

УДК 621.391.83:004.94(045)

Ю.В. Куц, д-р техн. наук, проф.  
І.М. Лапіга, асп.  
О.В. Монченко, асист.

## ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ ФАЗОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК СИГНАЛІВ

НАУ, кафедра інформаційно-вимірвальних систем  
E-mail: galena79@mail.ru

*Розглянуто механізм утворення методичної похибки вимірювань фазової характеристики сигналів, яка виникає внаслідок скінченного часу обробки сигналів, та можливість її зменшення за допомогою віконної обробки. Наведено приклад реалізації запропонованої методики.*

*The mechanism of reception of a methodical error of measurements of the phase characteristic of signals is considered which arises owing to final time of processing, and way of its elimination with use of window processing. The example of realization of the offered technique is given.*

### Вступ

Для широкого класу вузькосмугових сигналів вигляду

$$u(t) = U(t) \cos[\Phi(t)], \quad t \in (-\infty, \infty),$$

де  $t$  – час;  $U(t)$  – обвідна (або амплітудна характеристика сигналу).

Важливою та інформативно ємною характеристикою є  $\Phi(t)$  – фаза, або фазова характеристика сигналу (ФХС). Ця характеристика сигналу вводиться на підставі перетворення Гільберта [1]. Це перетворення дозволяє визначити аналітичний сигнал

$$\dot{z}(t) = u(t) + j\hat{u}(t),$$

де  $\hat{u}(t) = \mathbf{H}[u(t)]$  – гільберт-образ сигналу  $u(t)$ ;  $\mathbf{H}$  – оператор перетворення Гільберта.

Після цього ФХС визначається як [2]

$$\Phi(t) = \arctg \frac{\hat{x}(t)}{x(t)} + \frac{\pi}{2} \{2 - \text{sign} \hat{x}(t)(1 + \text{sign} x(t))\} + 2\pi L(t), \quad (1)$$

де  $\text{sign}(\cdot)$  – знакова функція;  $L(t)$  – ступенева числова функція, яка усуває розриви ФХС, у точках, кратних  $2\pi$ .

Перетворення Гільберта передбачає інтегрування сигналу в інтервалі  $(-\infty, \infty)$ , отже, є фізично не реалізованим.

На практиці користуються інтегральним перетворенням добутку  $x(t)W(t)$ , де  $W_{\Pi}(t)$  – вагова функція (часове вікно прямокутної форми):

$$W_{\Pi}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-0,5T_B, 0,5T_B]; \\ 0, & t \notin [-0,5T_B, 0,5T_B], \end{cases} \quad (2)$$

де  $T_B$  – тривалість часового вікна.

З урахуванням виразу (2) маємо інтегральне перетворення

$$\hat{x}(t) = - \left[ v.p. \int_{-0,5T_B}^{0,5T_B} \frac{x(\tau)}{\pi(\tau - t)} d\tau \right] \quad (3)$$

з ядром перетворення Гільберта  $\frac{1}{\pi(\tau - t)}$ ,

де  $v.p.$  – головне значення невластивого інтеграла за Коші.

Перетворення (3) дозволяє застосувати “ковзну” обробку для визначення поточних оцінок характеристик сигналу в реальному часі. Однак у цьому випадку виникають методичні похибки вимірювання, які збільшуються зі зменшенням  $T_B$ .

Наприклад, при оцінці ФХС гармонічних сигналів і тривалості часового вікна  $5 \div 10$  періодів сигналу, абсолютне значення цієї похибки становить [2]  $\sim (0,16 \div 0,56)$  рад для

$$t \in \left( \frac{1}{3}T_B, \frac{2}{3}T_B \right).$$

Відоме застосування віконної обробки сигналів і вікон різної форми (Хеммінга, Ханна, трикутного, Кайзера, Чебишева тощо) при обчисленні спектрів сигналів для підвищення точності їх оцінки. Використання віконної обробки сигналів дозволить зменшити методичні похибки і у випадку визначення ФХС сигналів.

**Мета** статті – аналіз впливу віконної обробки сигналів для вікон різної форми на точність визначення ФХС.

**Постановка задачі** – досліджується гармонічний сигнал

$$u(t) = U \cos(2\pi ft + \varphi), \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (4)$$

де  $U, f, \varphi$  – відповідно амплітуда, частота і початкова фаза сигналу.

Фазова характеристика сигналу (4) становить  $\Phi_0(t) = 2\pi ft + \varphi$ .

Значення  $\Phi_0(t)$  оцінюється на інтервалі  $(t_0 - 0,5T_B, t_0 + 0,5T_B)$  для довільно вибраного моменту  $t_0$ . Оцінка ФХС на обраному інтервалі здійснюється шляхом визначення ФХС  $\Phi(t)$  добутку  $x(t)W(t)$ , де  $W(t)$  – різні, відмінні від прямокутної форми, вагові функції. Необхідно визначити вплив вагової обробки для різних типів вікон на методичну похибку оцінки ФХС.

### Розв'язок поставленої задачі

Отримання точного аналітичного виразу для методичної похибки визначення ФХС неможливе, тому задача була вирішена шляхом моделювання. Методикою моделювання передбачалося виконання таких етапів:

1) формування вибірки сигналу (4) на інтервалі часу  $(t_0 - 0,5T_B, t_0 + 0,5T_B)$  з періодом дискретизації  $T_d \ll f^{-1} \ll T_B$ , тобто формування вибірки:

$$u[n] = U \cos(2\pi f n T_d + \varphi), n = \overline{1, N}, N T_d = T_B;$$

2) формування вагової функції  $W[n]$  з періодом дискретизації  $T_d$  для різних типів вікон (Хеммінга, трикутного, Кайзера, Чебишева тощо) [3; 4];

3) визначення вибірок нормованого гільберт-образу сигналу з ваговою обробкою:

$$\hat{n}[n] = \frac{1}{W[n]} \mathbf{H}(u[n]W[n]);$$

4) визначення оцінки ФХС  $\Phi[n]$  на інтервалі часу  $(t_0 - 0,5T_B, t_0 + 0,5T_B)$  за загальним алгоритмом (1);

5) обчислення методичної похибки оцінки ФХС:

$$\Delta\varphi[n] = \Phi[n] - \Phi_0[n]; \quad (5)$$

6) Порівняльний аналіз отриманих результатів для різних типів вікон.

### Результати моделювання

Відповідно до методики був вибраний гармонічний сигнал (рис. 1, а):

$$u[n] = \begin{cases} U \cos(2\pi f n T_d + \varphi), & n T_d \in T_P, n = \overline{1, N}, N T_d = T_B, \\ 0, & n T_d \notin T_P \end{cases}$$

з такими характеристиками:

$$T_P = 9,25T; N = 1600; T_d = 0,01 \text{ с}; u = 1 \text{ В}; T_B = 16 \text{ с}; f = 4 \text{ Гц}; t_0 = 8 \text{ с}.$$

Результати моделювання для вікна Хеммінга, трикутного вікна, вікна Кайзера, вікна Чебишева показано на рис. 2, 3, 4, 5.

На прикладі вікна Хеммінга проілюстровано отримання методичної похибки визначення ФХС. Відповідно до методики формується вагова функція:

$$W(n) = 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right).$$

Результати побудови гільберт-образу добутку  $u[n]W[n]$  (крива 1) та обвідної (крива 2) відповідно до і після нормування коефіцієнтом  $\frac{1}{W[n]}$

показано на рис. 6, а, б.

Обвідна визначається за формулою

$$A[n] = \sqrt{(u[n])^2 + (\hat{u}[n])^2}.$$

Фазова характеристика  $\Phi_0[n]$  досліджуваного сигналу  $u[n]$  визначається як

$$\Phi_0[n] = 2\pi f n T_d + \varphi; n \in \overline{n_P, n_K}.$$

Отже,  $u[n]$  являє собою вибірки радіоімпульсного сигналу з початком у точці  $n_P = 337$  і кінцем у точці  $n_K = 1263$ .

Результати розрахунку ФХС за формулою (1) з розривами характеристики (без урахування складової  $2\pi L(t)$ ) та після усунення розриву зображено на рис. 7.

Розраховану за формулою (5) методичну похибку визначення ФХС показано на рис. 8.

Порівняння ефективності застосування різних типів вікон виконувалося на підставі аналізу відповідних методичних похибок визначення ФХС (рис. 9).

Орієнтовну кількісну оцінку зменшення методичної похибки наведено в таблиці.

З виконаного аналізу випливає, що найкращі результати отримані для вікон Кайзера і Чебишева, які дозволяють зменшити методичну похибку визначення ФХС на  $\sim 60\%$ .

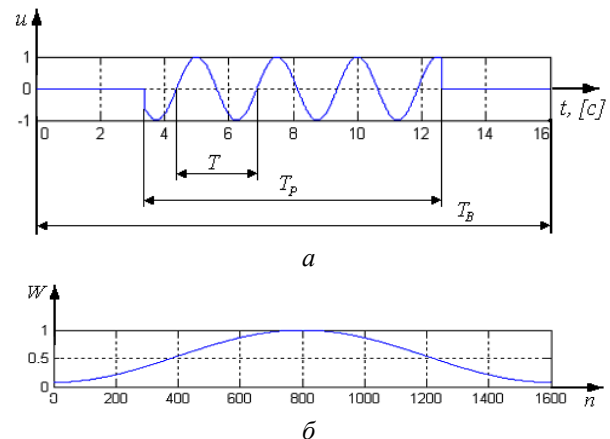


Рис. 1. Взаємне розташування в часі сигналу (а) та вікна Хеммінга (б)

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos \left[ \frac{2\pi n}{N-1} \right]; \quad 0 \leq n \leq N-1$$

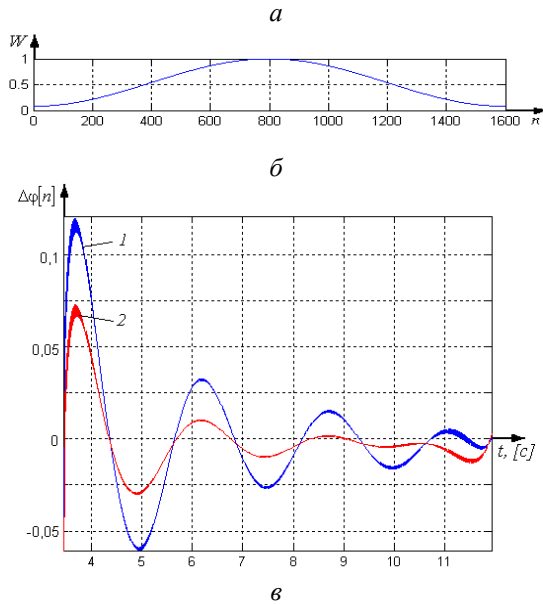


Рис. 2. Вікно Хеммінга:  
*a* – аналітичний вираз вікна; *б* – форма вікна; *в* – методична похибка визначення ФХС для цього вікна (2) та вікна прямокутної форми (1)

$$w(n) = \begin{cases} \frac{n}{N/2}; & n = 0; 1; \dots; \frac{N}{2}; \\ W(N-n); & n = \frac{N}{2}; \dots; N-1 \end{cases}$$

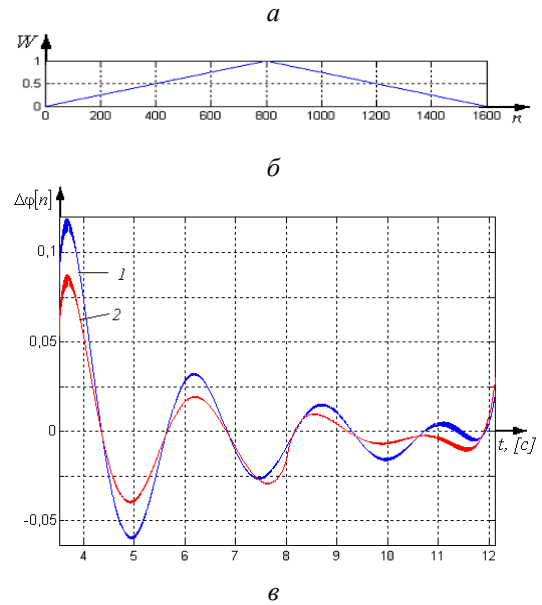


Рис. 3. Вікно трикутне:  
*a* – аналітичний вираз вікна; *б* – форма вікна; *в* – методична похибка визначення ФХС для цього вікна (2) та вікна прямокутної форми (1)

$$w(n) = \frac{I_0(\beta \sqrt{1 - [2n/(N-1)]^2})}{I_0(\beta)}; \quad -\left(\frac{N-1}{2}\right) \leq n \leq \left(\frac{N-1}{2}\right)$$

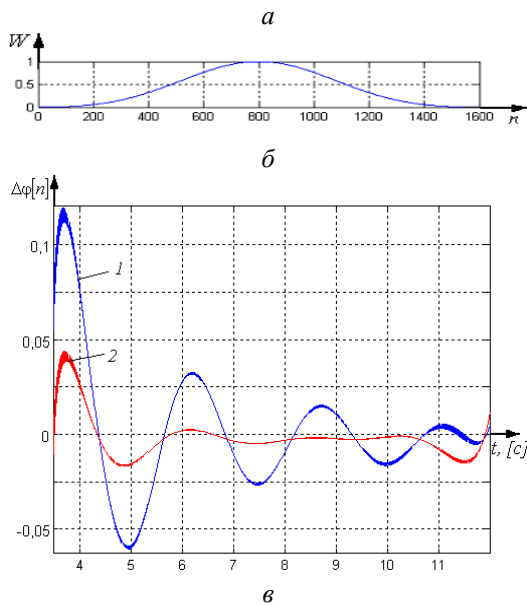


Рис. 4. Вікно Кайзера:  
*a* – аналітичний вираз вікна; *б* – форма вікна; *в* – методична похибка визначення ФХС для цього вікна (2) та вікна прямокутної форми (1);  $\beta$  – константа, яка визначає співвідношення між максимальними рівнями бокових пелюстків і шириною головної пелюстки;  $I_0(x)$  – функція Бесселя першого роду нульового порядку

$$w(k) = (-1)^k \frac{\cos \left[ N \arccos \left[ \beta \cos \left( \pi \frac{k}{N} \right) \right] \right]}{\text{ch} \left[ N \text{ch}^{-1}(\beta) \right]}; \quad 0 \leq |k| \leq N-1$$

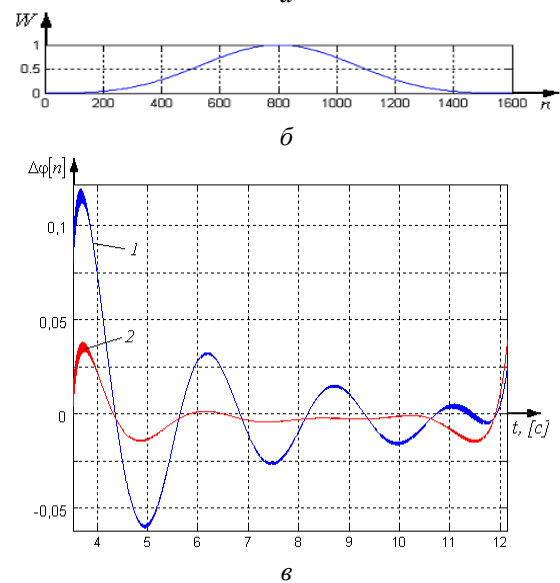


Рис. 5. Вікно Чебишева:  
*a* – аналітичний вираз вікна; *б* – форма вікна; *в* – методична похибка визначення ФХС для цього вікна (2) та вікна прямокутної форми (1);  $\beta$  – константа, яка визначає співвідношення між максимальними рівнями бокових пелюстків і шириною головної пелюстки

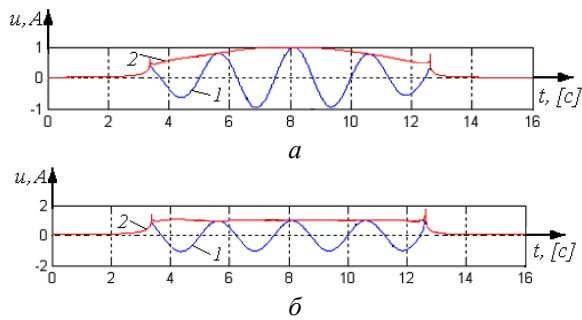


Рис. 6. Побудова гільберт-образу добутку  $u[n]W[n]$  (крива 1) та обвідної  $A[n]$  (крива 2) до (а) і після (б) нормування коефіцієнтом  $\frac{1}{W[n]}$

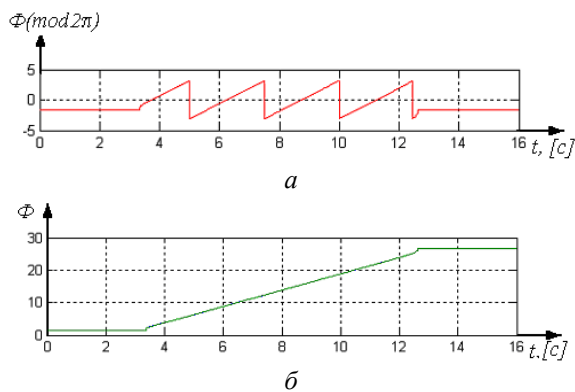


Рис. 7. Розрахунок ФХС: а – з розривами характеристик; б – після усунення розривів

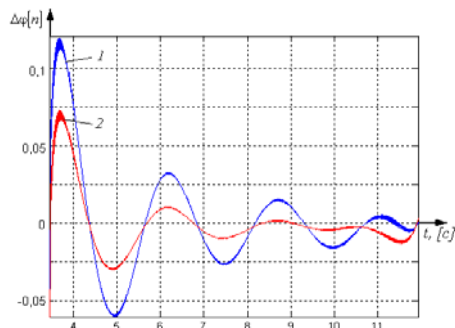


Рис. 8. Методична похибка визначення ФХС: 1 – похибка без віконної обробки; 2 – з віконною обробкою

**Оцінка методичної похибки для різних типів вікон**

Тип вікна	Зменшення методичної похибки визначення фази, %	Загальна оцінка
Хеммінга	40	Добре
Трикутне	25	Незадовільно
Кайзера	63	Відмінно
Чебишева	64	Відмінно

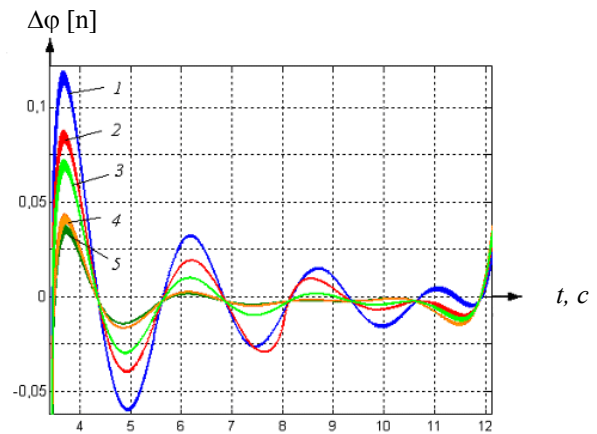


Рис. 9. Залежність  $\Delta\phi[n]$  для різних вікон: 1 – прямокутного; 2 – трикутного; 3 – Хеммінга; 4 – Кайзера; 5 – Чебишева

**Висновки**

1. Під час використання перетворення Гільберта для обмеженого в часі сигналу виникає методична похибка визначення ФХС, яка має коливний характер і збільшується на краях інтервалу аналізу існування сигналу.
2. Додаткова віконна обробка обмежених у часі сигналів дозволяє зменшити методичну похибку визначення ФХС. Найбільший вигреш (до 60%) стосовно зменшення  $\Delta\phi[n]$  дає застосування вікон Кайзера і Чебишева, які можуть бути рекомендовані для використання в прецизійних швидкодіючих фазовимірювальних засобах.
3. Використання віконної обробки для заданого рівня методичної похибки дозволяє зменшити час вимірювання ФХС і відповідно збільшити швидкодію фазовимірювальної апаратури.

**Література**

1. Бендат Дж., Пірсол А. Прикладной анализ случайных данных: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
2. Куц Ю.В., Щербак Л.М. Застосування перетворення Гільберта у фазометрії // Технологические системы. – 2004. – №2. – С. 50–55.
3. Марпл.-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер с англ. – М.: Мир, 1990. – 540 с.
4. Шрюфер Е. Обработка сигналов: цифровая обработка дискретизованных сигналов: Підруч./ За ред. В.П. Бабака. – К.: Либідь, 1992. – 296 с.

Стаття надійшла до редакції 18.10.06.