінімум один елемент, для якого виконується нерівність

$$a_{i\gamma\,j} \neq a^{\bullet}_{i\gamma\,j}.$$

У цьому випадку щонайменше два двоознакові двійкові поліадичні числа $A(m, \Theta^{(x)})_j$ й $A^{\bullet}(m, \Theta^{(x)})_j$ з рівними m, обмеженнями $\Theta^{(x)}$, Λ будуть мати однакове значення коду-номера

$$N\left(m, \Lambda, \Theta^{(x)}\right)_j = N\left(m, \Lambda, \Theta^{(x)}\right)^{\bullet}_j;$$

$$N\left(m, \Lambda, \Theta^{(x)}\right)_j = \sum_{z=1}^{Z} \sum_{i=1}^{m_z} a_{i\,z\,j}\,(r^{(x)}_{i-1,z\,j} - r^{(x)}_{i,z\,j}) \times$$

$$\times \prod_{\varphi=z+1}^{Z} V(\vartheta^{(x)}_{\varphi});$$

$$N\left(m, \Lambda, \Theta^{(x)}\right)^{\bullet}_j =$$

$$= \sum_{z=1}^{Z} \sum_{i=1}^{m_z} a^{\bullet}_{i\,z\,j}\,(r^{(x)}_{i-1,z\,j} - r^{(x)}_{i,z\,j}) \prod_{\varphi=z+1}^{Z} V(\vartheta^{(x)}_{\varphi}), \qquad (3)$$

де $a^{\bullet}_{i\,z\,j}$ – двійковий елемент двоознакового поліадичного числа $A^{\bullet}(m, \Theta^{(x)})_j$. Подамо вираз (3) для коду-номера $N\left(m, \Lambda, \Theta^{(x)}\right)^{\bullet}_j$ у вигляді (2):

$$N\left(m, \Lambda, \Theta^{(x)}\right)^{\bullet}_j =$$

$$= \sum_{z=1}^{Z} \sum_{i=1}^{m_z} a^{\bullet}_{i\,z\,j}\,(r^{(x)}_{i-1,z\,j} - r^{(x)}_{i,z\,j}) \prod_{\varphi=z+1}^{Z} V(\vartheta^{(x)}_{\varphi}) =$$

$$= \sum_{z=1}^{Z} \Big(a^{\bullet}_{1z\,j}\,(r^{(x)}_{0,z\,j} - r^{(x)}_{1,z\,j}) +$$

$$+ a^{\bullet}_{2z\,j}\,(r^{(x)}_{1,z\,j} - r^{(x)}_{2,z\,j}) + \ldots + a^{\bullet}_{\alpha z\,j}\,(r^{(x)}_{\alpha-1,z\,j} - r^{(x)}_{\alpha,z\,j}) +$$

$$+ \ldots + a^{\bullet}_{m_z,z\,j}\,(r^{(x)}_{m_z-1,z\,j} - r^{(x)}_{m_z,z\,j}) \Big) \prod_{\varphi=z+1}^{Z} V(\vartheta^{(x)}_{\varphi}) =$$

$$= \Big(a^{\bullet}_{11\,j}\,(r^{(x)}_{0,1\,j} - r^{(x)}_{1,1\,j}) + a^{\bullet}_{21\,j}\,(r^{(x)}_{1,1\,j} - r^{(x)}_{2,1\,j}) + \ldots +$$

$$+ a^{\bullet}_{\alpha 1}\,(r^{(x)}_{\alpha-1,1\,j} - r^{(x)}_{\alpha,1\,j}) +$$

$$+ \ldots + a^{\bullet}_{m_1,1j}\,(r^{(x)}_{m_1-1,1\,j} - r^{(x)}_{m_1,1\,j}) \Big) \prod_{\varphi=2}^{Z} V(\vartheta^{(x)}_{\varphi}) +$$

$$+ \ldots + \Big(a^{\bullet}_{1\gamma\,j}\,(r^{(x)}_{0,\gamma\,j} - r^{(x)}_{1,\gamma\,j}) + a^{\bullet}_{2\gamma\,j}\,(r^{(x)}_{1,\gamma\,j} - r^{(x)}_{2,\gamma\,j}) +$$

$$+ \ldots + a^{\bullet}_{\alpha\gamma\,j}\,(r^{(x)}_{\alpha-1,\gamma\,j} - r^{(x)}_{\alpha,\gamma\,j}) +$$

$$+ \ldots + a^{\bullet}_{m_\gamma,\gamma j}\,(r^{(x)}_{m_\gamma-1,\gamma\,j} - r^{(x)}_{m_\gamma,\gamma\,j}) \Big) \prod_{\varphi=\gamma+1}^{Z} V(\vartheta^{(x)}_{\varphi}) +$$

$$+ \ldots + \Big(a^{\bullet}_{1Z\,j}\,(r^{(x)}_{0,Z\,j} - r^{(x)}_{1,Z\,j}) + a^{\bullet}_{2Z\,j}\,(r^{(x)}_{1,Z\,j} - r^{(x)}_{2,Z\,j}) +$$

$$\ldots + a^{\bullet}_{\alpha Z\,j}\,(r^{(x)}_{\alpha-1,Z\,j} - r^{(x)}_{\alpha,Z\,j}) +$$

$$+ \ldots + a^{\bullet}_{m_Z,Z\,j}\,(r^{(x)}_{m_Z-1,Z\,j} - r^{(x)}_{m_Z,Z\,j}) \Big).$$

Припустімо без втрати спільності, що існує такий найменший індекс α двійкового елемента, для якого виконується нерівність

$$a_{\alpha\gamma\,j} > a^{\bullet}_{\alpha\gamma\,j}. \qquad (4)$$

Величини $r^{(x)}_{i,z\,j}$ й $r^{(x)\bullet}_{i,z\,j}$ залежать від кількості серій одиниць $\vartheta^{(x)}_z$ і від значень попередніх елементів. Оскільки $a_{i\gamma\,j} = a^{\bullet}_{i\gamma\,j}$, для $i = \overline{1, \alpha - 1}$, $\vartheta^{(x)}_z$ – за умовою теореми однакове, то $r^{(x)}_{i,z\,j} = r^{(x)\bullet}_{i,z\,j}$ для $i = \overline{1, \alpha}$. Віднімемо із правих частин виразів (2) і (4) доданки з однаковими двійковими елементами, і позначимо відповідно через величини $Q(\alpha, \gamma)$ й $Q^{\bullet}(\alpha, \gamma)$ суми доданків, що залишилися:

$$Q(\alpha, \gamma) = a_{\alpha\gamma\,j}\,(r^{(x)}_{\alpha-1,\gamma\,j} - r^{(x)}_{\alpha,\gamma\,j}) +$$

$$+ \ldots + a_{m_\gamma,\gamma j}\,(r^{(x)}_{m_\gamma-1,\gamma\,j} - r^{(x)}_{m_\gamma,\gamma\,j}) \Big) \prod_{\varphi=\gamma+1}^{Z} V(\vartheta^{(x)}_{\varphi})$$

$$+ \ldots + \Big(a_{1Z\,j}\,(r^{(x)}_{0,Z\,j} - r^{(x)}_{1,Z\,j}) + a_{2Z\,j}\,(r^{(x)}_{1,Z\,j} - r^{(x)}_{2,Z\,j}) +$$

$$\ldots + a_{\alpha Z\,j}\,(r^{(x)}_{\alpha-1,Z\,j} - r^{(x)}_{\alpha,Z\,j}) +$$

$$+\ldots+a_{m_Z,Zj}\left(r^{(x)}_{m_Z-1,Zj}-r^{(x)}_{m_Z,Zj}\right)\Big);$$

$$Q^{\bullet}(\alpha,\gamma)=\begin{pmatrix} a^{\bullet}_{\alpha\gamma j}\left(r^{(x)}_{\alpha-1,\gamma j}-r^{(x)}_{\alpha,\gamma j}\right)+ \\ \ldots+a^{\bullet}_{m_\gamma,\gamma j}\left(r^{(x)}_{m_\gamma-1,\gamma j}-r^{(x)}_{m_\gamma,\gamma j}\right)\Big)\prod_{\phi=\gamma+1}^{Z}V\left(\vartheta^{(x)}_{\phi}\right)^{+}\end{pmatrix}$$

$$+\ldots+\Big(a^{\bullet}_{1Zj}\left(r^{(x)}_{0,Zj}-r^{(x)}_{1,Zj}\right)+a^{\bullet}_{2Zj}\left(r^{(x)}_{1,Zj}-r^{(x)}_{2,Zj}\right)$$

$$+\ldots+a^{\bullet}_{\alpha Zj}\left(r^{(x)}_{\alpha-1,Zj}-r^{(x)}_{\alpha,Zj}\right)+$$

$$+\ldots+a^{\bullet}_{m_Z,Zj}\left(r^{(x)}_{m_Z-1,Zj}-r^{(x)}_{m_Z,Zj}\right)\Big).$$

Оскільки передбачається, що для двійкових елементів $a_{\alpha\gamma j}$ і $a^{\bullet}_{\alpha\gamma j}$, з одного боку, виконується нерівність $a_{\alpha\gamma j} > a^{\bullet}_{\alpha\gamma j}$, а з другого боку, $a_{\alpha\gamma j}\in\{0;1\}$, $a^{\bullet}_{\alpha\gamma j}\in\{0;1\}$, то $a_{\alpha\gamma j}=1$, а $a^{\bullet}_{\alpha\gamma j}=0$. Тоді значення величин $Q(\alpha,\gamma)$ і $Q^{\bullet}(\alpha,\gamma)$ відповідно дорівнює:

$$Q(\alpha,\gamma)=\Big(1\left(r^{(x)}_{\alpha-1,\gamma j}-r^{(x)}_{\alpha,\gamma j}\right)+$$

$$+\ldots+a_{m_\gamma,\gamma j}\left(r^{(x)}_{m_\gamma-1,\gamma j}-r^{(x)}_{m_\gamma,\gamma j}\right)\Big)\prod_{\varphi=\gamma+1}^{Z}V\left(\vartheta^{(x)}_{\varphi}\right)+$$

$$+\ldots+\Big(a_{1Zj}\left(r^{(x)}_{0,Zj}-r^{(x)}_{1,Zj}\right)+a_{2Zj}\left(r^{(x)}_{1,Zj}-r^{(x)}_{2,Zj}\right)+\ldots$$

$$+a_{\alpha Zj}\left(r^{(x)}_{\alpha-1,Zj}-r^{(x)}_{\alpha,Zj}\right)+$$

$$+\ldots+a_{m_Z,Zj}\left(r^{(x)}_{m_Z-1,Zj}-r^{(x)}_{m_Z,Zj}\right)\Big).$$

$$Q^{\bullet}(\alpha,\gamma)=\begin{pmatrix} a^{\bullet}_{\alpha+1,\gamma j}\left(r^{(x)}_{\alpha,\gamma j}-r^{(x)}_{\alpha+1,\gamma j}\right)+ \\ \ldots+a^{\bullet}_{m_\gamma,\gamma j}\left(r^{(x)}_{m_\gamma-1,\gamma j}-r^{(x)}_{m_\gamma,\gamma j}\right)\end{pmatrix}\times$$

$$\times\prod_{\varphi=\gamma+1}^{Z}V\left(\vartheta^{(x)}_{\varphi}\right)+$$

$$+\ldots+\Big(a^{\bullet}_{1Zj}\left(r^{(x)}_{0,Zj}-r^{(x)}_{1,Zj}\right)+a^{\bullet}_{2Zj}\left(r^{(x)}_{1,Zj}-r^{(x)}_{2,Zj}\right)+$$

$$\ldots+a^{\bullet}_{\alpha Zj}\left(r^{(x)}_{\alpha-1,Zj}-r^{(x)}_{\alpha,Zj}\right)+$$

$$+\ldots+a^{\bullet}_{m_Z,Zj}\left(r^{(x)}_{m_Z-1,Zj}-r^{(x)}_{m_Z,Zj}\right)\Big).\qquad(5)$$

Покажемо, що залишкове значення кодуномера $Q^{\bullet}(\alpha,\gamma)$ для $\left((m_\gamma-\alpha+1)+\sum_{\varphi=\gamma+1}^{Z}m\varphi\right)$ елементів у припущенні, що $a^{\bullet}_{\alpha\gamma j}=0$, обмежена зверху величиною

$$Q^{\bullet}(\alpha,\gamma)\le\Big(r^{(x)}_{\alpha,\gamma j}\left(a^{\bullet}_{\alpha\gamma j}=0\right)-1\Big)\prod_{\varphi=\gamma+1}^{Z}V\left(\vartheta^{(x)}_{\varphi}\right)+$$

$$+\Big(a^{\bullet}_{1,\gamma+1,j}\left(r^{(x)}_{0,\gamma+1,j}-r^{(x)}_{1,\gamma+1,j}\right)+\ldots+$$

$$+a^{\bullet}_{m_{\gamma+1},\gamma+1,j}\left(r^{(x)}_{m_{\gamma+1},-1,\gamma+1,j}-r^{(x)}_{m_{\gamma+1},\gamma+1,j}\right)\Big)\prod_{\phi=\gamma+2}^{Z}V\left(\vartheta^{(x)}_{\phi}\right)+$$

$$+\ldots+\Big(a^{\bullet}_{1Zj}\left(r^{(x)}_{0,Zj}-r^{(x)}_{1,Zj}\right)+a^{\bullet}_{2Zj}\left(r^{(x)}_{1,Zj}-r^{(x)}_{2,Zj}\right)+\ldots$$

$$+a^{\bullet}_{\alpha Zj}\left(r^{(x)}_{\alpha-1,Zj}-r^{(x)}_{\alpha,Zj}\right)+$$

$$+\ldots+a^{\bullet}_{m_Z,Zj}\left(r^{(x)}_{m_Z-1,Zj}-r^{(x)}_{m_Z,Zj}\right)\Big).\qquad(6)$$

З урахуванням того, що $N(\vartheta^{(x)}_{z})^{\bullet}=\sum_{i=1}^{m_z}a^{\bullet}_{izj}\left(r^{(x)\bullet}_{i-1,zj}-r^{(x)\bullet}_{i,zj}\right)$, то для $z=\overline{\gamma+1,Z}$

$$Q^{\bullet}(\alpha,\gamma)\le\Big(r^{(x)}_{\alpha,\gamma j}\left(a^{\bullet}_{\alpha\gamma j}=0\right)-1\Big)\times$$

$$\times\prod_{\varphi=\gamma+1}^{Z}V\left(\vartheta^{(x)}_{\varphi}\right)+N\left(\vartheta^{(x)}_{\gamma+1}\right)^{\bullet}\prod_{\varphi=\gamma+2}^{Z}V\left(\vartheta^{(x)}_{\varphi}\right)+$$

$$+N\left(\vartheta^{(x)}_{Z-1}\right)^{\bullet}V\left(\vartheta^{(x)}_{Z}\right)+N\left(\vartheta^{(x)}_{Z}\right)^{\bullet}.$$

Для цього перетворимо формулу (5) з урахуванням того, що для $z=\overline{\gamma+1,Z}$ значення сум у дужках замінюється величиною $N(\vartheta^{(x)}_{z})^{\bullet}$, рівною $N(\vartheta^{(x)}_{z})^{\bullet}=\sum_{i=1}^{m_z}a^{\bullet}_{izj}\left(r^{(x)\bullet}_{i-1,zj}-r^{(x)\bullet}_{i,zj}\right)$, до вигляду:

$$Q^{\bullet}(\alpha,\gamma)=\begin{pmatrix} a^{\bullet}_{\alpha+1,\gamma j}\left(r^{(x)}_{\alpha,\gamma j}-r^{(x)}_{\alpha+1,\gamma j}\right)+\ldots+a^{\bullet}_{m_\gamma,\gamma j}\left(r^{(x)}_{m_\gamma-1,\gamma j}-r^{(x)}_{m_\gamma,\gamma j}\right)\Big) \\ \prod_{\varphi=\gamma+1}^{Z}V\left(\vartheta^{(x)}_{\varphi}\right)+\end{pmatrix}$$

$$+N\left(\vartheta^{(x)}_{\gamma+1}\right)^{\bullet}\prod_{\varphi=\gamma+2}^{Z}V\left(\vartheta^{(x)}_{\varphi}\right)+$$

$$+N\left(\vartheta^{(x)}_{Z-1}\right)^{\bullet}V\left(\vartheta^{(x)}_{Z}\right)+N\left(\vartheta^{(x)}_{Z}\right)^{\bullet}=$$

$$=\Big(a^{\bullet}_{\alpha+1,\gamma j}r^{(x)}_{\alpha,\gamma j}+$$

$$-a^{\bullet}_{\alpha+1,\gamma j}r^{(x)\bullet}_{\alpha+1,\gamma j}+a^{\bullet}_{\alpha+2,\gamma j}r^{(x)\bullet}_{\alpha+1,\gamma j}-a^{\bullet}_{\alpha+2,\gamma j}r^{(x)\bullet}_{\alpha+2,\gamma j}+$$

$$\ldots+a^{\bullet}_{m_\gamma,\gamma j}r^{(x)\bullet}_{m_\gamma-1,\gamma j}-$$

$$-a^{\bullet}_{m_\gamma,\gamma j}r^{(x)\bullet}_{m_\gamma,\gamma j}\Big)\prod_{\varphi=\gamma+1}^{Z}V\left(\vartheta^{(x)}_{\varphi}\right)+$$

$$+N\left(\vartheta^{(x)}_{\gamma+1}\right)^{\bullet}\prod_{\varphi=\gamma+2}^{Z}V\left(\vartheta^{(x)}_{\varphi}\right)+N\left(\vartheta^{(x)}_{Z-1}\right)^{\bullet}V\left(\vartheta^{(x)}_{Z}\right)+$$

$$+N\left(\vartheta^{(x)}_{Z}\right)^{\bullet}=\Big(a^{\bullet}_{\alpha+1,\gamma j}r^{(x)}_{\alpha,\gamma j}-\left(a^{\bullet}_{\alpha+1,\gamma j}-a^{\bullet}_{\alpha+2,\gamma j}\right)r^{(x)\bullet}_{\alpha+1,\gamma j}-$$

$$-\left(a^{\bullet}_{\alpha+2,\gamma j}-a^{\bullet}_{\alpha+3,\gamma j}\right)r^{(x)\bullet}_{\alpha+2,\gamma j}-$$

$$\ldots-\left(a^{\bullet}_{m_\gamma-1,\gamma j}-a^{\bullet}_{m_\gamma,\gamma j}\right)r^{(x)\bullet}_{m_\gamma-1,\gamma j}-$$

$$- a^{\bullet}_{m_\gamma,\gamma j}\, r^{(x)\bullet}_{m_\gamma,\gamma j} \Big) \prod_{\varphi=\gamma+1}^{Z} V(\vartheta^{(x)}_{\varphi}) +$$

$$+ N(\vartheta^{(x)}_{\gamma+1})^{\bullet} \prod_{\varphi=\gamma+2}^{Z} V(\vartheta^{(x)}_{\varphi}) + N(\vartheta^{(x)}_{Z-1})^{\bullet}\, V(\vartheta^{(x)}_{Z}) +$$

$$+ N(\vartheta^{(x)}_{Z})^{\bullet}. \qquad (7)$$

З аналізу виразу (7) треба, щоб величина в правій частині цього співвідношення набула максимального значення у випадку, коли всі елементи $a^{\bullet}_{i\gamma j}$, де $i = \overline{\alpha+1,\, m_\gamma}$, будуть дорівнювати **1**, тобто:

$$Q^{\bullet}(\alpha,\gamma) \le \big(r^{(x)}_{\alpha,\gamma j} - r^{(x)}_{m_\gamma,\gamma j} \big) \prod_{\varphi=\gamma+1}^{Z} V(\vartheta^{(x)}_{\varphi}) +$$

$$+ N(\vartheta^{(x)}_{\gamma+1})^{\bullet} \prod_{\varphi=\gamma+2}^{Z} V(\vartheta^{(x)}_{\varphi}) +$$

$$+ N(\vartheta^{(x)}_{Z-1})^{\bullet}\, V(\vartheta^{(x)}_{Z}) + N(\vartheta^{(x)}_{Z})^{\bullet}. \qquad (8)$$

Причому знак рівності у виразі (8) буде тоді й тільки тоді, коли значення елементів в γ-й зоні для $i = \overline{\alpha+1,\, m_\gamma}$ дорівнюватимуть **1**, $a^{\bullet}_{i\gamma j} = 1$.

З урахуванням того, що $r^{(x)}_{m_\gamma,\gamma j} = 1$, а величина $r^{(x)}_{\alpha,\gamma j}$ обчислюється в припущенні нульового значення (α,γ,j)-го елемента $a^{\bullet}_{\alpha,\gamma j} = 0$, одержимо

$$Q^{\bullet}(\alpha,\gamma) < r^{(x)}_{\alpha,\gamma j}(a^{\bullet}_{\alpha,\gamma j} = 0) \prod_{\varphi=\gamma+1}^{Z} V(\vartheta^{(x)}_{\varphi}) +$$

$$+ N(\vartheta^{(x)}_{\gamma+1})^{\bullet} \prod_{\varphi=\gamma+2}^{Z} V(\vartheta^{(x)}_{\varphi}) +$$

$$+ N(\vartheta^{(x)}_{Z-1})^{\bullet}\, V(\vartheta^{(x)}_{Z}) + N(\vartheta^{(x)}_{Z})^{\bullet}. \qquad (9)$$

Отже, нерівність (6) виконується. Відповідно до обраного лексикографічного правила [4] встановлення порядкових номерів двійкових послідовностей із двох послідовностей $A(\alpha,\gamma)$ і $A^{\bullet}(\alpha,\gamma)$, що складаються з $\left((m_\gamma - \alpha + 1) + \sum_{\varphi=\gamma+1}^{Z} m_\varphi \right)$ елементів:

$$A(\alpha,\gamma) = \{ a_{\alpha\gamma j}, \ldots, a_{m_\gamma,\gamma j}, a_{1,\gamma+1,j}, \ldots$$
$$\ldots, a_{m_{\gamma+1},\gamma+1,j}, \ldots, a_{1Zj}, \ldots, a_{m_Z,Zj} \};$$

$$A^{\bullet}(\alpha,\gamma) = \{ a^{\bullet}_{\alpha\gamma j}, \ldots, a^{\bullet}_{m_\gamma,\gamma j}, a^{\bullet}_{1,\gamma+1}, \ldots$$
$$\ldots, a^{\bullet}_{m_{\gamma+1},\gamma+1,j}, \ldots, a^{\bullet}_{1Zj}, \ldots, a^{\bullet}_{m_Z,Z,j} \},$$

порядковий номер буде більшими для тієї підпослідовності, у якої старший елемент має більше значення. Оскільки за умовою $a_{\alpha\gamma j} > a^{\bullet}_{\alpha\gamma j}$, то $N(A(\alpha,\gamma)) > N(A^{\bullet}(\alpha,\gamma))$. Відповідно до нерівності (9) сумарна кількість двійкових послідовностей, що містять в γ-й припустимій зоні $\beta^{(x)}_{\alpha\gamma}$ кількість серій одиниць і початковий елемент $a^{\bullet}_{\alpha z j} = 0$, а в інших зонах з індексами $\varphi = \overline{\gamma+1, Z}$ що мають відповідно довжину m_ϕ й кількість серій одиниць $\vartheta^{(x)}_{\phi}$, дорівнює такій величині:

$$r^{(x)}_{\alpha,\gamma j}(a^{\bullet}_{\alpha,\gamma j} = 0) \prod_{\varphi=\gamma+1}^{Z} V(\vartheta^{(x)}_{\varphi}) +$$

$$+ N(\vartheta^{(x)}_{\gamma+1})^{\bullet} \prod_{\varphi=\gamma+2}^{Z} V(\vartheta^{(x)}_{\varphi}) +$$

$$+ N(\vartheta^{(x)}_{Z-1})^{\bullet}\, V(\vartheta^{(x)}_{Z}) + N(\vartheta^{(x)}_{Z})^{\bullet}. \qquad (10)$$

Водночас за умовою підпослідовність $A(\alpha,\gamma)$ містить у припустимих зонах така ж кількість одиниць і кількість елементів, як і підпослідовність $A^{\bullet}(\alpha,\gamma)$, але перший елемент дорівнює **1**, $a_{\alpha\gamma j} = 1$. Отже, мінімальний номер підпослідовності, що має кількість серій одиниць $\beta^{(x)}_{\alpha}$ і початковий елемент $a_{\alpha\gamma j} = 1$, дорівнює величині (10). Тому для значення коду-номера $Q(\alpha,\gamma)$ двійкової підпослідовності, що складається з $\left((m_\gamma - \alpha + 1) + \sum_{\varphi=\gamma+1}^{Z} m_\varphi \right)$ елементів з початковим елементом, рівним $a_{\alpha\gamma j} = 1$ і кількістю серій $\beta^{(x)}_{\alpha}$ в γ-й припустимій зоні та в зонах з індексами $\phi = \overline{\gamma+1, Z}$, що мають відповідно довжину m_ϕ й кількість серій одиниць $\vartheta^{(x)}_{\phi}$, виконується нерівність

$$Q(\alpha,\gamma) \ge r^{(x)}_{\alpha,\gamma j}(a^{\bullet}_{\alpha,\gamma j} = 0) \prod_{\varphi=\gamma+1}^{Z} V(\vartheta^{(x)}_{\varphi})$$

$$+ N(\vartheta^{(x)}_{\gamma+1})^{\bullet} \prod_{\varphi=\gamma+2}^{Z} V(\vartheta^{(x)}_{\varphi}) +$$

$$+ N(\vartheta^{(x)}_{Z-1})^{\bullet}\, V(\vartheta^{(x)}_{Z}) + N(\vartheta^{(x)}_{Z})^{\bullet}. \qquad 11)$$

У зв'язку з тим, що в правих частинах співвідношень (6) і (11) та сама величина, то виконується нерівність

$$Q(\alpha,\gamma) > Q^{\bullet}(\alpha,\gamma). \qquad (12)$$

За аналогією з розглядуваним випадком, коли нерівність $a_{\alpha\gamma j} > a^{\bullet}_{\alpha\gamma j}$ виконується для α-го елемента γ-ї зони, можна показати, що нерівність (12) буде виконуватися для ситуації появи нерівних елементів у будь-якій припустимій зоні. Навпаки, рівність величин $Q(\alpha,\gamma)$ і $Q^{\bullet}(\alpha,\gamma)$ буде тільки в тому випадку, коли вони відповідатимуть двійковим послідовностям $A(\alpha,\gamma)$ і $A^{\bullet}(\alpha,\gamma)$ з рівними елементами. Тоді виконується рівність $a_{\alpha\gamma j} = a^{\bullet}_{\alpha\gamma j}$. Звідси випливає, що для двійкової послідовності $A(m,\Theta^{(x)})$, розглянутої як двоозначне поліадичне число із заданими параметрами (довжина послідовності m, обмеження Λ на позиції із припустимою появою одиничних елементів і обмеження $\Theta^{(x)}$ на кількість серій одиниць у припустимих зонах), можна сформувати тільки один код-номер $N\left(m,\Lambda,\Theta^{(x)}\right)_j$. І навпаки на основі заданого значення коду-номера $N\left(m,\Lambda,\Theta^{(x)}\right)_j$ й параметрів m, Λ і $\Theta^{(x)}$ можна взаємооднозначно (без похибки) відновити елементи двійкової послідовності $A(m,\Theta^{(x)})$.

Теорему про взаємооднозначності подання двійкових двоознакових поліадичних чисел доведено.

При цьому, як випливає з аналізу виразів [4] для двоознакового поліадичного кодування двійкових даних, обробку організовують на основі цілочислових операцій. Всі проміжні дані в процесі кодування є цілочисловими. Тому за заданим значенням коду-номера $N\left(m,\Lambda,\Theta^{(x)}\right)_j$ можна без унесення похибки відновити вихідну двійкову послідовність $A(m,\Theta^{(x)})$.

Отже, метод двоознакового структурного подання даних у двійковому поліадичному просторі належить до класу методів стискання, які в процесі обробки не вносять похибки.

Висновок

1. Доведено, що двоознакове двійкове поліадичне подання є взаємооднозначним, тобто вихідні елементи обробляються без внесення похибки.

2. На основі доведеної теореми про взаємооднозначності подання формулюються умови, що забезпечують відновлення вихідних двійкових елементів.

Література

1. *Блякнув Ю.* Мережі ЕОМ: протоколи, стандарти, інтерфейси. – М.: Мир, 1990. – 506 с.
2. *Методи* стиску даних. Пристрій архіваторів, стиск зображень і відео / В. Ватолін, А. Ратушняк, М. Смирнов, В. Юкін – М.: ДІАЛОГ – МИФИ, 2002. – 384 с.
3. *Зубарєв Ю. В., Дворкович В. П.* Цифрова обробка телевізійних і комп'ютерних зображень. – М.: Міжнар. центр наук. й техн. інформ. 1997. – 212 с.
4. *Юдин А. К., Бараннік В. В.* Представлення двійкових даних з обмеженим числом серій у поліадичному просторі // Авокадотехніка й технологія. – 2006. – № 2. С. 87 – 92.

Стаття надійшла до редакції 05.02.07.