АЕРОКОСМІЧНІ СИСТЕМИ МОНІТОРИНГУ ТА КЕРУВАННЯ

УДК 621.396.96

В.П. Харченко, д-р техн. наук,
О.Г. Кукуш, д-р фіз.-мат. наук,
Є.А. Бабак, мол. наук. співроб.

ГІПОТЕЗИ ЯКОСТІ ФУНКЦІОНУВАННЯ СУПУТНИКОВОЇ РАДІОНАВІГАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ ПРИ РІЗНОТОЧНОМУ СПОСТЕРЕЖЕННІ ТА НЕГАУСОВИХ ПОМИЛКАХ

Розглянуто математичну модель розрахунку сукупності псевдовідстаней від контрольно-коригувальної станції до навігаційного сузір'я та виявлення і вилучення з процесу визначення координат споживача супутників, які передають невірогідну інформацію. Особливу увагу приділено випадку різноточного спостереження та негаусових помилок.

На теперішній час у багатьох роботах для розрахунку координат контрольно-коригувальної станції (ККС) супутникових навігаційних систем використовується метод Ньютона [1]. Як альтернативний метод визначення координат ККС, авторами пропонується метод послідовних наближень.

Побудуємо математичну модель, яка цілком описує процес визначення координат споживача. Так як визначення координат споживача базується на квазідалекомірних вимірюваннях відстані від споживача ККС до певного супутникового сузір'я (не менше, як 4 супутника), то рівняння, яке описує дальність від споживача до супутника, має вигляд [2]:

$$\overline{r} = (r_1, r_2, ..., r_i, ..., r_N)^T, \quad N \geq 5,$$

де r_i – псевдодальність до i-го супутника.

За результатами спостереження визначається вектор координат ККС $X = (X_1, X_2, X_3)^T$, а також розходження шкал часу ККС та супутників Δt_{bias}. Замість змінної Δt_{bias} зручніше оперувати величиною:

$$W = V\Delta t_{bias},$$

де V – відома швидкість розподілу радіосигналів.

Беремо таку модель спостереження:

$$\overline{r} = \overline{F}(X) + W\overline{e} + \sigma_{\phi}\overline{\varepsilon}, \tag{1}$$

де $\overline{e} = (1, 1, ..., 1)^T \in \mathbf{R}^{N\times 1}$; σ_{ϕ}^2 – дисперсія флуктуаційної помилки спостереження псевдовідстаней; ε – вектор білого шуму, тобто випадковий гаусів вектор з нульовим середнім та одиничною кореляційною матрицею:

$$\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N).$$

Регресивну частину $\overline{F}(X) = (F_1(X), ..., F_N(X))^T$ рівняння (1) подамо у вигляді:

$$F_i(X) = \sqrt{(X_1 - x_{1i})^2 + (X_2 - x_{2i})^2 + (X_3 - x_{3i})^2}, \quad 1 \leq i \leq N,$$

де (x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) – координати i-го супутника.

Вважаємо, що для σ_{ϕ}^2 відома верхня межа $\sigma_{\phi 0}^2$:

$$\sigma_{\phi}^2 \leq \sigma_{\phi 0}^2. \tag{2}$$

Побудуємо оцінку $\widehat{X}$, виходячи зі співвідношення:

$$\overline{r} \approx \overline{F}(X) + W\overline{e}.$$

Звідси цільова функція набуває вигляду:

$$Q(X,W) = \left\|\bar{r} - \bar{F}(X) - W\bar{e}\right\|^2 .$$

Тоді $\hat{X}$ та $\hat{W}$ (оцінки для X та W) будуються, виходячи з умови:

$$Q(X,W) \to \min,$$

що призводить до рівнянь:

$$\frac{\partial Q}{\partial X} = 0;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial W} = 0 .$$

Маємо

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial W} = \bar{e}^{T}(\bar{r} - \bar{F}(X) - W\bar{e}).$$

Матрицю Якобі частинних похідних $\frac{\partial Q}{\partial X}$ знаходять з рівняння

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial X} = \bar{F}'(X)^T(\bar{r} - \bar{F}(X) - We),$$

де

$$\bar{F}'(x) = \left(\frac{\partial F_i(X)}{\partial X_j}\right)_{i=1,\ j=1}^{N\ \ 3};$$

$$\frac{\partial F_i(X)}{\partial X_j} = \frac{X_j - x_{ij}}{F_i(X)} .$$

Отже, $\hat{X}$ та $\hat{W}$ знаходять із системи рівнянь:

$$\begin{cases} \bar{F}'(X)^T(\bar{r} - \bar{F}(X) - W\bar{e}) = 0; \\ \bar{e}^{T}(\bar{r} - \bar{F}(X) - W\bar{e}) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Система рівнянь (3) може бути розв'язана числовими методами, наприклад, методом послідовних наближень [3].

Другою складовою частиною вирішення проблеми визначення працездатності навігаційних супутників, що знаходяться в зоні бачення, є перевірка гіпотези про нормальний режим у супутниковій радіонавігаційній системі. Для того, щоб організувати перевірку цієї гіпотези, лінеаризуємо модель (1) навколо точки X_e (трійка еталонних координат ККС). Тоді рівняння (1) набуває вигляду:

$$\bar{r} = \bar{F}(X_e) + \bar{F}'(X_e)\Delta X + W\bar{e} + \sigma_{\phi}\bar{\varepsilon}, \tag{4}$$

де $\Delta X = X - X_e$.

За оцінку ΔX беремо $\hat{X} - X_e$, де $\hat{X}$ знаходиться із системи (2). Ми можемо вважати, що $\Delta X = \hat{X} - X_e$ і $\hat{W}$ є оцінками найменших квадратів у моделі (4). Тоді розглянемо залишкову суму квадратів:

$$RSS = \left\|\bar{r} - \bar{F}(X_e) - \bar{F}'(X_e)\Delta\hat{X} - \hat{W}\bar{e}\right\|^2 . \tag{5}$$

У разі справедливості моделі спостереження (1), яку ми лінеаризуємо моделлю (4), тобто якщо всі супутники справні, буде справедливим таке співвідношення [4, с. 59]:

$$\frac{RSS}{\sigma_\phi^2} \approx \chi^2_{N-4},$$

де χ^2_{N-4} – χ^2 – розподіл з $N-4$ степенями вільності; N – число спостережених псевдовідстаней; 4 – загальне число параметрів, що оцінюються (координати X і W).

Якщо модель (1) не є справедливою, то маємо таке рівняння:

$$\frac{RSS}{\sigma_\phi^2} \geq (\chi^2_{N-4})_\alpha \tag{6}$$

і приймаємо рішення про відхилення гіпотези про нормальний режим. Тут $(\chi^2_{N-4})_\alpha$ є квантилем розподілу χ^2 з $N-4$ степенями вільності, а $1-\alpha$ –надійна ймовірність (звичайно береться за 0,95), тобто

$$P\left\{\chi^2_{N-4} \geq (\chi^2_{N-4})_\alpha\right\} = \alpha.$$

Але σ_ϕ^2 не є точно відомою. Скористаємося інформацією (2). Маємо:

$$\frac{RSS}{\sigma_\phi^2} \geq \frac{RSS}{\sigma_{\phi 0}^2}.$$

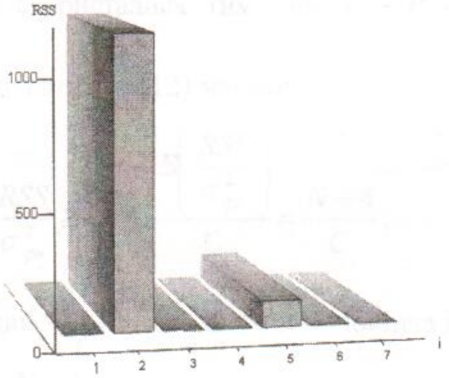
При цьому, якщо

$$\frac{RSS}{\sigma_{\phi 0}^2} \geq (\chi^2_{N-4})_\alpha, \tag{7}$$

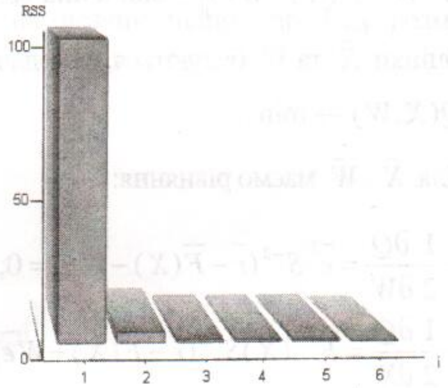
то виконання нерівності (6) гарантоване. Таким чином, ми відхиляємо гіпотезу при виконанні нерівності (5).

Нехай гіпотезу відхилено, тобто один або декілька супутників передають невірогідну інформацію. Визначимо такі супутники наступним способом. Згідно з нерівністю (5), *RSS* є сумою квадратів *N* координат відхилень (рис. 1):

$$RSS = \sum_{i=1}^{N} RSS_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\bar{r} - \bar{F}(X_e) - \bar{F}'(X_e)\Delta\hat{X} - \hat{W}\bar{e}\right)_i^2.$$



а



б

Рис. 1. Суми квадратів *N* координат відхилень:
а – один супутник передає невірогідну інформацію; *б* – супутникова радіонавігаційна система функціонує нормально

Упорядковуємо RSS_i за зменшенням:

$RSS_{i(1)} \geq RSS_{i(2)} \geq \ldots \geq RSS_{i(N)}$,

де $i(1), \ldots, i(N)$ – переставлення номерів $1, \ldots, N$.

Далі виключаємо дані супутника з номером $i(1)$, тобто супутник з порушенням режиму роботи. Отримаємо вектор $\bar{r}_{-i(1)} \in \mathbf{R}^{(N-1)\times 1}$. Для нього знову проводимо процедуру перевірки гіпотези про те, що всі інші супутники (без $i(1)$-го) працюють нормально. Якщо гіпотеза відхиляється, то остаточно вважаємо, що $i(1)$-й супутник несправний. Якщо ж гіпотезу не відхилено, то переходимо до $i(2)$-го супутника і так до $i(N)$-го супутника.

Може виявитися, що два (або більше) супутники є непрацездатними. Тоді описана процедура не дає результатів. У такому випадку комбінуємо по два (або більше) супутники, складаємо $\bar{r}_{-i(1),\, i(2)}$ і слідкуємо далі за алгоритмом.

Для випадка різноточних спостережень та можливих відхилень від гаусовості беремо модель спостереження:

$$\bar{r} = \bar{F}(X) + W\bar{e} + S_\phi \bar{\varepsilon}; \tag{8}$$

$$S_\phi = \mathrm{diag}(\sigma_{\phi 1}, \ldots, \sigma_{\phi N}),$$

де $\sigma^2_{\phi i}$ – дисперсія флуктуаційної помилки спостереження псевдовідстані до i-го супутника; $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N)$ – випадковий вектор з нульовим середнім та одиничною кореляційною матрицею (ε необов'язково є гаусовим).

Вважаємо, що $\sigma^2_{\phi i}$ відомі з точністю до сталого множника $\sigma^2_{\phi н}$ (номінальної дисперсії), тобто

$$\sigma^2_{\phi i} = \sigma^2_i \sigma^2_{\phi н},$$

де σ^2_i – задані, $i = \overline{1, N}$.

Причому $\sigma^2_{\phi н} \leq \sigma^2_{\phi о}$, $\sigma^2_{\phi о}$ відомі.

Позначимо $S = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N)$.

Цільова функція дорівнює:

$$Q(X, W) = \left\| S^{-1}(\bar{r} - \bar{F}(X) - W\bar{e}) \right\|^2,$$

де $\left\| S^{-1}(\bar{r} - \bar{F}(X) - W\bar{e}) \right\|$ – звичайна евклідова норма.

Оцінки $\hat{X}$ та $\hat{W}$ будуються, виходячи з умови:

$$Q(X, W) \to \min .$$

Для $\hat{X}$, $\hat{W}$ маємо рівняння:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial W} &= \bar{e}^{T} S^{-2}(\bar{r} - \bar{F}(X) - W\bar{e}) = 0; \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial X} &= \bar{F'}^{T}(X) S^{-2}(\bar{r} - \bar{F}(X) - W\bar{e}) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Для перевірки гіпотези лінеаризуємо модель (8) навколо еталонного значення X_e:

$$\bar{r} = \bar{F}(X_e) + \bar{F'}(X_e)\Delta X + W\bar{e} + S\sigma_{\phi н}\bar{\varepsilon}.$$

Для $\Delta X = \hat{X} - X_e$ і $\hat{W}$ розглянемо залишкову суму зважених квадратів:

$$RSS = \left\| S^{-1}(\overline{r} - \overline{F}(X_e) - \overline{F}'(X_e) \cdot \Delta \widehat{X} - \widehat{W}\overline{e}) \right\|^2. \tag{9}$$

Тепер розглянемо два випадки.

1. Якщо $\overline{\varepsilon}$ має нормальний розподіл: $\overline{\varepsilon} \approx N(0, I_N)$, то буде справедливим таке співвідношення [4, с. 59]:

$$\frac{RSS}{\sigma_{ф}^2} \approx \chi^2_{N-4}.$$

При виконанні нерівності

$$\frac{RSS}{\sigma_{фн}^2} \geq (\chi^2_{N-4})_{\alpha} \tag{10}$$

набуває рішення відхилити гіпотезу про нормальний режим. Маємо:

$$\frac{RSS}{\sigma_{фн}^2} \geq \frac{RSS}{\sigma_{ф0}^2}.$$

Якщо

$$\frac{RSS}{\sigma_{ф0}^2} \geq (\chi^2_{N-4})_{\alpha}, \tag{11}$$

то виконання нерівності (10) гарантоване. Таким чином ми відхиляємо гіпотезу при виконанні нерівності (11).

2. Нехай тепер закон розподілу $\overline{\varepsilon}$ невідомий. Відомо тільки те, що $E\overline{\varepsilon} = 0, E\overline{\varepsilon}\overline{\varepsilon}^T = I_N$.

Згідно з роботою [3, с. 60]:

$$\frac{RSS}{\sigma_{фн}^2} = \overline{\varepsilon}'(I_N - P)\overline{\varepsilon},$$

де $I_N - P$ – симетрична матриця рангу $N-4$.

Тоді

$$E\frac{RSS}{\sigma_{фн}^2} = E\overline{\varepsilon}'(I_N - P)\overline{\varepsilon} = E\mathrm{trace}(\overline{\varepsilon}'(I_N - P)\overline{\varepsilon}) = E\mathrm{trace}((I_N - P)\overline{\varepsilon}\overline{\varepsilon}') =$$

$$= \mathrm{trace}((I_N - P)E\,\overline{\varepsilon}\,\overline{\varepsilon}') = \mathrm{trace}(I_N - P) = N - 4. \tag{12}$$

Ми скористалися тим, що $I_N - P$ є проектором на деякий підпростір L_{N-4} розмірністю $N-4$.

Далі з виразу (12) маємо:

$$P\left\{\frac{RSS}{\sigma_{фн}^2} \geq C\right\} \leq \frac{E\left(\frac{RSS}{\sigma_{фн}^2}\right)}{C} = \frac{N-4}{C}.$$

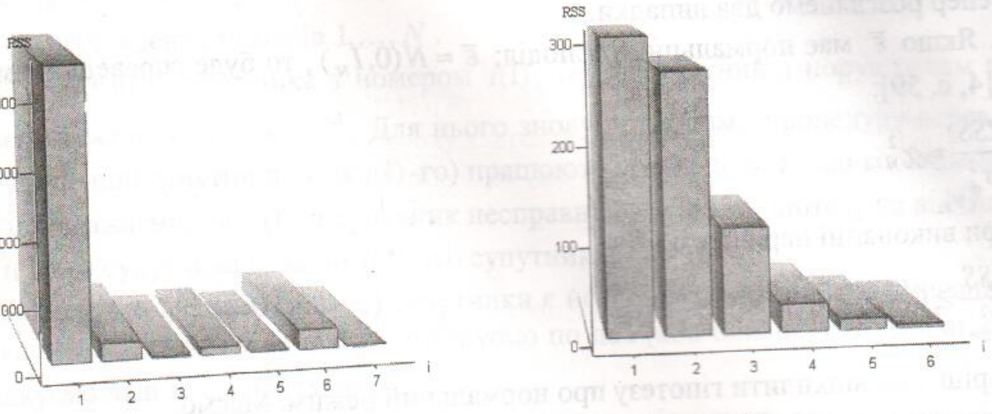
Нехай $\frac{N-4}{C} = \alpha$, де $1-\alpha$ – довірча імовірність. Тоді

$$C = \frac{N-4}{\alpha}.$$

При

$$\frac{RSS}{\sigma_{фн}^2} \geq \frac{N-4}{\alpha} \tag{13}$$

ми відхиляємо гіпотезу H_0 про нормальний режим (рис. 2).



а *б*

Рис. 2. Суми зважених квадратів N координат відхилень при різноточному спостереженні та негаусових помилках:

а – один супутник передає невірогідну інформацію; *б* – супутникова радіонавігаційна система функціонує нормально

При цьому ймовірність помилки I роду:

$$P\left(\text{відхилити } \mathrm{H_0} \middle| \mathrm{H_0} \text{ справедливе}\right) = P_{H_0}\left(\frac{RSS}{\sigma^2_{фн}} \geq \frac{N-4}{\alpha}\right) \leq \alpha.$$

Знову маємо

$$\frac{RSS}{\sigma^2_{фн}} \geq \frac{RSS}{\sigma^2_{ф0}}.$$

Тому замість нерівності (13), за критерій відхилення $\mathrm{H_0}$ беремо нерівність:

$$\frac{RSS}{\sigma^2_{ф0}} \geq \frac{N-4}{\alpha}.$$

Процедуру визначення несправного супутника подано раніше. У випадку різноточних спостережень використовується сума квадратів зважених залишків (9).

Список літератури

1. *Глобальная* спутниковая радионавигационная система ГЛОНАСС / Под ред. В.Н. Харисова, А.И. Перова, В.А. Болдина. – М.: ИПРЖР, 1998. – 400 с.

2. *Косенко Г.Г., Кукуш А.Г., Лазарев Г.Н.* Оценка погрешности дифференциальных методов определения координат в спутниковой радионавигационной системе // Радиоэлектроника. – 1999. – №7. – С. 71–78.

3. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. Т.1. – М.: Наука, 1971. – 632 с.

4. *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ. – М.: Мир, 1980. – С. 456.

Стаття надійшла до редакції 21. 06. 02.