УДК 517.95

І.С. Клюс, канд. фіз.-мат. наук, доц.

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

НАУ, кафедра вищої математики
E-mail: Klyus_i@ukr.net

Досліджено коректність задачі з локальними багатоточковими умовами за часовою змінною для рівнянь з частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом зі змінними коефіцієнтами. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі. Доведено метричні теореми про оцінювання знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку задачі.

The correctness of a problem with multi–point conditions on temporary variable of partial differential equations not solved as to the highest derivative with respect to time is investigated. The conditions of existence and uniqueness of the solution of a problem are established. The metric theorems of an estimations from below of small denominators that appears in constructing a solution of a problem are proved.

Вступ

Задачі з багатоточковими умовами для диференціальних рівнянь із частинними похідними є взагалі умовно коректними, а їхній розв'язок у багатьох випадках пов'язаний з проблемою малих знаменників.

У цій статті досліджується задача з багатоточковими умовами за часовою змінною для диференціальних рівнянь з частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом зі змінними коефіцієнтами в циліндричній області [1–3].

Постановка задачі

Нехай: G – обмежена однозв'язна область із R^p; $G^{q+\mu}(\overline{G})$ – клас функцій $y(x)$, які мають в області $\overline{G}$ неперервні похідні до порядку q включно, причому похідні q-го порядку задовольняють умову Гельдера з показником μ.

В області $Q=\{(t,x): t\in(0,T), x\in G\}$ розглядаємо задачу

$$N[u(t,x)]\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \sum_{s=0}^{l} b_s L^s u(t,x)+$$

$$+\sum_{\beta=0}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\beta} \sum_{s=0}^{m} \alpha_s^{\beta} L^s u(t,x)=f(t,x), \qquad (1)$$

$$u(t_j,x)=0,\ j=1,\dots,n,\ 0\le t_1<t_2<\dots<t_n\le T, \qquad (2)$$

$$L^i u(t,x)\big|_{\partial G}=0,\ i=0,1,\dots,\tau-1, \qquad (3)$$

де $\tau=\max\{m,l\}; b_s, \alpha_s^{\beta}\in R$, L – диференціальний еліптичний в $G\subset R^p$ оператор з коефіцієнтами $p_{ij}\in C^{2\tau-1+\mu}(\overline{G})$,
$i,j=1,\dots,p$;
$q\in C^{2\tau-2+\mu}(\overline{G})$.

Нехай функція $f(t,x)$ зображується поряд

$$f(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)X_k(x);$$

$$f_k(t)=\int_G f(t,x)X_k(x)dx,\quad k\in N,$$

де $X_k(x)$, $k\in N$ – повна ортонормована система власних функцій.

Розв'язок задачі (1)–(3) дістаємо у вигляді ряду

$$u^0(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k^0(t)X_k(x). \qquad (4)$$

Якщо ряд (4) і ряди, отримані з нього почленним диференціюванням за змінними $x_1,\dots,x_p$ до порядку 2τ включно, є рівномірно збіжні в області $\overline{G}$, то функція $u^0(t,x)$, визначена за формулою (4), задовольняє умову (3).

Кожна з функцій $u_k^0(t)$, $k\in N$ є розв'язком такої n-точкової задачі для звичайного диференціального рівняння:

$$\frac{d^n u_k^0(t)}{dt^n}\sum_{s=0}^{l} b_s\lambda_k^s+\sum_{\beta=0}^{n-1}\frac{d^{\beta}u_k^0(t)}{dt^{\beta}}\sum_{s=0}^{m}\alpha_s^{\beta}\lambda_k^s=f_k(t); \qquad (5)$$

$$u_k^0(t_q)=0,\ q=1,\dots,n. \qquad (6)$$

Лема. Для довільних фіксованих b_s нерівності

$$\left|\sum_{s=0}^{l} b_s\lambda_k^s\right|>\frac{|b_l|}{2}\lambda_k^l,\ \lambda_k\in\Lambda, \qquad (7)$$

справджуються для всіх $\lambda_k>B$, де $B=2b+1$, $b=\max\limits_{1\le j\le l-1}\left|\frac{b_j}{b_l}\right|$.

Доведення. Нехай $b_l\ne 0$, тоді

$$\left|\sum_{s=0}^{l} b_s\lambda_k^s\right|=|b_l|\lambda_k^l\left|1+\sum_{s=1}^{l}\frac{b_{l-s}}{b_l\lambda_k^s}\right|\ge|b_l|\lambda_k^s\left|1-\left|\sum_{s=1}^{l}\frac{b_{l-s}}{b_l\lambda_k^s}\right|\right|. \qquad (8)$$

На основі оцінки

$$\left|\sum_{s=0}^{l} b_s \lambda_k^s\right| \le b\sum_{s=1}^{l}\frac{1}{\lambda_k^s} \le b\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^s} = \frac{b}{\lambda_k - 1}$$

з нерівності (8) отримуємо

$$\left|\sum_{s=0}^{l} b_s \lambda_k^s\right| > \left|b_l \lambda_k^l\left(1-\frac{b}{\lambda_k-1}\right)\right|,\ \lambda_k\in\Lambda, \lambda_k > B. \qquad (9)$$

Оскільки при $\lambda_k > 2b+1$ дріб $\frac{b}{\lambda_k - 1} < \frac{1}{2}$, то з нерівності (9) випливає доведення леми.

Припустимо, що для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ корені $\mu_j(\lambda_k)$, $j = 1,...,p$, рівняння

$$P(\mu) \equiv \mu^n \sum_{s=0}^{l} b_s \lambda_k^s + \sum_{\beta=0}^{n-1}\mu^\beta \sum_{s=0}^{m}\alpha_s^\beta \lambda_k^s = 0 \qquad (10)$$

є різними. Тоді множина функцій $\{\exp(\mu_j(\lambda_k)), j = 1,...,n\}$

є фундаментальною системою розв'язків рівняння

$$u_k^{(n)}(t)\sum_{s=0}^{l} b_s \lambda_k^s + \sum_{\beta=0}^{n-1} u_k^{(\beta)}(t)\sum_{s=0}^{m}\alpha_s^\beta \lambda_k^s = 0. \qquad (11)$$

Визначник задачі (5), (6) має вигляд

$$\Delta(\lambda_k) = \det \| \exp(\mu_j(\lambda_k) t_q)\|_{q,j=1}^{n}. \qquad (12)$$

Єдиність розв'язку задачі

Задача (1)–(3) не може мати двох різних розв'язків тоді і тільки тоді, коли відповідна їй однорідна задача має лише тривіальний розв'язок.

Теорема 1. Для єдиності розв'язку задачі (1)–(3) у просторі $C^{(n,2\tau)}(\overline{Q})$ необхідно і достатньо, щоб

$$\Delta(\lambda_k) \ne 0; \quad (\forall \lambda_k \in \Lambda). \qquad (13)$$

Доведення здійснюється за схемою доведення теореми 1 з праці [1].

Нехай справджується умова (13). Тоді для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ у квадраті $K = \{(t,\tau): 0 \le t \le T,\ 0 \le \tau \le T\}$ існує єдина функція Гріна $G_k(t,\tau)$ задачі (11), (6), за допомогою якої розв'язок відповідної задачі (5), (6) зображується формулою

$$u_k^0(t) = \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau.$$

У кожній з областей $K_q = \{(t,\tau): 0 \le t \le T,\ t_q < \tau < t_{q+1}\},\ q = 0,1,...,n$, $t_0 = 0, t_{n+1} = T$, функція $G_k(t,\tau)$ збігається з функцією

$$G_k^q(t,\tau) = \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2}\sum_{\theta=1}^{n}\frac{\exp(\mu_\theta(\lambda_k)(t-\tau))}{b(\lambda_k)\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\ne\theta}}^{n}(\mu_j(\lambda_k)-\mu_\theta(\lambda_k))} +$$

$$+(-1)^{n-1}\left(\sum_{\gamma=1}^{q}(-1)^{q+1}F_{k\gamma}(t,\tau) - \sum_{\gamma=q+1}^{n}(-1)^{q}F_{k\gamma}(t,\tau)\right),$$

$$q = 0,1,...,n, \qquad (14)$$

де

$$F_{k\gamma}(t,\tau) = \sum_{\theta,j=1}^{n}\frac{\exp(\mu_\theta(t_\gamma-\tau)+\mu_j(\lambda_k)t)\Delta_{\gamma j}(\lambda_k)}{b(\lambda_k)\Delta(\lambda_k)\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\ne\theta}}^{n}(\mu_j(\lambda_k)-\mu_\theta(\lambda_k))},$$

$\lambda = 1,...,n$, $b(\lambda_k) = \sum_{s=0}^{l} b_s \lambda_k^s$, $\Delta_{\gamma j}(\lambda_k)$ – алгебричне доповнення елемента $\exp(\mu_j(\lambda_k)t_\gamma)$ у визначнику (12).

На прямих $\tau = t_q, q = 0,1,...,n$ доозначуємо функцію $G_k(t,\tau)$ за неперервністю по τ праворуч, а при $\tau = T$ – за неперервністю ліворуч.

Розв'язок задачі (1)–(3) формально зображується у вигляді ряду

$$u^0(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{q=0}^{n}\int_{t_q}^{t_{q+1}} G_k^q(t,\tau) f_k(\tau) d\tau X_k(x). \qquad (15)$$

Ряд (15) взагалі розбіжний, бо величини $|\Delta(\lambda_k)|$ та $|\mu_m(\lambda_k) - \mu_r(\lambda_k)|$, $r, m = 1,...,n,\ m \ne r$, що входять знаменниками у вирази для функцій $G_k^q(t,\tau), k \in N$, будучи відмінними від нуля, можуть ставати як завгодно малими для нескінченної множини значень $\lambda_k \in \Lambda$.

Зауваження 1. Якщо

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{N} f_k(t) X_k(x),\ N < \infty,$$

то за умови (13), завжди існує єдиний розв'язок задачі (1)–(3).

Розв'язок задачі

Дослідимо існування розв'язку задачі (1)–(3) у випадку $m > l$.

Позначимо: $B_\delta^\gamma(G), \delta > 0, \gamma > 0$ – простір функцій $\varphi \in L_2(G), \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k X_k(x)$,

для яких скінченна норма

$$\|\varphi\|_{B_\delta^\gamma(G)} = \sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k|\exp(\delta\lambda_k^\gamma);$$

$C^n([0,T], B_\delta^\gamma(G))$ – простір функцій $v(t,x)$, визначених в області $\overline{Q}$, n раз неперервно диференційованих за t і таких, що для кожного фіксованого $t \in [0,T]$ похідні $\frac{\partial^j v}{\partial t^j}, j = 0,1,...,n$ належать простору $B_\delta^\gamma(G)$

$$\| v \|_{C^n([0,T],B_\delta^\gamma(G))} = \sum_{j=0}^{n} \max_{0 \le t \le T} \left\| \frac{\partial^j v}{\partial t^j} \right\|_{B_\delta^\gamma(G)}.$$

Зі структури рівняння (10) та леми випливають оцінки:

$$|\mu_j(\lambda_k)| \le A\lambda_k^{m-l}, A > 0,\ \lambda_k > B,\ j = 1,...,n. \qquad (16)$$

Теорема 2. Нехай $m > l$, тоді виконується умова (13) та існують такі додатні сталі β_1, β_2, ν, що для всіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k \in \Lambda$ виконуються нерівності:

$$|\Delta(\lambda_k)| > \lambda_k^{-\beta_1} \exp(-\nu\lambda_k^\gamma T),\ \gamma = m - l, \qquad (17)$$

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \ne \theta}}^{n} |\mu_j(\lambda_k) - \mu_\theta(\lambda_k)| > \lambda_k^{-\beta_2},\ \theta = 1,...,n. \qquad (18)$$

Якщо

$f \in C([0,T], B_\delta^\gamma(G)), \delta > (\nu + A(n+1))T, \gamma = m - l$,

то в просторі

$C^n([0,T], B_{\delta_1}^\gamma), \gamma = m - l, \delta_1 < \delta - ((n+1)A + \nu)T$,

існує розв'язок задачі (1)–(3), який неперервно залежить від функції $f(t,x)$.

Доведення. Позначимо $\bar{f}_k = \max_{0 \le t \le T} |f_k(t)|$. З формул (14), (15) та оцінок (7), (16)–(18) випливає

$$\|u^0(t,x)\|_{C^n([0,T],B_{\delta_1}^\gamma(G))} =$$

$$= \sum_{\sigma=0}^{n} \max_{0 \le t \le T} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\partial^\sigma u_k^0(t)}{\partial t^\sigma} \right| \exp(\delta_1 \lambda_k^\gamma) \le$$

$$\le C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k A^n \lambda_k^{n\lambda + \beta_1 + \beta_2 + \frac{p}{4} - l} \exp(((A(n+1) + \nu)T + \delta_1)\lambda_k^\gamma). \qquad (19)$$

Використовуючи нерівність

$\lambda_k^q \le Q(q)\exp(\varepsilon\lambda_k),\ 0 < \lambda_k \le \infty,\ \varepsilon > 0,\ Q(q) > 0$,

яка справедлива для довільного $q > 0$, з формули (19) отримуємо

$$\|u^0(t,x)\|_{C^n([0,T],B_{\delta_1}^\gamma(G))} \le$$

$$\le C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k \exp((\delta_1 + ((n+1)A + \nu)T + \varepsilon)\lambda_k^\gamma) = C_3 \|f\|_{B_\delta^\gamma(G)},$$

де $\varepsilon < \delta - \delta_1 - ((n+1)A + \nu)T$, $C_1 - C_3$ – додатні сталі.

Теорему доведено.

Зауваження 2. За умов теореми 2 розв'язок задачі (1)–(3) належить простору $C^{(n,2l)}(\overline{Q})$.

Проаналізуємо можливість виконання оцінок (17), (18).

Позначимо:

$$h = (h_1,...,h_p), h_r = \alpha^0_{(\underbrace{0,...,0}_{r-1},m,0,...,0)}, r = 1,...,p;$$

$\eta \in R^{\omega - p}$ – вектор, складений з усіх коефіцієнтів α_s^β рівняння (1), крім тих, що є компонентами вектора h, де ω – кількість коефіцієнтів α_s^β.

Теорема 3. Для довільного фіксованого вектора η і майже всіх (стосовно міри Лебега в R^p) векторів h нерівність (18) виконується для всіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k \in \Lambda$ при

$$\beta_2 > \frac{(n-1)}{2}\left(\frac{p}{2} + (m-l)(n-3)\right).$$

Доведення проводиться за схемою доведення леми з праці [3].

Теорема 4. Для довільного фіксованого вектора η і майже всіх (стосовно міри Лебега в R^{p+n}) векторів $(h,\bar{t})$, де $\bar{t} = (t_1,...,t_n) \in R^n$, нерівність (17) виконується для всіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k \in \Lambda$ при

$$\beta_1 > \frac{(n-1)}{2}((m-l)(n-1) + p(n+1)/2),\ \nu = An,$$

де A – стала з нерівності (16).

Доведення теореми базується на теоремі 3.

Висновки

Результати досліджень задачі (1)–(3) можна розвинути у разі лінійних диференціальних рівнянь, збурених нелінійним інтегродиференціальним оператором.

Література

1. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

2. *Клюс І.С., Пташник Б.Й.* Багатоточкова задача з комплексними коефіцієнтами для рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, №4. – С. 83–88.

3. *Клюс І.С., Пташник Б.Й.* Багатоточкова задача для рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 1999. – 51, №12. – С. 1604–1613.

Стаття надійшла до редакції 06.11.06.