

ІНФОРМАЦІЙНО-ДІАГНОСТИЧНІ СИСТЕМИ

УДК 519.23

В.П. Бабак, чл.-кор. НАН України, д-р техн. наук, проф.

Ю.В. Куц, д-р техн. наук, проф.

Л.М. Щербак, д-р техн. наук, проф.

МОДЕЛІ ТА ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕЗУЛЬТАТІВ СТАТИСТИЧНИХ КУТОВИХ ВИМІРЮВАНЬ

НАУ, кафедра інформаційно-вимірювальних систем
E-mail: ivs@nau.edu.ua

Розглянуто моделі випадкового кута на площині та його ймовірнісні характеристики. Проведено порівняльний аналіз характеристик випадкової величини і випадкового кута. Отримані результати знайшли застосування при розв'язку задач статистичної фазометрії.

The models of a casual corner on a plane and its probability characteristics are considered. Comparative analysis of the casual data and casual corner characteristics at statistical measurements is executed. The received results are applied for the decision of statistical phase shifts measurements tasks.

Постановка проблеми

Кутіві вимірювання є одним з основних науково-технічних напрямів у теорії вимірювань. Створення сучасних інформаційних технологій зумовлюють актуальність і важливість задач статистичних кутівіх вимірювань у різних галузях науки і техніки [1; 2].

У цій роботі наведено основні моделі та характеристики результатів статистичної обробки кутівіх вимірювань, які знайшли використання у статистичній фазометрії [3–5].

Зупинимось на моделі випадкового кута та його характеристиках як одного з основних понять теорії кутівіх вимірювань.

Модель детермінованого кута

Назва полярної системи координат пов'язана з полярним кутом Φ як з основною величиною цієї системи. У загальному випадку, базуючись на циклічній зміні кута Φ , припускають, що $\Phi \in R = (-\infty, \infty)$.

Це дає змогу використати формулу

$$\Phi = \left[\frac{\Phi}{2\pi} \right] 2\pi + \varphi, \quad (1)$$

де $\left[\frac{\Phi}{2\pi} \right] = k \in Z$ – ціла частина кута Φ ; $\varphi \in [0, 2\pi)$ – дробова частина кута Φ .

У більшості практичних задач вимірювань полярного кута саме дробова частина φ є основною величиною. Це пов'язано з тим фактом, що визначення цілої частини $\left[\frac{\Phi}{2\pi} \right]$ кута Φ у ряді випадків вважають його грубою оцінкою.

Тому набули широке використання такі формули [1]:

$$\varphi \equiv \Phi \pmod{2\pi} \text{ для радіуса кола } \rho = 1; \quad (2)$$

$$\varphi \equiv \Phi \pmod{2\pi\rho} \text{ для радіуса кола } \rho \neq 1. \quad (3)$$

Переважно використовують формулу (2), тому що з точки зору вимірювань розглядається нормований типовий випадок. З потреби перехід від формули (2) до формули (3) можна зробити, базуючись на відомих співвідношеннях.

Суттєвим моментом у використанні формули (1) є такі факти.

У теорії кутівіх вимірювань розглядається вся зліченна множина $\left[\frac{\Phi}{2\pi} \right] = k \in Z$, що дає можли-

вість використати теорію періодичних функцій, рядів Фур'є (Фур'є–Стілтєса) для аналізу результатів кутівіх вимірювань [1]. Поява кожного k не залежить і не має переваги перед іншими k . При випадковій трактовці ця властивість зумовить рівну ймовірність появи кожного k .

Усі практичні результати кутівіх вимірювань для конкретного k або для скінченної множини $\{k_1, \dots, k_n\}$ розглядаються як частинні випадки.

Модель випадкового кута

Випадковий кут $\Psi(\omega)$ як випадкова величина вважається заданим на фіксованому ймовірнісному просторі (Ω, \mathcal{B}, P) , де Ω – простір елементарних подій $\omega \in \Omega$, \mathcal{B} – алгебра (σ -алгебра) підмножин Ω , а P – імовірність випадкових подій \mathcal{B} . Конструктивне зображення полярного кута на площині у формулі (1) покладено в основу побудови моделі випадкового кута [1].

Означення 1. Дійсна випадкова величина

$$\psi(\omega) = \Psi(\omega) - \left[\frac{\Psi(\omega)}{2\pi} \right] 2\pi, \quad \omega \in \Omega,$$

де $\left[\frac{\Psi(\omega)}{2\pi} \right]$ – ціла частина випадкового кута $\Psi(\omega) \in R$,

називається випадковим кутом $\psi(\omega)$ на $[0, 2\pi)$, якщо функція розподілу $\psi(\omega)$

$$G(x') = P\{\omega \in \Omega : 0 < \psi(\omega) \leq x'\}, \quad x' \in [0, 2\pi), \quad (4)$$

має такі властивості:

- 1) $G(x')$ монотонно неспадна на інтервалі $x' \in [0, 2\pi)$ і є неперервною справа;
- 2) $G(2\pi) = 1$ і є неперервною в точці $x' = 2\pi$;
- 3) $G(0) = 0$;
- 4) $G(x'_2) - G(x'_1) \geq 0$, якщо $x'_2 \geq x'_1$, $x'_1, x'_2 \in [0, 2\pi)$.

Аналіз виразу (4) вказує на відмінність функції розподілу $G(x')$ від традиційної функції розподілу на числовій прямій R : функція $G(x')$ задана на скінченному інтервалі аргументу $x' \in [0, 2\pi)$.

Далі функцію $G(x')$ будемо називати функцією розподілу ймовірностей випадкового кута $\psi(\omega)$ на $[0, 2\pi)$.

Аналіз характеристик випадкових кутів показує, що ймовірнісний аналіз таких кутів буде переважно базуватися на використанні функції розподілу $G(x')$ на $[0, 2\pi)$.

Означення 2. Дійсна випадкова величина

$$\Psi(\omega) > 2\pi$$

$$\Psi(\omega) = \left[\frac{\Psi(\omega)}{2\pi} \right] 2\pi + \psi(\omega), \quad \omega \in \Omega \quad (5)$$

називається випадковим кутом $\Psi(\omega)$ на R , якщо $\psi(\omega)$ є випадковим кутом на $[0, 2\pi)$ з функцією розподілу $G(x')$ на $[0, 2\pi)$ за означенням 1, а інтегральна функція розподілів сім'ї випадкових кутів $\Psi(\omega)$ на R для $\forall k \in Z$ визначається за формулою

$$F(x) = G(x') + \left[\frac{x}{2\pi} \right] + C, \quad x \in R, \quad x' \in [0, 2\pi). \quad (6)$$

Для обґрунтування виразу (6) потрібне виконання двох умов:

$$P\left\{\omega \in \Omega : \left[\frac{\Psi(\omega)}{2\pi} \right] = k, \quad k \in Z\right\} = 1;$$

$$P\{\omega \in \Omega : \psi(\omega) \in [0, 2\pi)\} = 1.$$

Закони розподілу одновимірного випадкового кута

Згідно з означенням 2 довільний випадковий кут $\Psi(\omega) \in R$ $\omega \in \Omega$ набуває вигляду (5).

Властивості функції (4) розподілу ймовірностей випадкового кута $\psi(\omega)$ на $[0, 2\pi)$, наведені в означенні 1, повністю збігаються з відомими властивостями традиційної функції розподілу ймовірностей випадкової величини, за винятком того факту, що функція $G(x')$ задана на скінченному інтервалі $x \in [0, 2\pi)$, але згідно з формулою (6) у різних точках R .

При кутових вимірюваннях приймається ще одна статистична гіпотеза: для всіх різних точок R функція $G(x')$ незмінна:

$$G_k(x') \equiv G(x'), \quad \forall k \in Z, \quad (7)$$

де $G_k(x')$ – функція розподілу $\psi_k(\omega)$ на $[0, 2\pi)$ для довільного, але конкретного $k \in Z$.

Інтегральна функція розподілів сім'ї випадкових кутів $\Psi(\omega)$ на R для $\forall k \in Z$ має вигляд формули (6).

З першого погляду $F(x)$ не може мати властивостей традиційної функції розподілу ймовірностей. З цих позицій порівняно з терміном «функція розподілу» [1] була замінена її назва, яка більшою мірою відображає її властивості.

Згідно з працею [1] наведемо властивості функції $F(x)$:

- 1) $F(x)$ – монотонно неспадна;
- 2) $F(x)$ – неперервна справа на $x \in R$;
- 3) $F(-\infty) = -\infty$;
- 4) $F(\infty) = \infty$;
- 5) $F(x') = F(x') - F(0_-)$, $x' \in [0, 2\pi)$;
- 6) $F(x) - \frac{x}{2\pi}$ є періодичною функцією з періодом 2π ;
- 7) $F(x + 2\pi) - F(x) \equiv 1$, $x \in R$;
- 8) для $0 \leq x_2 - x_1 \leq 2\pi$
 $P\{\omega \in \Omega : x_1 < \Psi(\omega) \leq x_2\} =$

$$= \begin{cases} 0, & x_2 \leq x_1; \\ F(x_2) - F(x_1), & x_1 < x_2 \leq x_1 + 2\pi; \\ 1, & x_2 > x_1 + 2\pi; \end{cases}$$
- 9) для $\left[\frac{x_2}{2\pi} \right] = \left[\frac{x_1}{2\pi} \right] + 1$, $x_2 > x_1$;

$$P\{\omega \in \Omega : x'_1 < \Psi(\omega) \leq x'_2\} = \\ = P\{\omega \in \Omega : 0 < \Psi(\omega) \leq x'_2\} + \\ + P\{\omega \in \Omega : x'_2 < \Psi(\omega) \leq 2\pi\},$$

де $x'_1 = x_1 \pmod{2\pi}$, $x'_2 = x_2 \pmod{2\pi}$;

10) стала складова $C = 0$, але залежно від постановки задачі кутових вимірювань може мати й інші числові значення.

Із наведених властивостей функції $F(x)$, $x \in R$ випливає, що монотонно неспадна функція $F(x)$ має однакові прирости $F(x + 2\pi(k+1)) - F(x + 2\pi k) = 1$, $\forall k \in Z$,

що не суперечить властивостям нормованої ймовірнісної міри.

Таким чином, на кожному скінченному інтервалі $[2\pi k, 2\pi(k+1))$, $k \in Z$ числової прямої R розподіл ймовірностей випадкового кута $\Psi(\omega)$ у виразі (7) для конкретного k має розподіл ймовірностей $G(x')$ випадкового кута на $[0, 2\pi)$. Це також підтверджує, що ймовірнісний аналіз довільних випадкових кутів зводиться до ймовірнісного аналізу його дробової частини [1].

Для уникнення подальших протиріч і непорозуміннь функцію $F(x)$ будемо іменувати в подальшому інтегральною функцією розподілів сім'ї випадкових кутів $\Psi(\omega)$ на R для $\forall k \in Z$.

Функція $p(x)$ для абсолютно неперервних законів розподілу на колі має деякі властивості, які збігаються з властивостями функції $p(x)$ на прямій, але має і ряд відмінних від них.

Для неперервних функцій $G(x')$ і $F(x)$ випадкових кутів маємо

$$G(x_2) - G(x_1) = F(x_2 + 2\pi k) - F(x_1 + 2\pi k) = \\ = \int_{x_1}^{x_2} p(y) dy, \quad x_1, x_2 \in [0, 2\pi), \quad k \in Z.$$

Функція $p(x)$ називається щільністю розподілу ймовірностей випадкового кута $\Psi(\omega)$ на $[0, 2\pi)$ і має такі властивості:

1) $p(x + 2\pi) = p(x)$, $p(x)$ є періодичною функцією з періодом 2π ;

2) $p(x) \geq 0$, $x \in [0, 2\pi)$;

$$3) \int_0^{2\pi} p(x) dx = \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} p(x) dx = 1, \quad k \in Z.$$

Властивості функції $p(x)$ наведено для кола з одиничним радіусом $\rho = 1$.

Для випадку $\rho \neq 1$ необхідно враховувати, що $0 \leq x < 2\pi\rho$ при визначенні властивостей і самих характеристик випадкових кутів.

Характеристична функція f_n випадкового кута $\Psi(\omega)$ на $[0, 2\pi)$

Характеристична функція законів розподілу на колі є періодичною з періодом 2π і визначається для цілих значень $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, тобто для $n \in Z$.

Для функції f_n маємо [1]

$$f_n = M\{\exp(in\Psi(\omega))\} = \\ = \int_0^{2\pi} e^{inx} dG(x) = \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} e^{inx} dF(x), \quad k \in Z.$$

Таким чином, характеристична функція f_n закону розподілу ймовірностей випадкового кута $\Psi(\omega) \equiv \Psi(\omega) \pmod{2\pi}$

є послідовністю тригонометричних моментів, а саме, послідовністю дійсних чисел $\{a_n, b_n\}$, розрахованих відносно нульового начального напрямку

$$\Psi_0(\omega) \equiv 0 \pmod{2\pi}, \quad f_n = a_n + ib_n;$$

$$a_n = M\{\cos n\Psi(\omega)\} = \int_0^{2\pi} \cos nx dG(x);$$

$$b_n = M\{\sin n\Psi(\omega)\} = \int_0^{2\pi} \sin nx dG(x).$$

При цьому $a_n = a_{-n}$, $b_n = -b_{-n}$.

Якщо маємо фіксоване дійсне число d , то сума $\Psi(\omega) + d$ є випадковим кутом, тому що

$$(\Psi(\omega) + d) \pmod{2\pi} = \\ = \{\Psi(\omega) \pmod{2\pi} + d \pmod{2\pi}\} \pmod{2\pi}$$

є випадковою величиною в півінтервалі значень $[0, 2\pi)$. При цьому характеристична функція

$$M\{\exp[in(\Psi(\omega) + d)]\} = e^{ind} f_n.$$

Характеристична функція f_n має такі властивості:

- 1) $|f_n| \leq 1$;
- 2) $f_0 = 1$;
- 3) $f_n = f_{-n}^*$, де f_{-n}^* – комплексно спряжена значенню f_n ;
- 4) для будь-якого дійсного d

$$M\{\exp[in(\Psi(\omega) + d)]\} = f_n e^{ind}.$$

Характеристична функція законів розподілу ймовірностей випадкових кутів на колі є послідовністю тригонометричних моментів.

Це дає можливість однозначно визначити характеристичну функцію такими моментами, на відміну від законів розподілів на прямій [1].

Числові характеристики одновимірного випадкового кута

Дійсні тригонометричні моменти визначаються за формулами:

$$a_n = M\{\cos n\Psi(\omega)\};$$

$$b_n = M\{\sin n\Psi(\omega)\};$$

$$f_n = \rho_n \exp(i\mu_n),$$

де $\rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\mu_n = \text{Arg}f_n$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Усі наведені числові характеристики визначені для початкового нульового напрямку з полярним кутом

$$\varphi_0 \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Для такого випадку, крім наведених позначень характеристичної функції і тригонометричних моментів, використовують такі

$$f_n(0), a_n(0), b_n(0), \rho_n(0), \mu_n(0) = \mu_n, n = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

що дають більш чітку інтерпретацію відносно напрямків на колі.

Тригонометричні моменти випадкового кута $\Psi(\omega)$ відносно довільно вибраного напрямку

$$\varphi \equiv \Phi \pmod{2\pi}, \varphi \in [0, 2\pi), \Phi \in R$$

визначаються за формулами [1]:

$$f_n(\Phi) = M\{\exp in[\Psi(\omega) - \Phi]\} =$$

$$= a_n(\Phi) + i\beta_n(\Phi) = \rho_n(\Phi)e^{i\mu_n(\Phi)};$$

$$f_n(\Phi) = f_n(0)e^{-in\Phi};$$

$$\rho_n(\Phi) = \rho_n(0);$$

$$\mu_n(\Phi) \equiv (\mu_n(0) - n\Phi) \pmod{2\pi};$$

$$a_n(\Phi) = a_n(0)\cos n\Phi + \beta_n(0)\sin n\Phi;$$

$$b_n(\Phi) = -a_n(0)\sin n\Phi + \beta_n(0)\cos n\Phi.$$

Таким чином, тригонометричні моменти визначені відносно довільного напрямку з полярним кутом $\varphi \in [0, 2\pi)$ для будь-якого $\Phi \in R = (-\infty, \infty)$.

Центральні тригонометричні моменти визначаються як тригонометричні моменти при $\rho_1(\varphi) > 0$ відносно напрямку з полярним кутом $\varphi_1 \equiv \mu_1 \pmod{2\pi}$.

Центральні тригонометричні моменти визначаються за формулами [1]:

$$f_n(\mu_1) = f_n(0)e^{-in\mu_1}; \quad (8)$$

$$a_n(\mu_1) = \rho_n(0)\cos(\mu_n - n\mu_1); \quad (9)$$

$$b_n(\mu_1) = \rho_n(0)\sin(\mu_n - n\mu_1). \quad (10)$$

Для $n=1$ маємо

$$a_1(\mu_1) = \rho_1(0); \quad (11)$$

$$\beta_1(\mu_1) = 0. \quad (12)$$

У формулах (8)–(12) використано, як і раніше, $\mu_n(0) = \mu_n$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

Круговим середнім значенням випадкового кута $\psi(\omega) \equiv \Psi(\omega) \pmod{2\pi}$ називається “полярний кут”

$$\varphi_1 \equiv \mu_1, \varphi_1 \in [0, 2\pi),$$

де

$$\mu_1 = \text{Arg}f_1(0) = \text{Arg}M\{\exp i\Psi(\omega)\} = \text{Arg}(\rho_1(0)e^{i\mu_1})$$

за умови, що $M\{\exp i\Psi(\omega)\} \neq 0$.

Якщо ця умова не виконується, то кругове середнє значення μ_1 у півінтервалі $[0, 2\pi)$ не визначається однозначно [1].

Кругова дисперсія випадкового кута $\Psi(\omega)$.

$$v = 1 - \rho_1(0) = 1 - |f_1(0)|$$

вводиться як характеристика відхилення випадкового кута $\psi(\omega) \equiv \Psi(\omega) \pmod{2\pi}$ від фіксованого кута $\varphi' \in [0, 2\pi)$:

$$v(\alpha_0) = M\{1 - \cos(\psi(\omega) - \varphi')\} =$$

$$= 1 - \text{Re}M\{\exp i[\psi(\omega) - \varphi']\},$$

якщо $\rho_1(0) > 0$,

$$v(\alpha') = 1 - \rho_1(0)\cos(\varphi' - \mu_1) =$$

$$= 1 - \rho_1(0) + 2\rho_1(0)\left(\sin\frac{\varphi' - \mu_1}{2}\right)^2. \quad (13)$$

Вираз (13) набуває мінімального значення, коли $\varphi' = \mu_1$.

Таким чином, мінімальне значення

$$v(\alpha_1) = 1 - \rho_1(0)$$

кругова дисперсія випадкового кута

$$\psi(\omega) \equiv \Psi(\omega) \pmod{2\pi}$$

набуває для

$$\varphi' = \varphi_1,$$

де φ_1 – кругове середнє значення $\psi(\omega)$.

Кругова медіана випадкового кута

$$\psi(\omega) \equiv \Psi(\omega) \pmod{2\pi}$$

для одновершинної щільності розподілу ймовірностей $p(x)$ однозначно визначається за умови $p(x) \neq p(x + \pi)$, $x \in [0, 2\pi)$

і дорівнює круговому середньому значенню φ_1 , тобто $m_1 = \varphi_1$.

Крім того, якщо $p(x)$ одновершинна і симетрична, то кругове середнє значення φ_1 , кругова медіана m_1 і кругова мода μ_1 збігаються між собою, тобто $\varphi_1 \equiv m_1 \equiv \mu_1 \pmod{2\pi}$.

Коефіцієнт асиметрії випадкової величини $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ на прямій R визначається за формулою

$$A = \frac{M\{(\xi(\omega) - a_1)^3\}}{\sigma^3} = \frac{m^3}{\sigma^3},$$

де $a_1 = M\{\xi(\omega)\}$, $\sigma^2 = M\{(\xi(\omega) - a_1)^2\}$ є характеристикою зміщення (асиметрії) кривої щільності розподілу ймовірностей $\xi(\omega)$ від математичного сподівання a_1 .

Для симетричних одновіршинних щільностей розподілу (наприклад, закон гауссового розподілу) коефіцієнт асиметрії $\xi(\omega)$ дорівнює нулю.

Коефіцієнт асиметрії для випадкового кута $\psi(\omega) \equiv \Psi(\omega) \pmod{2\pi}$

визначається за формулою [1]

$$\gamma_1 = \frac{b_2(\mu)}{v^{3/2}}, \quad (14)$$

де $b_2(\mu)$ – центральний тригонометричний момент другого порядку $\psi(\omega)$; v – кругова дисперсія $\psi(\omega)$.

Обґрунтування виразу (14) базується на використанні характеристик симетричного намотаного гауссового розподілу.

Для випадкової величини $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ на прямій R коефіцієнт ексцесу

$$E = \frac{M\{(\xi(\omega) - a_1)^4\}}{\sigma^4} - 3 = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3$$

є характеристикою сплюснення або гостроти кривої щільності розподілу ймовірностей $\xi(\omega)$.

При обґрунтуванні коефіцієнта ексцесу випадкового кута $\psi(\omega) \equiv \Psi(\omega) \pmod{2\pi}$ згідно з формулою [1]

$$\gamma_2 = \frac{a_2(\mu) - (1 - v)^4}{v^2},$$

де $a_2(\mu)$ – центральний тригонометричний момент другого порядку ВК $\psi(\omega)$, $\omega \in \Omega$; також використана ідея $\gamma_2 = 0$ для симетричного закону намотаного гауссового розподілу.

Таким чином, числові характеристики випадкового кута $\psi(\omega) \equiv \Psi(\omega) \pmod{2\pi}$ на $[0, 2\pi)$ розглянуті порівняно з числовими характеристиками випадкової величини $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ на прямій R .

Приклади законів розподілу випадкового кута

Щільність закону намотаного гауссового розподілу визначається виразом

$$p_{н.г.}(x/\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{[(x - \mu) \pmod{2\pi} + 2\pi k]^2}{2\sigma^2}\right), \quad (15)$$

де μ – математичне сподівання; σ – середньоквадратичне відхилення випадкового кута $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$.

Характеристична функція закону намотаного гауссового розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f_n = \alpha_n = \exp\left(in\mu - \frac{n^2\sigma^2}{2}\right).$$

З рис. 1 видно, що намотаний гауссів розподіл одновіршинний і симетричний відносно значення $x = \mu \pmod{2\pi}$.

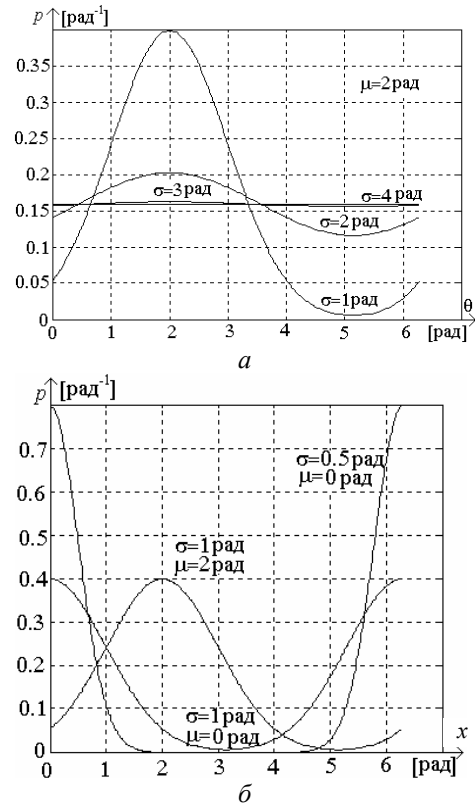


Рис. 1. Щільність намотаного гауссового розподілу випадкових кутів:
 $a - \mu = 2$ рад, $\sigma = (1; 2; 3; 4)$ рад;
 $b - \mu = 0$ рад, $\sigma = (0,5; 1)$ рад

Інший важливий у статистичному аналізі кутових величин – розподіл імовірності Мізеса. Щільність розподілу Мізеса для випадкового кута $\psi(\omega)$ має вигляд [1]:

$$p_M(x|\mu, k) = \frac{1}{2\pi I_0(k)} \exp\{k \cos(x - \mu)\}; \quad (16)$$

$|\mu| < \infty, k > 0,$

де μ – круговий середній напрямок випадкового кута; k – параметр концентрації випадкового кута в околі μ ; $I_0(k)$ – модифікована функція Бесселя першого роду і нульового порядку:

$$I_0(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\{k \cos x\} dx.$$

Значення μ є математичним сподіванням цього розподілу. Графіки функцій $P_M(x)$ для різних значень параметрів порівняно з намотаними гауссовими розподілами зображено на рис. 2.

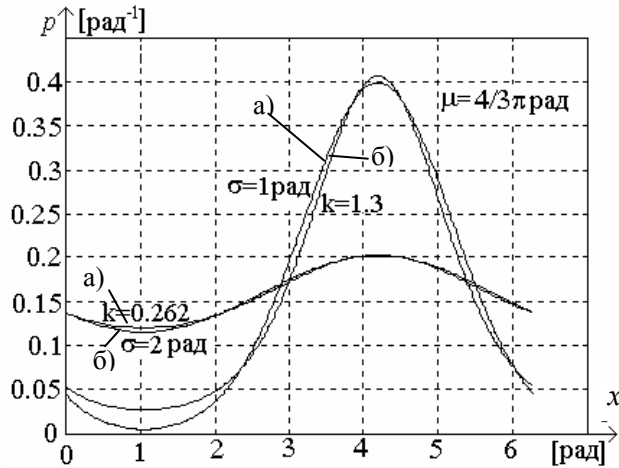


Рис. 2. Щільності ймовірності намотаного гауссового (а) та розподілу Мізеса (б): $\mu = 4\pi/3$ рад; $\sigma = 1$ рад і $k = 1,3$; $\sigma = 2$ рад і $k = 0,262$

Відповідний вибір параметрів намотаного гауссового розподілу дозволяє задовільно апроксимувати його розподілом Мізеса.

Графіки на рис. 2 свідчать про задовільну збіжність законів за відповідного вибору значень їх параметрів, причому зі зменшенням k розбіжність між законами зменшується.

Розподіл (16) порівняно з намотаним гауссовим розподілом (15) має математичний запис, який призводить до найпростіших оцінок параметрів розподілу.

Характеристична функція розподілу Мізеса дорівнює

$$f_n = \alpha_n = \frac{I_n(k)}{I_0(k)}.$$

Розподіл Мізеса має важливу властивість: найбільш правдоподібною оцінкою параметра μ є кругова середня напрямленість.

Співвідношення для параметрів σ і k щільностей ймовірності (15), (16), за якого ці розподіли мають однакову кругову дисперсію випадкових кутів, визначається з умови рівності модулів їх характеристичних функцій [1]:

$$\sigma = \sqrt{-2 \ln \frac{I_1(k)}{I_0(k)}} = \sqrt{-2 \ln(1-V)}.$$

Зазначені розподіли ймовірності мають відмінні властивості, які використовуються для статистичного аналізу випадкового кута.

Оскільки закони задовільно апроксимують один одного, їх подібність дозволяє сподіватися, що якоюсь мірою ці властивості властиві обома розподілами.

Іншими розподілами неперервних випадкових кутів є рівномірний, кардіоїдний, трикутний та намотаний Коші розподіли [1].

Використання в статистичній фазометрії

Основи статистичних кутових вимірювань є невід'ємною складовою статистичної фазометрії [3–5].

Як характерний приклад використання результатів досліджень кутових вимірювань в статистичній фазометрії розглянемо таблицю, де наведено формули для статистичної обробки вибірки об'єму M даних вимірювань випадкових фазових зсувів $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M\}$.

Висновки

1. Розглянуті моделі випадкових кутів є основою для створення статистичних методів обробки даних кутових вимірювань у різних галузях науки і техніки.
2. Наведено основні закони розподілу (функція розподілу, щільність розподілу, характеристична функція) випадкових кутів і проведено порівняльний аналіз їх властивостей з властивостями законів розподілу випадкових величин.
3. Числові характеристики випадкових кутів наведено з використанням результатів порівняльного аналізу з відповідними числовими характеристиками випадкових величин.
4. Розглянуто як приклади типові закони розподілу випадкових кутів – намотаний гауссів розподіл і розподіл Мізеса.
5. Важливим фактом при дослідженнях ряду характеристик випадкових кутів є можливість використання теорії періодичних функцій, рядів Фур'є.
6. Як характерний приклад використання результатів досліджень статистичних кутових вимірювань під час розв'язання задач статистичної фазометрії наведена таблиця формул для обчислення статистичних оцінок характеристик випадкових фазових зсувів за даними вимірювань.

Статистичні оцінки характеристик випадкових фазових зсувів

Найменування характеристики	Зміст
Середній фазовий зсув	$\varphi_c = \left\{ \arctg \frac{C}{S} + \frac{\pi}{2} \{2 - (\text{sign} S) \times [1 + \text{sign} C] \} \right.$ $C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \cos \varphi_k$ $S = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \sin \varphi_k$
Довжина результуючого вектора	$r = \sqrt{C^2 + S^2}$
Дисперсія фазового зсуву	$V = 1 - r$
Стандартне відхилення	$\sigma = \sqrt{-2 \ln(1 - V)} = \sqrt{-2 \ln r}$ $V = 1 - \exp(-0,5\sigma^2)$
Медіана	Фазовий зсув, якому відповідає точка кола A , якщо діаметр BA ділить вибіркві значення навпіл, і в околі якої спостерігається їх максимальна концентрація
Мода	Фазовий зсув, якому відповідає точка кола, в околі якої спостерігається максимальна концентрація значень вибірки
Розмах	Довжина найменшої дуги, що містить фазові зсуви: $T_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k, k = \overline{1, M-1}$ $T_M = 2\pi - \varphi_M + \varphi_1$ $W = 2\pi - \max\{T_1, \dots, T_M\}$
Тригонометричний момент порядку n відносно напрямку α (n – ціле число)	$T_n(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M e^{in(\varphi_k - \alpha)} = a_n(\alpha) + ib_n(\alpha) = r_n(\alpha) e^{im_n(\alpha)}, n = 0, 1, 2, \dots$ $a_n(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \cos[n(\varphi_k - \alpha)] = a_n(0) \cos(n\alpha) + b_n(0) \sin(n\alpha)$ $b_n(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \sin[n(\varphi_k - \alpha)] = -a_n(0) \sin(n\alpha) + b_n(0) \cos(n\alpha)$ $r_n(\alpha) = \sqrt{a_n^2(\alpha) + b_n^2(\alpha)} = \sqrt{a_n^2(0) + b_n^2(0)} = r_n(0)$ $m_n(\alpha) = m_n(0) - n\alpha$
Характеристика асиметрії	$g_1 = \frac{b_2(m)}{V^{3/2}} = \frac{r_2 \sin[m_2(0) - 2m]}{V^{3/2}}$
Характеристика ексцесу	$g_2 = \frac{a_2(m) - (1 - V)^4}{V^2} = \frac{r_2 \cos m_2(0) - 2n - (1 - V)^4}{V^2}$

Література

1. Мардіа К. Статистический анализ угловых наблюдений: Пер. с англ. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. – 240 с.
2. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
3. Бабак В.П., Куц Ю.В. Кутові намотані закони розподілу і їх застосування у фазометрії // Матеріали

V Міжнар. наук.-техн. конф “Авіа-2003”. – К.: НАУ, 2003. – Т.1. – С. 11.71–11.76.

4. Куц Ю.В., Щербак Л.М. Статистична обробка результатів кутових вимірювань сигналів // Вісн. НАУ. – 2003. – №3–4. – С. 22–26.

5. Куц Ю.В. Методи та системи статистичної фазометрії: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – К.: НАУ, 2004. – 36 с.

Стаття надійшла до редакції 07.02.07.