$$V = \frac{\partial \Psi}{\partial X}\sqrt{g}\ ;$$

$$I = \int_t \omega(V)dt = \frac{U}{\sqrt{g}}\int_t\int_X VdXdt = \frac{U}{\sqrt{g}}\int_t \Psi dt\ .$$

Тоді рівняння Белмана збігається з рівнянням Шредінгера:

$$\text{extr}\left\{\frac{\partial V}{\partial X}\dot{X} + \omega(V)\right\} = 0\ ;$$

$$g\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + U\Psi = 0.$$

Фізичний зміст використаного для побудови рівняння Шредінгера функціонала полягає у тому, що він відбиває умову екстремальності прояву властивостей матерії як варіаційного принципу її існування, а сам факт її існування вказує на те, що екстремумом є максимум. Тому експериментально встановлена істинність рівняння Шредінгера вказує на об'єктивний і універсальний характер цього принципу, що погоджується з принципом заборони Паулі.

При побудові рівняння руху, функціонала і функції його екстремального значення можна по-різному розподілити внесок метричного коефіцієнта в ці структурні об'єкти принципу оптимальності і зберегти при цьому кінцевий результат. Фізично цю інваріантість слід розуміти як прояв причинно-наслідкового зв'язку між градієнтом хвильової функції і довжиною фізичного простору і відповідно між нестаціонарністю градієнта хвильової функції і часовою тривалістю, що має динамічний характер.

Експериментально наведений принцип може бути перевірений підтвердженням існування ефекту динамічної поляризації вакуума при спостереженні протікання постійного струму через вакуумний конденсатор, пластини якого рухаються, наприклад, обертаються і за допомогою якого можна провести експеримент на зразок експерименту Майкельсона. Цей ефект є природним аналогом такого ж ефекту для електричної системи, в якій діелектрик рухається в електричному полі двох протилежно заряджених конденсаторів, і його переполяризація призводить до виникнення постійного струму. Існування такого ефекту очевидне і випливає із еквівалентності часової та просторової нестаціонарності системи, коли множення градієнта електричного поля на швидкість руху діелектрика дорівнює швидкості зміни поля.

Стаття надійшла до редакції 20.04.02.

УДК 621.372

В.М. Шутко, канд. техн. наук

РОЗПІЗНАВАННЯ В ЛАЗЕРНІЙ ЛОКАЦІЇ ЦІЛЕЙ З ОДНАКОВОЮ ЕФЕКТИВНОЮ ПОВЕРХНЕЮ РОЗСІЯННЯ

Розглянуто розпізнавання в лазерній локації цілей з різними об'ємними параметрами, які мають однакову ефективну поверхню розсіяння. Ця задача зводиться до перевірки гіпотези про належність випадкової величини до одного з двох розподілів Ерланга різного порядку.

У лазерній локації внаслідок флуктуацій сигналу в атмосфері інтенсивність відбитого від цілі сигналу є випадковою величиною, яка має гамма-розподіл [1; 2]. Параметр M цього розподілу дорівнює кількості так званих «плям». Кількість цих «плям» залежить від об'ємних параметрів цілі. Проте інтенсивність відбитого сигналу залежить не тільки від величини цілі, а й від матеріалів її виготовлення, тобто залежить від ефективної поверхні розсіяння. Використовуючи вказане, будують так звані хибні цілі. Тобто конструюють літальні апарати з малими габаритами, але, використовуючи спеціальні матеріали, куткові відбивачі тощо, досягають того, щоб середня інтенсивність сигналів, відбитих від таких цілей та істинних, була однаковою. Отже, необхідно розв'язувати задачу про їх не розпізнавання.

Нехай існує ціль, яка може бути істинною або хибною. Досліджуємо її короткими імпульсами.

Необхідно розпізнати її за інтенсивністю відбитого сигналу. Інтенсивність відбитого сигналу I – випадкова величина, яку спостерігаємо. Задані апріорні щільності розподілів цієї величини:

– для істинної цілі:

$$W_1(I)=\frac{1}{\Gamma[M_1]}*exp\left(\frac{-I}{\langle I\rangle/M_1}\right)*I^{M_1-1}*\frac{1}{[\langle I\rangle/M_1]^{M_1}};$$

– для хибної цілі:

$$W_0(I)=\frac{1}{\Gamma[M_0]}*exp\left(\frac{-I}{\langle I\rangle/M_0}\right)*I^{M_0-1}*\frac{1}{[\langle I\rangle/M_0]^{M_0}}$$

де $\langle I\rangle$ – середнє значення інтенсивності, однакове для обох розподілів і апріорно задане; M_1 і M_0 – кількість «плям» ($M_1 > M_0$), апріорно відомих, у досліді не спостерігаються.

Об'єкт спостерігається протягом деякого часу $t_р$. За цей час отримуємо n-вимірну незалежну вибірку $I_1, I_2, \ldots, I_n$.

Необхідно визначити, до якого з розподілів W_1 чи W_0 належить вибірка, оцінити достовірність розпізнавання, або інакше: як повинні розподілятися M_1 і M_0, щоб імовірність розпізнавання $P_р = 0{,}9$.

Період проходження імпульсів:

$T = 100$ імп / с ,

час розпізнавання:

$t_р = 30$ с .

Для першого наближення $M_0 = 1$.

Існує задача вибору однієї з двох альтернативних гіпотез [3; 4]. Звичайно розглядаються:

$\alpha = P(помилки\ \ I\ роду) = P(прийняти\ \ істинну\ \ ціль\ за\ хибну)$;

$\beta = P(помилки\ \ II\ роду) = P(прийняти\ \ хибну\ \ ціль\ за\ істинну)$.

Якщо говориться про помилку розпізнавання, то, очевидно, помилки I і II роду зрівнюються. Так і будемо будувати критерій. За змістом задачі вважаємо $M_0 < M_1$ заданими числами.

Проведемо вивчення логарифма відношення правдоподібності. Маємо при $m=1$ або 0, m – номер гіпотези

$$ln\ W_m(I) = -ln\ \Gamma(M_m) - \frac{IM_m}{\langle I\rangle} - ln\ I + M_m\, ln\frac{IM_m}{\langle I\rangle},$$

звідси

$$ln(W_1(I)/W_0(I)) = ln\ W_1(I) - ln\ W_0(I) =$$
$$= -ln\frac{\Gamma(M_1)}{\Gamma(M_0)} - \frac{I}{\langle I\rangle}(M_1 - M_0) + M_1\, ln\frac{IM_1}{\langle I\rangle} - M_0\, ln\frac{IM_0}{\langle I\rangle}.$$

Для вивчення залежності функції від I візьмемо похідну:

$$\frac{d}{dI}\left[ln\frac{W_1(I)}{W_0(I)}\right]=-\frac{M_1-M_0}{\langle I\rangle}+\frac{M_1-M_0}{I}. \tag{1}$$

З формули (1) видно, що при $I<\langle I\rangle$ похідна додатна, при $I>\langle I\rangle$ від'ємна, при $I=\langle I\rangle$ дорівнює 0. Отже, функція спочатку зростає, потім спадає (рис. 1).

Математичне сподівання позначимо $X=\frac{I}{\langle I\rangle}$. Функція розподілу цієї величини:

$$F_X(x)=P(X<x)=P(I<x\langle I\rangle)=F_I(x\langle I\rangle),$$

звідси щільність розподілу:

$$f_X(x)=\langle I\rangle f_I(x\langle I\rangle).$$

Отже, при m-й гіпотезі (при $m=1$ або $m=0$)

$$f_X(x)=\frac{\langle I\rangle}{\Gamma(M_m)}e^{-xM_m}X^{M_m-1}\frac{M_m^{M_m}}{\langle I\rangle^{M_m}}\langle I\rangle^{M_m-1}. \tag{2}$$

Після скорочення в чисельнику і знаменнику

$$f_X(x)=\frac{M_m^{M_m}}{\Gamma(M_m)}X^{M_m-1}e^{-xM_m}$$

Формула (2) спростилася: $\langle I\rangle$ до неї не входить. Тобто будемо вважати, що в k-му спостереженні спостерігалася нормована випадкова інтенсивність

$$X_k=\frac{I_k}{\langle I\rangle},$$

і будемо мати справу тільки з I_k, $1\le k\le n$.

Випадкова величина X_k при m-й гіпотезі має розподіл Ерланга порядку M_m з математичним сподіванням 1. Можна записати так:

$$X_k=\frac{1}{M}(\xi_1+...+\xi_M),$$

де $M=M_m$, ξ_k – незалежні показникові величини з параметром 1. Тобто $MX_k=1$. Звідси центрована величина $\overset{\circ}{X}_k=X_k-1$, $M\overset{\circ}{X}_k=0$. Розглянемо статистику

$$U=\sum_{k=1}^{n}\left(\overset{\circ}{X}_k\right)^2.$$

При $M_m=M$ маємо:

$$M\overset{\circ}{X}{}_k^2=M\left[\frac{1}{M}(\xi_1+...+\xi_M)-1\right]^2=\frac{1}{M},$$

так як

$$M\xi_i^2=\int_0^\infty x^2e^{-x}dx=2,$$

$$M\xi_i\xi_j=M\xi_i\cdot M\xi_j=1,\ при\ i\ne j,$$

звідси

$$MU=\frac{n}{M}.$$

Обчислимо дисперсію:

$$M\left(\overset{\circ}{X}{}_k^2\right)^2 = M\left(\overset{\circ}{X}_k\right)^4 = M\left[\frac{1}{M}(\xi_1+\ldots+\xi_M)-1\right]^4 = M\left[\frac{1}{M}\left(\overset{\circ}{\xi}_1+\ldots+\overset{\circ}{\xi}_M\right)\right]^4 =$$

$$= \frac{1}{M^4}\left\{M\cdot M(\overset{\circ}{\xi}_1)^4 + 3M(M-1)\left[M(\overset{\circ}{\xi}_1)^2\right]^2\right\} = \frac{M(\overset{\circ}{\xi}_1)^4 + 3(M-1)\left[M(\overset{\circ}{\xi}_1)^2\right]^2}{M^3};$$

$$M(\overset{\circ}{\xi}_1)^2 = \int_0^\infty (x-1)^2 e^{-x}dx = 1;$$

$$M(\overset{\circ}{\xi}_1)^4 = \int_0^\infty (x-1)^4 e^{-x}dx = 9.$$

Підставляючи рівняння (4) у формулу (3), отримуємо:

$$M\left(\overset{\circ}{X}_k\right)^4 = \frac{9+3(M-1)}{M^3} = \frac{3}{M^2}+\frac{6}{M^3};$$

$$D\left(\overset{\circ}{X}_k\right)^2 = \frac{3}{M^2}+\frac{6}{M^3}-\frac{1}{M^2} = \frac{2}{M^2}+\frac{6}{M^3},$$

звідси

$$DU = \frac{2n}{M^2}\left(1+\frac{3}{M}\right).$$

Випадкова величина U має розподіл, близький до нормального, з параметрами, вказаними у таблиці.

Моменти статистики U

Номер гіпотези	MU	DU
Нульова (ціль хибна)	$C_0 = \frac{n}{M_0}$	$D_0^2 = \frac{2n}{M_0^2}\left(1+\frac{3}{M_0}\right)$
Перша (ціль істинна)	$C_1 = \frac{n}{M_1}$	$D_1^2 = \frac{2n}{M_1^2}\left(1+\frac{3}{M_1}\right)$

Критерій сформулюємо так: при $U \le L$ приймаємо першу гіпотезу 1, тобто вважаємо ціль істинною; при $U > L$ вважаємо ціль хибною. Щоб зрівняти ймовірності помилок I і II роду (рис. 2), знайдемо L з рівняння:

$$\frac{L-C_1}{D_1} = \frac{C_0-L}{D_0},$$

звідси

$$L = \frac{C_1D_0 + C_0D_1}{D_0+D_1}.$$

Імовірності помилок I та II роду:

$$\alpha = \beta = 1-\Phi\left(\frac{C_0-C_1}{D_0+D_1}\right),$$

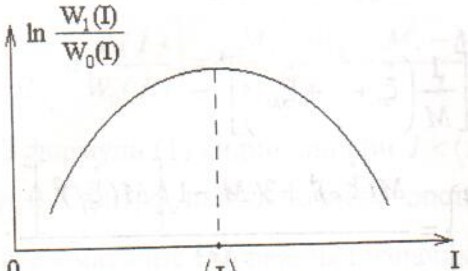

Рис. 1. Залежність відношення правдоподібності від I

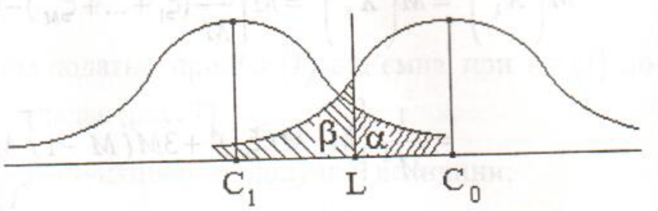

Рис. 2. Щільності розподілів імовірностей статистики U

де $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

Щоб $\alpha \le 0{,}1$, $\beta \le 0{,}1$, необхідно задовольнити умову:

$1-\Phi \le 0{,}1$ або $\Phi \le 0{,}9$.

З таблиці знаходимо

$$\frac{C_0-C_1}{D_0+D_1} \ge 1{,}3. \tag{5}$$

Тепер підставимо C_0, C_1, D_0, D_1 у формулу (5):

$$\frac{\sqrt{n}(M_1-M_0)}{\sqrt{2}\left[M_1\sqrt{1+\frac{3}{M_0}}+M_0\sqrt{1+\frac{3}{M_1}}\right]} \ge 1{,}3.$$

Підставляючи $n=3000$, отримаємо скінченну умову розпізнавання з імовірністю $P \ge 0{,}9$:

$$\frac{M_1-M_0}{M_1\sqrt{1+\frac{3}{M_0}}+M_0\sqrt{1+\frac{3}{M_1}}} \ge 0{,}0336. \tag{6}$$

Числовий розрахунок показує, що при $M_0 \le 12$ задача розв'язується при будь-яких $M_1 > M_0$. Якщо $M_0 > 12$, то при $M_1 = M_0 + 1$ задача не розв'язується, але при $M_1 \ge M_0 + 2$ розв'язується, коли $M_0 \le 27$. При великих M_0, M_1 приблизно в рівнянні (6) замінюємо корені одиницями. Тоді для того, щоб задача розв'язувалася при $M_1 = M_0 + k$, для M_0 отримуємо наближену умову $M_0 \le 15k$.

Список літератури

1. *Волоханюк В.А.* Вопросы оптической локации. – М.: Сов. Радио, 1971. – 256 с.
2. *Банах В.А., Миронов В.И.* Локационное распространение лазерного излучения в турбулентной атмосфере. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1986. – 170 с.
3. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988. – 400 с.
4. *Коваленко И.Н.* Исследования по анализу надежности сложных систем. – К.: Наук. думка, 1975. – 210 с.

Стаття надійшла до редакції 29.04.02.