

порівняння заданих і фактичних значень повторюється. Якщо при цьому похибка для δ і τ_m збільшується (ітераційний процес розходиться), то необхідно змінити δ_3 або τ_{m3} чи обрати ЦОС з іншими значеннями ООР.

Описана процедура вибору оптимального значення δ і τ_m включає два кроки: визначення приналежності точки $(\delta_3, \tau_{m3}, T_p)$ поверхні $\pi(\delta, \tau_m, T) = 0$ та ітераційний процес уточнення значень δ, τ_m, T . Скінченням результатом процедури є одержання такого кроку моделювання (екстраполяції) T_p , при якому $\delta = \delta_3 \pm \Delta\delta$, а $\tau_m = \tau_{m3} \pm \Delta\tau_m$, де τ_{m3} у свою чергу, визначає $t_{\text{пл}}$.

Отже, запропонований підхід дозволяє здійснити ефективний вибір між точністю моделювання δ і тимчасовими витратами τ_m при обчисленні однієї точки реакції ЦМ ДС.

Стаття надійшла до редакції 30.03.02.

УДК 681.3

В.В. Васильєв, чл.-кор.,
Л.О. Сімак, д-р техн. наук,
Г.М. Тодорова, асп.

АПРОКСИМАЦІЯ НЕПЕРЕРВНИХ СИГНАЛІВ У СЕРЕДОВИЩАХ ІНТЕГРОВАНИХ СИСТЕМ «MATHEMATICA» ТА «MATLAB/SIMULINK»

Розглянуто питання апроксимації неперервних сигналів узагальненими поліномами за допомогою модифікованого методу рівних площ. Показано, що використання цього методу призводить до простіших апаратних рішень та зменшує витрати обчислювальних ресурсів. Ілюстрацію виконано в інтегрованих середовищах Mathematica® та MatLab®.

В обчислювальній математиці та технічних прикладеннях широко використовується апроксимація сигналів поліномами на основі різних систем базисних функцій. Коефіцієнти поліномів, що наближують сигнали, як правило, визначаються за методом найменших квадратів [1]. Технічна реалізація цього методу ускладнюється у зв'язку з необхідністю обчислення інтегралів добутку сигналу з базисними функціями.

П.В. Мелентьевим [2] було розглянуто простіший метод апроксимації, заснований на визначенні коефіцієнтів апроксимуючого полінома, виходячи з умови рівності нулю інтегралів функцій похибки апроксимації на деякій системі інтервалів зміни аргументу. Цей метод було орієнтовано на ручні обчислення. У даній роботі запропоновано модифікований метод рівних площ.

Нехай неперервний сигнал $x(t)$ задано на деякому інтервалі зміни аргументу $[0, T]$. Вибирається деяка система функцій $\{s_k(t)\}_{k=0}^n$, що задані на тому ж інтервалі зміни аргументу. З теорії апроксимації відомо, що сигнал може бути подано на певному інтервалі зміни аргументу узагальненим поліномом

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=0}^n \tilde{X}(k) s_k(t). \quad (1)$$

Систему коефіцієнтів $\tilde{X}(k)$, як правило, називають апроксимуючим поліноміальним спектром сигналу $x(t)$.

Задача визначення апроксимуючого спектра формулюється так: визначити систему величин $\tilde{X}(k)$, що мінімізує норму $\|\beta(t)\|$ функції похибки:

$$\beta(t) = \tilde{x}(t) - x(t). \quad (2)$$

Як норму похибки будемо використовувати умову

$$\int_{t_i}^{t_j} r(t)\beta(t)dt = 0, \quad (3)$$

де $[t_i, t_j]$ – лінійно незалежні; $r(t)$ – вагова функція.

Сутність модифікованого метода рівних площ полягає в наступному. Інтервал зміни аргументу t розбивається на $(n+1)$ не обов'язково рівних частин. Рівняння емпіричної кривої підбирається так, щоб площі, обмежені істинною та емпіричною кривими, були рівні між собою для кожної ділянки окремо. Ця умова призводить до системи рівнянь першого степеня, з якої ми отримуємо апроксимуючий спектр.

Норма похибки для деякої системи лінійно незалежних підінтервалів має вигляд:

$$\int_{t_m}^{t_k} r(t) \left[\sum_{k=0}^n \tilde{X}(k) s_k(t) - x(t) \right] dt = 0. \quad (4)$$

Якщо зафіксовано інтервал зміни аргументу T , вид вагової та утворюючої функцій, а також порядок апроксимуючого полінома n , задача визначення апроксимуючого спектра \tilde{X} зводиться до помноження вектора Q на матрицю W^T :

$$\tilde{X} = W^{-1}Q, \quad (5)$$

де, наприклад, при вибиранні системи підінтервалів виду $\left[0, \frac{iT}{n+1}\right]$, $i=1, \dots, n+1$ (рис. 1) елементи матриці W і вектора Q будуть визначатися за формулами:

$$W_{ij} = \int_0^{\frac{iT}{n+1}} r(t) s_{j-1}(t) dt;$$

$$q_i = \int_0^{\frac{iT}{n+1}} r(t) x(t) dt;$$

$$i, j = 1, \dots, n+1. \quad (6)$$

Програму, що реалізує рівняння (1)–(6) для степеневій системі базисних функцій в середовищі системи «Mathematica» [3], надано в таблиці.

Розглянемо ілюстративний приклад використання методу. Апроксимуючий спектр оберненої Гама-функції ($x(t) = \frac{1}{\Gamma(t)}$, $t \in [0, 5]$) визначаємо методом рівних площ.

Фрагменти виразів програми на мові системи «Mathematica»

$s[T _, t _, m _] := Table \left[\left(\frac{1}{T} t \right)^{i-1}, \{i, 1, m\} \right]$	Визначення системи базисних функцій
$q[x _, h _, m _] := Table [NIntegrate [x, {t, 0, i h}], \{i, 1, m\}]$	Розрахунок вектора Q
$w0[T _, h _, m _] := Table \left[\int_0^{ih} \left(\frac{1}{T} t \right)^{i-1} dt, \{j, 1, m\}, \{i, 1, m\} \right]$	Розрахунок матриці W
$Inverse[W].Q$	Розрахунок апроксимуючого спектра

Як базисні функції візьмемо функції виду

$$s_k(t) = \left(\frac{1}{T}t\right)^k, k = \overline{0, n}.$$

При розбитті відрізка на п'ять інтервалів $\{[0, 1], [0, 2], [0, 3], [0, 4], [0, 5]\}$ за методом рівних площ отримаємо:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{10} & \frac{1}{75} & \frac{1}{500} & \frac{1}{3125} \\ 2 & \frac{2}{5} & \frac{2}{75} & \frac{2}{125} & \frac{2}{3125} \\ 3 & \frac{3}{10} & \frac{3}{25} & \frac{3}{500} & \frac{3}{3125} \\ 4 & \frac{4}{5} & \frac{4}{64} & \frac{4}{64} & \frac{4}{1024} \\ 5 & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} 0.541 \\ 1.626 \\ 2.378 \\ 2.690 \\ 2.782 \end{pmatrix}; \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} -0.304 \\ 2.497 \\ -1.405 \\ 0.276 \\ -0.018 \end{pmatrix}.$$

Графіки оберненої Г-функції та її апроксимації, а також функції похибки методу наведено на рис. 2, 3 відповідно.

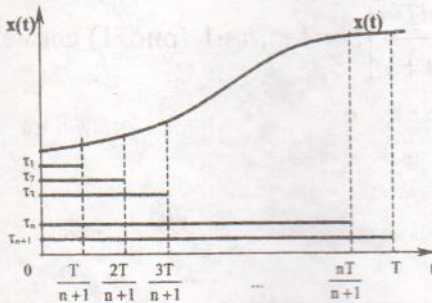


Рис. 1. Сигнал і можлива система інтервалів

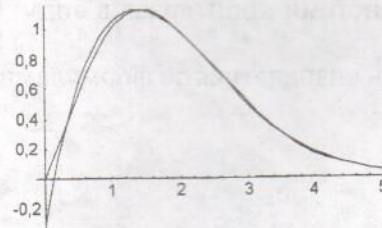


Рис. 2. Обернена Г-функція та її апроксимація поліномом четвертого степеня

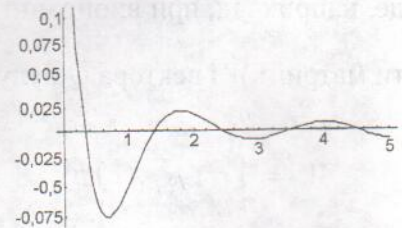


Рис. 3. Функція похибки для методу рівних площ

Розглянемо реалізацію модифікованого методу рівних площ у середовищі MatLab/Simulink [4; 5]. Розробка моделей засобами Simulink заснована на технології drag-and-drop («перетягни та залиши»). Для побудови S-моделі використовуються модулі (або блоки), що зберігаються в бібліотеці Simulink.

Бібліотека Simulink зручна тим, що, з одного боку, забезпечує користувачеві доступ до всіх основних можливостей пакета MatLab, а з іншого – є його достатньо самостійною компонентою, в тому розумінні, що при роботі з нею не обов'язково мати навички користування іншими інструментами, що входять до складу пакета.

Блоки, які включаються в модель, що створюється, можуть бути пов'язані один з одним як через інформацію, так і через управління. Тип зв'язку залежить від типу блока та логіки роботи моделі. Дані, якими обмінюються блоки, можуть бути скалярними величинами, векторами або матрицями довільної розмірності.

Будь-яка S-модель може мати ієрархічну структуру, тобто складатися з моделей нижчого рівня, при цьому кількість рівнів ієрархії практично не обмежена. Поряд з іншими параметрами моделювання користувач може задавати спосіб зміни модельного часу (з постійним або змінним кроком), а також умови закінчення моделювання.

Під час моделювання є можливість стежити за процесами, що відбуваються в системі. Для цього використовуються спеціальні «оглядові вікна», що входять до складу бібліотеки Simulink. Характеристики, що цікавлять користувача, можуть бути зображені як у числовій, так і в графічній формі.

Модель, що описує модифікований метод рівних площ, надано на рис. 4.

Змістовною частиною моделі є блок аналізу (Analysis). Його вхідні параметри – неперервний сигнал $x(t)$ і система базисних функцій $s(t)$. На виході знаходиться дисплей, на якому відображається отриманий спектр. Для простоти опису моделі розглянемо конкретний приклад. Необхідно визначити апроксимуючий спектр функції $x(t) = \cos(\pi t^2)$ на інтервалі $[0, 1]$. Інтервал розбивається на п'ять підінтервалів $[0; 0.1]$, $[0; 0.2]$, $[0; 0.3]$, $[0; 0.4]$, $[0; 0.5]$. Базисні функції мають вигляд $s_k(t) = t^k, k = 0, n$.

Розглянемо докладніше блоки, що задають сигнал і базисні функції. На рис. 5 показано блок $X(t)$.

Джерелом є генератор лінійно зростаючого сигналу Ramp, який у даному випадку асоціюється з часом t . За допомогою блоків математичних перетворень (піднесення до степеня, множення на константу, перетворення вхідного сигналу за допомогою тригонометричної функції) на виході отримуємо заданий сигнал $x(t)$. Для наочності перед виходом підключено «віртуальний осцилограф» (Scope), на якому в процесі моделювання відображається сигнал $x(t) = \cos(\pi t^2)$. Загальний вигляд блоку Scope з його панеллю інструментів зображено на рис. 6.

Блок $S(t)$ генерує систему базисних функцій $s_k(t) = t^k, k = 0, n$ (рис. 7).

Оскільки система базисних функцій має «зручний» для моделювання вигляд, можна з першої функції $s(t) = 1$ за допомогою інтегрування (блок Integrator) отримати наступні. Щоб позбавитися коефіцієнтів, які з'являються під час інтегрування, використовують блоки множення на константу Gain. Отримані функції виводяться на вихід цієї підсистеми та на віртуальний осцилограф.

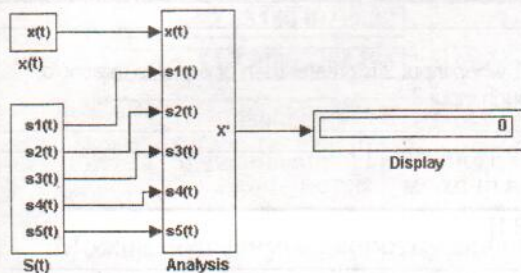


Рис. 4. Модель реалізації модифікованого методу рівних площ

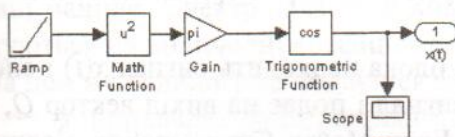


Рис. 5. Блок, що задає неперервний сигнал

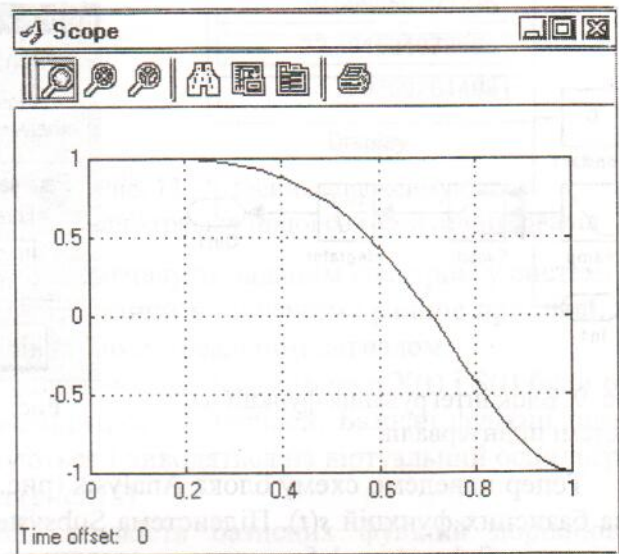


Рис. 6. Графік сигналу

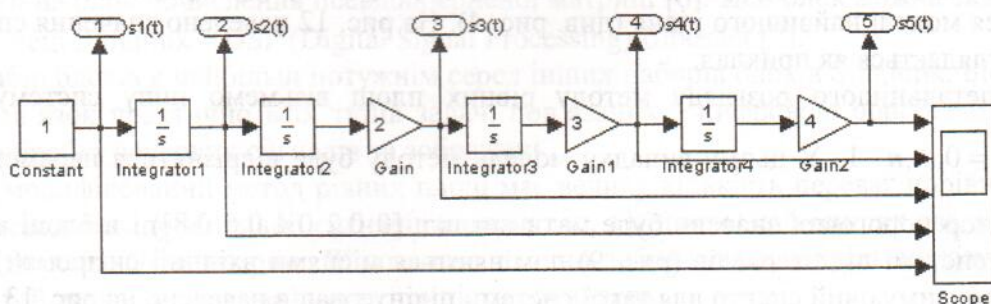


Рис. 7. Блок, що задає систему базисних функцій

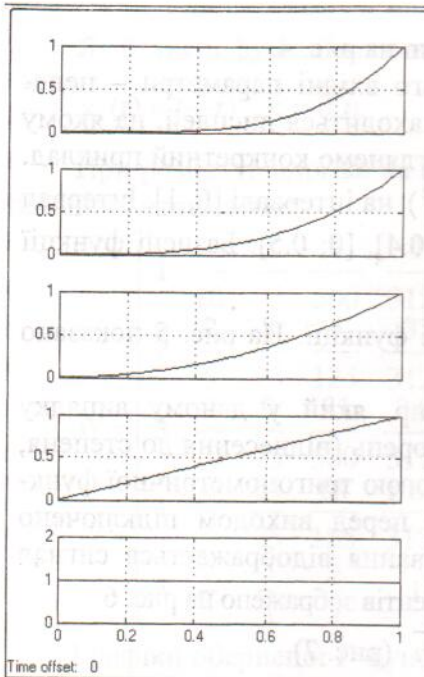


Рис. 8. Система базисних функцій

Зображення базисних функцій показано на рис. 8. До того, як перейти до описання центрального блоку моделі Analysis, необхідно відзначити, що в підсистемах цього блоку використовується конструкція, яку можна застосувати як при розрахунку вектора Q , так і при розрахунку векторів-стовпчиків матриці W . Загальним є інтегрування функції на одних і тих же інтервалах. Тобто для отримання вектора Q необхідно проінтегрувати на заданій системі підінтервалів сигнал $x(t)$, а для отримання стовпчиків матриці W – базисні функції на тій же системі інтервалів. Можна скористуватися цією властивістю та застосувати один і той же блок (рис. 9). На вхід цього блоку надходить єдиний сигнал – функція, що інтегрується. Два інших сигнали – нульовий сигнал та генератор лінійно зростаючої функції (в даному випадку вона описує час t) – є допоміжними. Доки t знаходиться в межах заданого інтервалу, перемикач Switch подає на інтегратор сигнал $x(t)$. Але як тільки час виходить за рамки інтервалу, сигнал перемикається на нульовий і більше не впливає на значення інтегралу. Оскільки MatLab орієнтовано, в першу чергу, на обробку масивів даних, то має сенс задавати в параметрах блоку Switch не один інтервал, а вектор, що складається з усіх п'яти підінтервалів, тоді на виході теж будемо мати вектор значень. Визначення системи підінтервалів за допомогою параметрів блоку Switch показано на рис. 10.

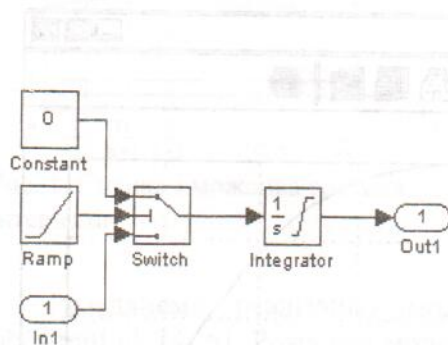


Рис. 9. Блок інтегрування функції на системі підінтервалів

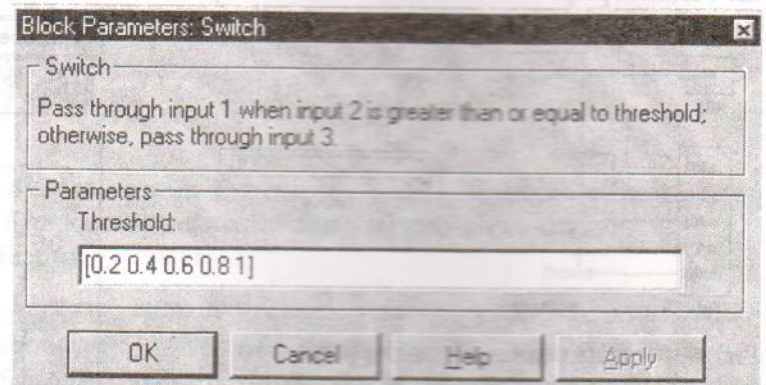


Рис. 10. Вікно налаштування параметрів блока Switch

Тепер наведемо схему блока Analysis (рис. 11). На вхід блоку надходить сигнал $x(t)$ і система базисних функцій $s(t)$. Підсистема Subsystem інтегрує сигнал і подає на вихід вектор Q , а підсистеми Subsystem 1-5 – вектори-стовпчики матриці W . Блок Matrix Concatenation з'єднує стовпчики в матрицю. Далі розташовані блоки розрахунку оберненої матриці та множення матриць. У підсумку на виході отримуємо сигнал апроксимуючого спектра, який з'являється на екрані дисплея моделі найвищого рівня (див. рис. 4). На рис. 12 наведено значення спектра функції, що розглядається як приклад.

Для детальнішого розгляду методу рівних площ візьмемо іншу систему інтервалів $\left[\frac{iT}{n}, T \right]$, $i = 0, \dots, n-1$. У цьому випадку модель методу буде відрізнятися параметрами блока Switch (вектор порогових значень буде мати вигляд: $[0 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.6 \ 0.8]$) і в блоці інтегрування функції на системі підінтервалів (рис. 9) поміняються місцями вхідний сигнал $x(t)$ і нульовий сигнал. Апроксимуючий спектр для такої системи підінтервалів наведено на рис. 13.

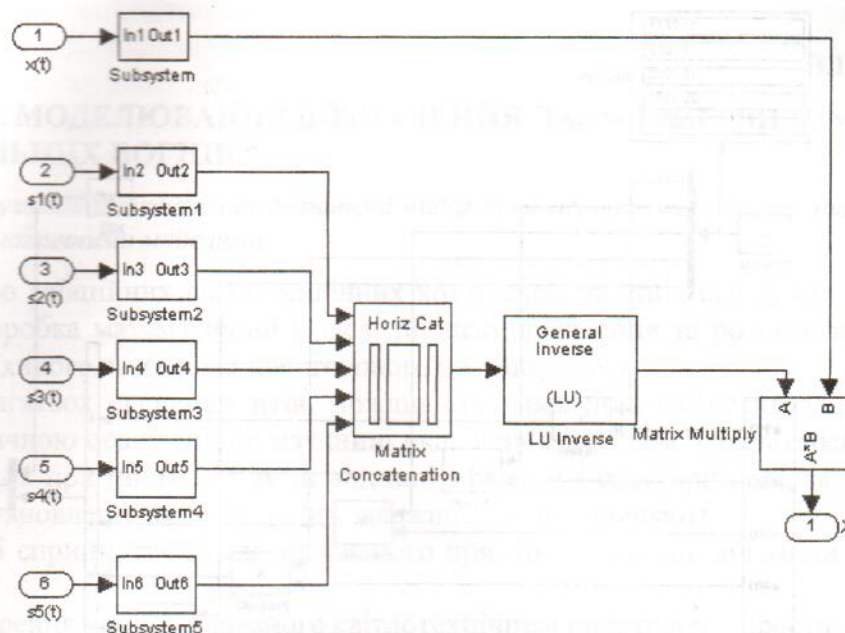


Рис. 11. Блок Analysis

1.0866720294736
-1.8888153155008
10.668060293222
-22.681501972802
11.730369284496

Display

Рис. 12. Значення апроксимуючого спектра

1.0866720294735
-1.8888153155014
10.668060293225
-22.681501972806
11.730369284498

Display

Рис. 13. Значення апроксимуючого спектра для іншої системи підінтервалів

Можна розглянути зворотну задачу – побудова сигналу за заданим спектром у системі базисних функцій. Для зручності візьмемо спектр, отриманий в описаному раніше прикладі, і за його допомогою побудуємо апроксимацію та порівняємо її з реальним сигналом.

Вигляд моделі, що описує синтез сигналу, показано на рис. 14. Блоки $X(t)$ і $S(t)$ були описані раніше. Спектр задається константою та виводиться на дисплей. Базисні функції помножуються на відповідні коефіцієнти спектра, сумуються і виводяться на віртуальний осцилограф. На цей же осцилограф подається заданий сигнал (рис. 15).

У прикладах було розглянуто випадок, коли кількість базисних функцій дорівнювала кількості підінтервалів. Але це не обов'язково. Можна збільшити точність обчислень за рахунок більшої кількості підінтервалів. Однак у цій моделі необхідно блок обчислення оберненої матриці замінити на блок обчислення псевдооберненої матриці [6]. Цей блок можна знайти в додатковій бібліотеці Simulink – DSP (Digital Signal Processing) Blockset [7].

Цей набір блоків є найбільш потужним серед інших наборів блоків Simulink. Бібліотека забезпечує розв'язок практично всіх типів задач, пов'язаних з цифровою обробкою сигналів, у тому числі, обробку звукових сигналів та зображень.

Отже, модифікований метод рівних площ має велику кількість переваг порівнянно з аналогічними методами апроксимації сигналів (наприклад, з методом найменших квадратів). Просте подання вектора Q та матриці W дозволяє наочно зображувати моделі аналізу та синтезу сигналів. У той же час метод має високу точність обчислень.

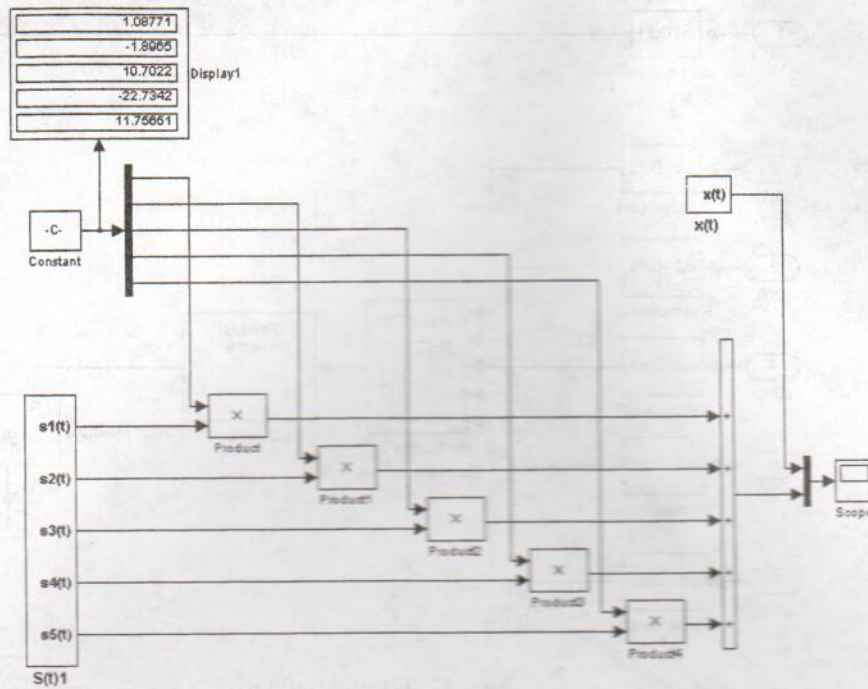


Рис. 14. Модель синтезу сигналу

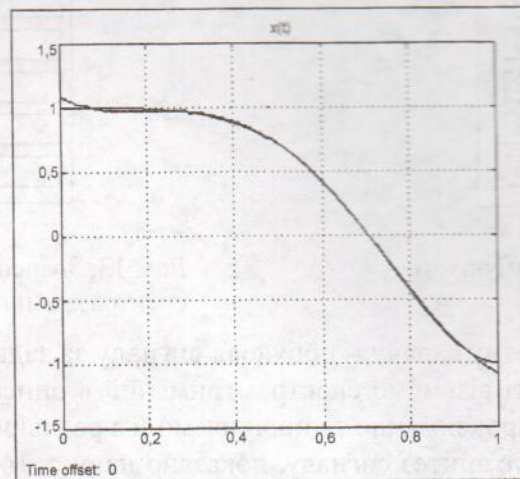


Рис. 15. Графік сигналу та його апроксимація

Особливої уваги заслугове пакет Simulink системи MatLab. Він надає можливість легко описувати складні стани системи простим з'єднанням готових блоків. Simulink якісно відрізняється від багатьох подібних програм. Відкрита архітектура пакета дозволяє поповнювати його блоками, що створюються користувачами.

Список літератури

1. Симак Л.А. Аппроксимирующие полиномиальные спектры непрерывных сигналов и их применение. – К., 1987. – 46 с. – Препринт/ АН УССР. Ин-т проблем моделирования в энергетике, 112.
2. Мелентьев П.В. Приближенные вычисления. – М.: Физматгиз, 1962. – 388 с.
3. Wolfram S. Mathematica: A system for doing mathematics by computer// Addison-Wesley, 1992. – 961 p.
4. Гулятьев А. Визуальное моделирование в среде MatLab: Учеб. курс. – СПб: Питер, 2000. – 432 с.
5. Simulink: Dynamic system simulation for MatLab// The MathWorks, Inc., 1997. – 450 p.
6. Гантмахер Ф.П. Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
7. Simulink: DSP Blockset// The MathWorks, Inc., 1997. – 130 p.

Стаття надійшла до редакції 30.03.02.