

Список літератури

1. Ален И., Голуб А. С и С++. Правила программирования. – М.: БИНОМ. – 272 с.
 2. Мейерс С. Эффективное использование С++. 50 рекомендаций по улучшению программ и проектов. – М.: ДМК, 2000. – 240 с.
 3. Сидоров Н.А. Применение принципов программной инженерии в преподавании основ программирования // УСМ. – 1999. – №2. – С. 50–57.
 4. Rajlich V.T., Bennett K.H. Software Cultures and Evolution // Computer. – 2001. – Sept. – P. 24–28.
 5. Керниган Б., Плотджер Ф. Элементы стиля программирования. – М.: Радио и связь, 1984. – 160 с.
 6. Нуквист Е. Правила хорошего тона для программирования на С++. – К.: Наук. думка, 1994. – 85 с.
 7. Хьюз Дж., Мичтом Дж. Структурный подход к программированию. – М.: Мир, 1981. – 331 с.
 8. Дейтел Х., Дейтел П. Как программировать на С++. Пер. с англ. – М.: БИНОМ, 1998. – 1024 с.
 9. Керниган Б., Плотджер Ф. Инструментальные средства программирования на языке Паскаль. – М.: Радио и связь, 1985. – 313 с.
 10. Михайлов А.И., Черный А.И., Гиляревский Р.С. Основы информатики. – М.: Наука, 1968. – 757 с.
 11. Fenton N.E., Pfleeger S.L. Software metrics // PWS PC. – 1996. – 560 с.
 12. Большая советская энциклопедия. Т. 20. – М.: Сов. энцикл., 1975. – 474 с.
 13. Основи програмування та алгоритмічні мови: Лабораторні роботи/ Уклад.: М.О. Сидоров, Ю.М. Крамар. – К.: КМУЦА, 2000. – 60 с.
- Стаття надійшла до редакції 30.03.02.

УДК 629.735:519.835

Л.М. Іванова, асист.

ОЦІНКА ТОЧНОСТІ ТА ВИТРАТ ЧАСУ НА ЦИФРОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З ВИКОРИСТАННЯМ ВЛАСТИВОСТЕЙ ІНТЕГРАЛА ЗГОРТКИ

Розглянуто підхід до побудови цифрової моделі динамічної системи з використанням властивостей інтеграла згортки, підхід до оцінки точності функціонування побудованої моделі. Для цифрової моделі, побудованої з використанням запропонованого підходу, обчислено максимальну відносну точність моделювання δ та витрати часу на моделювання однієї точки реакції t_m . У результаті проведених експериментів побудовано поверхню $\pi(\delta, T) = 0$, де T – крок моделювання. Визначено, як по поверхні π можна вибрати оптимальні значення δ та t_m .

Для побудови цифрових моделей (ЦМ) динамічних систем (ДС) при невідомих апіорі законах зміни в часі вхідних сигналів пропонується метод з використанням властивостей інтеграла згортки.

Лінійні ДС вигляду:

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j x^{(j)}(t), \quad (1)$$

при заданих початкових умовах (ПУ):

$$y^{(n-1)}(t)|_{t=0} = y^{(n-1)}(0), \dots, y'(t)|_{t=0} = y'(0), y(t)|_{t=0} = y(0),$$

де n, m – вищі порядки відповідно вихідного параметра і вхідного сигналу ($n \geq m$); a_i, b_j – коефіцієнти диференційного рівняння (ДУ), $y^{(i)}(t)$ – i -та похідна вихідного параметра; $x^{(j)}(t)$ – j -та похідна вхідного сигналу мають важливі для подальшого розгляду властивості. Для таких ДС справедливий принцип суперпозиції (накладання) реакцій систем від окремих вхідних впливів. Властивості цих ДС не змінюються в часі, оскільки визначені коефіцієнтами (1), що не залежать від t .

Відповідно до першої властивості для будь-якого значення t , якщо

$$x(t_i) = \sum_{k=1}^n x_k(t_i) + x(0), \quad (2)$$

то

$$y(t_i) = \sum_{k=1}^n y[x_k(t_i)] + y[x(0)]. \quad (3)$$

У свою чергу, за другою властивістю, якщо

$$x(t) = A \cdot 1(t); \quad A = \text{const}; \quad (4)$$

$$x(t-\tau) = A \cdot 1(t-\tau), \quad (5)$$

то

$$y[x(t)] \Big|_{t=t_k} = y[x(t-\tau)] \Big|_{t=t_k+\tau}; \quad (6)$$

$$y[x(t-\tau)] \Big|_{t=t_k} = y[x(t)] \Big|_{t=t_k-\tau}. \quad (7)$$

При підстановці відповідно співвідношень (6) і (7) у рівності (4) і (5) вони набувають вигляду:

$$y[A_1(t)] \Big|_{t=t_k} = y[A_1(t-\tau)] \Big|_{t=t_k+\tau};$$

$$y[A_1(t-\tau)] \Big|_{t=t_k} = y[A_1(t)] \Big|_{t=t_k-\tau}$$

або

$$Ah(t) \Big|_{t=t_k} = Ah(t-\tau) \Big|_{t=t_k+\tau}; \quad (8)$$

$$Ah(t-\tau) \Big|_{t=t_k} = Ah(t) \Big|_{t=t_k-\tau}, \quad (9)$$

де $h(t)$ – перехідна характеристика.

Тобто при зсуві графіка перехідної характеристики $h(t)$ ДС вправо уздовж осі t на значення τ у виразі (9) він у точності збігається з графіком характеристики $h(t-\tau)$, і, навпаки, при зсуві графіка $h(t-\tau)$ вліво уздовж осі t на значення τ у виразі (8) він у точності збігається з графіком $h(t)$.

У процесі функціонування реальних моделюючих систем (МС) вхідний безперервний сигнал $x(t)$ при введенні в систему для більшості випадків піддається екстраполяції першого порядку. Отже, якщо $x(t)$ змінюється по задалегідь невідомому закону, то з урахуванням роботи екстраполятора він піддається ступінчастій апроксимації (рис. 1). Тоді справедливі такі співвідношення:

$$x(t) \approx x^*(t) = x(0) + \sum_{k=1}^n \Delta x_k(t-t_k), \quad t_k=k;$$

$$y[x(t)] \approx y[x^*(t)] = y \left[x(0) + \sum_{k=1}^n \Delta x_k(t-t_k) \right].$$

З урахуванням властивостей лінійних ДС і співвідношень (1)–(9) вихідний сигнал зображується як:

$$y(t) = y[x^*(t)] = y[x(0)] + \sum_{k=1}^n y[\Delta x_k(t-t_k)] = \\ = y[A_0 1(t)] + \sum_{k=1}^n y[A_k 1(t-kT)] = A_0 h(t) + \sum_{k=1}^n A_k h(t-kT), \quad (10)$$

де коефіцієнти $A_k = \text{const}$ ($k = \overline{1, n}$) дорівнюють прирощенням значень вхідного сигналу $x(t)$ у відповідні такти квантування. Тоді

$$A_0 = x_0 = x(0);$$

$$A_k = \Delta x_k = x(t_{k+1}) - x(t_k);$$

$$y(t) = x(0)h(t) + \sum_{k=1}^n \Delta x_k h(t - kT). \quad (11)$$

Якщо збільшувати число ділянок n на інтервалі часу $[0, t_m]$ (рис. 1), то в границі при $n \rightarrow \infty$:

$$x^*(t) \rightarrow x(t), \quad \Delta x_k \rightarrow dx = x'(\tau) d\tau$$

вираз суми переходить в інтеграл, і формула (11) має вигляд:

$$y(t) = x(0)h(t) + \int_0^{t_m} x'(\tau) h(t - \tau) d\tau, \quad (12)$$

де $0 \leq \tau \leq t_m$.

Вираз (12) є однією з форм запису інтеграла згортки, який у прийнятих позначеннях може мати вигляд наступних залежностей:

$$y(t) = x(0)h(t) + \int_0^{t_m} h(\tau) x'(t - \tau) d\tau; \quad (13)$$

$$y(t) = h(0)x(t) + \int_0^{t_m} w(\tau)x(t - \tau) d\tau; \quad (14)$$

$$y(t) = h(0)x(t) + \int_0^{t_m} x(\tau)w(t - \tau) d\tau. \quad (15)$$

Викладені міркування і формули (12)–(15) підтверджують той факт, що використання інтеграла згортки дозволяє провести моделювання реакції ДС на вхідний вплив $x(t)$, що довільно змінюється в часі. На практиці краще віддати перевагу застосуванню формул (12) або (13), що пов'язано з їх певними перевагами: експериментальне визначення перехідної характеристики $h(t)$ ДС не являє труднощів, а визначення функції ваги $w(t)$ ДС сполучено з деякими затрудненнями, тому що вхідний сигнал, який при цьому використовується, – $\delta(t)$ (функція Дірака) – фізично не можна реалізувати. Обчислення за залежністю $w(t) = h'(t)$ призводять до додаткових похибок при визначенні $w(t)$. Крім того, на відміну від застосування формул (12) та (13), використання співвідношень (14) і (15) ускладнює урахування ПУ для вхідного сигналу і моделювання сталих значень вихідного параметра y , оскільки за визначенням $w(t) \equiv 0$ при $t_m \rightarrow \infty$ як $w(\tau) \rightarrow 0$, так і $w(t - \tau) \rightarrow 0$. Тому і надалі при побудові ЦМ ДС за запропонованим методом використовується перехідна характеристика $h(t)$.

З наведених міркувань випливає, що співвідношення (10) задає чисельний алгоритм обчислення виразу (12). Для виразу (13) цей алгоритм зображують як

$$y(t) = A_0 h(t) + \sum_{k=1}^n h_k A(t - kT); \quad (16)$$

$$h_k = h(t_k) = h(kT);$$

$$A(t - kT) = A(t - t_k) = \Delta x(t - kT) = x[t - (k+1)T] - x[t - kT].$$

Вирази (10) та (16) можна переписати у вигляді:

$$y(t) = \sum_{k=0}^n A_k h(t - kT), \quad (17)$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^n h_k A(t - kT), \quad (18)$$

де $n = \text{int}(t/T) + 1$; $\text{int}(D)$ – ціла частина D .

Відповідно до виразів (17) та (18), для того, щоб обчислити значення $y[n]$, необхідно мати значення h і A у $n+1$ попередніх точках. Причому при збільшенні t зростає і кількість доданків у виразах (17) та (18), тобто обсяг обчислень зростає при збільшенні n . Для усунення цього небажаного явища пропонується наступний підхід. При заданій похибці σ визначається час перехідного процесу $t_{\text{пр}}$ такий, що

$$\left| \frac{h(\infty) - h(t_{\text{пр}})}{h(\infty)} \right| \leq \sigma. \quad (19)$$

Тоді верхня границя (17) буде дорівнювати:

$$M = \text{int}(t_{\text{пр}}/T) = N, \quad t > t_{\text{пр}};$$

$$M = \text{int}(t/T), \quad t \leq t_{\text{пр}}$$

і вираз (17) буде мати вигляд:

$$y(t_n) \Big|_{t_n=nT} = y[nT] = \sum_{k=0}^N A_{n-M+k} h(t_{\text{пр}} - kT) + h[(N+1)T] \sum_{i=0}^{n-N-1} A[iT], \quad (20)$$

де друга сума дорівнює нулю при $n \leq N$ і враховує сталі значення параметра y , що моделюється, для $n > N$.

Очевидно, що формула (20) справедлива і для довільних, не обов'язково кратних цілому T , значень t :

$$y(t) = \sum_{k=0}^N A_{t-MT+kT} h(t_{\text{пр}} - kT) + h(NT) \sum_{t=0}^{t-NT-1} A_t. \quad (21)$$

Формула (21) також задає обчислювальний алгоритм моделювання параметра y і для безперервного t . У цьому випадку передбачається завдання $h(t)$ як ступінчасто-апроксимованої характеристики (рис. 1).

Для інтеграла (13) з урахуванням рівняння (18) формули (20), (21) будуть мати вигляд:

$$y(t_n) \Big|_{t_n=nT} = y[nT] = \sum_{k=0}^N h_{N-k} A[t_n - (M-k)T] + h[NT] \sum_{i=0}^{n-NT-1} A[iT]; \quad (22)$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^N h_{N-k} A(t - (M-k)T) + h(NT) \sum_{t=0}^{t-NT-1} A_t. \quad (23)$$

Отже, співвідношення (20), (22) описують дискретну, а формули (21), (23) – безперервно-дискретну моделі вихідного параметра y , причому у другому випадку передбачається завдання $h(t)$ або $x(t)$ як ступінчасто-апроксимованих характеристик (рис. 1). Значення $h[k]$ обчислюються або у процесі моделювання, або заздалегідь і формуються в масив чисел. Інший масив чисел тієї ж розмірності, що і масив $h[k]$, формується з вхідної послідовності A_k . Формування масиву $A[kT]$ проводиться по конвеєрному принципу: визначення чергового значення A_k , зсув усіх попередніх значень A_{k-1} на T . Потім відповідно до формули (20) або (22) здійснюється перемноження $h[kT]$ і $A[kT]$, тобто за відомим $k = \overline{0, N}$ попереднім значенням A_k однозначно визначається реакція ДС $y[n]$ $n = \overline{0, \text{int}(t_M/T)}$ на вхідну послідовність $x[n]$, що довільно змінюється в часі.

Точність моделювання $W_T(u)$, де u – метод моделювання ДС, залежить як від кількості членів ряду (20) або (22), що утримуються (тобто заданого розміру похибки σ із співвідношення (19)), так і від обраного T , причому період дискретизації T повинен ураховувати частотні властивості безперервної ДС, що моделюється. Загальні аналітичні методи оцінки точності ЦМ ДС, що функціонують за алгоритмами (20), у даний час розроблені недостатньо, у зв'язку з чим пропонується метод оцінки точності $W_T(u)$, заснований на властивостях інтеграла згортки.

Сутність пропонованого методу базується на наступних міркуваннях. Сам принцип дії цифрової МС припускає дискретну апроксимацію вхідного сигналу $x(t)$, яка здійснюється за прикладом, показаним на рис.1, і реакція ЦМ ДС може бути визначена не тільки в тактах

квантування n , але і при довільному t , некратному цілому T , що впливає з властивостей лінійних ДС. Таким чином, реалізація співвідношень (20)–(23) дозволяє проводити побудову як дискретних, так і безперервно-дискретних моделей. У другому випадку припускається ступінчаста апроксимація вхідного сигналу $x(t)$ або $h(t)$, що відповідає принципу дії цифрової системи, оскільки у процесі перетворення проводиться вибірка $x(t)$ у момент nT і фіксація цього значення до наступного $(n+1)T$ такту перетворення.

Отже, запропонований метод еквівалентний визначенню реакції безперервної моделі ДС, яка реалізована, наприклад, на операційних підсилювачах із ступінчасто-апроксимованим вхідним сигналом $x(t)$, і дозволяє досягати потенційних значень показника $W_T(u)$. Крім того, метод, моделюючи реакції ДС на довільно мінливий, невідомий априорі сигнал, припускає також моделювання реакції ДС з довільним кроком у міжтактові проміжки, що є еквівалентом дискретного модифікованого методу z -перетворення. Проте запропонований метод на відміну від модифікованого методу z -перетворення не потребує ніяких додаткових перетворень моделі як при зміні T , так і при довільній зміні кроку всередині інтервалу $[n, (n+1)T]$. Ця особливість методу базується на властивості, яка припускає суперпозицію вихідних сигналів у довільний момент t часу моделювання.

При запропонованому підході також можлива реалізація співвідношення (17) або (18), коли кількість членів ряду (17) або (20), які утримуються, не обмежується t_{min} та заданою σ , тобто враховуються усі доданки, що дозволяє здійснювати моделювання власне безперервно-дискретної системи, а не її деякого наближення.

При використанні запропонованого методу $x(t)$ може задаватися й у табличному вигляді.

Як зазначалося, можливі два варіанти реалізації ЦМ ДС: точки характеристики $h(t)$ прораховуються заздалегідь на інтервалі $[0, t_{\text{min}}]$, або характеристика $h(t)$ визначається у процесі моделювання. Очевидно, що перший варіант є найбільш переважним для систем реального часу. У цьому випадку основні обчислювальні ресурси (ООР) ЦМ ДС, що функціонують за алгоритмами (20)–(23), визначаються тільки розмірами σ і T або точністю відтворення $h(t)$ і не залежать від порядку n безперервної ДС. Справді, ООР ЦМ ДС, що реалізують співвідношення (20)–(23), визначаються кількістю арифметичних операцій і елементів масивів, а отже, і точністю зображення $h(t)$ в оперативній пам'яті МС, а не порядком n ДС.

Реалізація співвідношень (20)–(23) у вигляді ЦМ ДС здійснюється з використанням елементарних машинних операторів. Так, обчислення першої суми виразу (22) проводиться в циклі з використанням машинного оператора:

$$Y := Y + A(I)H(I), \quad (24)$$

де Y – значення параметра, що моделюється, $I = \overline{0, N}$; A – масив значень A_k ; H – масив значень h_k .

Обчислення другої суми виразу (22) проводиться з накопиченням значень (інтегрування):

$$A(N+1) := A(N+1) + A(N), \quad (25)$$

де $A(N+1)$ – сталі значення $h(NT+1)$; $A(N)$ – значення A_N .

Затримка (зсув) послідовностей A_k або h_k на такт моделювання T здійснюється з використанням операції перевизначення (пересилки) елементів масивів, яка проводиться в циклі:

$$A(k+1) := A(k) \quad \text{або} \quad H(k+1) := H(k), \quad (26)$$

де $k = \overline{0, N-1}$.

Отже, запропонований алгоритм ЦМ ДС використовує такі машинні операції: додавання, множення та пересилки. Якщо верхня границя суми дорівнює N , тоді при обчисленні одного значення $u[n]$ кількість операцій у формулах (20), (22) для першої суми складе N додавань, N множень, $N-1$ пересилки; для другої суми – одне додавання і одне множення. Таким чином, загальна кількість операцій при моделюванні однієї точки вихідного параметра $u[n]$ з урахуванням обчислення двох сум для додавання і множення складе $(N+1)$, а для пересилки – $(N-1)$.

У цьому випадку обсяг пам'яті команд $W_{V1}(u)$ власне ЦМ ДС містить усього три елементарні машинні оператори (24)–(26), що виконуються в циклі. Надійність ЦМ ДС буде достатньо висока, тому що кількість операторів програми ЦМ ДС навіть з урахуванням їх виконання в циклі мала, тоді і можливість появи помилок також буде мала.

Розглянемо на конкретному прикладі проведення оцінки точності моделювання ЦМ. Припустимо, що задана ДС сьомого порядку при нульових ПУ:

$$\begin{aligned} & \frac{d^7 y(t)}{dt^7} + 20,3 \frac{d^6 y(t)}{dt^6} + 133,9725 \frac{d^5 y(t)}{dt^5} + 406,9513 \frac{d^4 y(t)}{dt^4} + 1203,549 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + \\ & + 1385,94 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 845,9399 \frac{dy(t)}{dt} + 205,3713 y(t) = \end{aligned} \quad (27)$$

$$= \frac{d^5 x(t)}{dt^5} + 13,8 \frac{d^4 x(t)}{dt^4} + 75,14 \frac{d^3 x(t)}{dt^3} + 276,878 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 701,3065 \frac{dx(t)}{dt} + 240,688.$$

Експеримент проводився на основі порівняння функціонування безперервної та дискретної (цифрової) моделей ДС у вигляді (27). Реакція безперервної ДС обчислювалася аналітично за допомогою пакета MatLab, а моделювання реакції дискретної ДС (ЦМ, що побудована з використанням властивостей інтеграла згортки) реалізувалася відповідно до запропонованого методу. Значення перехідної характеристики $h(t)$ були також отримані аналітично в середовищі MatLab і розміщені у програмі реалізації ЦМ у вигляді блоку даних.

Методика проведення експерименту полягає в наступному. Задається значення максимальної абсолютної помилки моделювання:

$$\Delta_{\max} = 0,03 \cdot |h_{\text{уст}}|,$$

тобто трубка допуску $\pm 3\%$ від $|h_{\text{уст}}|$. Такий вибір Δ_{\max} дозволяє оцінити «інтегральну» абсолютну помилку безвідносно до причин, що її викликали (амплітудні або фазові помилки), оскільки передбачається, що поточне значення абсолютної помилки $\Delta_{\text{тек}} \leq \Delta_{\max}$, причому

$$\Delta_{\text{тек}} = |y_{\text{н}}(t)|_{t=kT} - y_{\text{д}}[kT],$$

де $y_{\text{н}}$ – вихідний сигнал безперервної моделі; $y_{\text{д}}$ – вихідний сигнал дискретної ЦМ.

Відносну помилку моделювання δ , що відповідає $\Delta_{\text{тек}}$, обчислюють за формулою

$$\delta = \frac{\Delta_{\text{тек}}}{\Delta_{\max}} 100\%. \quad (28)$$

Отже, якщо $\delta = 100\%$, то $\Delta_{\text{тек}} = \Delta_{\max}$. Очевидно, що

$$\Delta_{\text{тек}} = \Delta_{\text{тек}}[k]; \quad \delta = \delta[k].$$

Протягом усього інтервалу моделювання $t \in [0, t_m]$ для кожного $t = kT$ обчислюють значення $\Delta_{\text{тек}}[kT]$, а потім з цих значень вибирають найбільше

$$\Delta_{\text{м}}(t)|_{t=k_m T} = \Delta_{\text{м}}[k_m T]$$

і за формулою (28) обчислюють максимальну похибку δ , що відповідає знайденому $\Delta_{\text{м}}[k_m T]$.

У процесі експерименту на вхід безперервної моделі подається безперервний синусоїдальний сигнал $x(t)$ з амплітудою, яка дорівнює одиниці, а на вхід ЦМ ДС – ступінчасто-апроксимований сигнал $x^*(t)$, який був зформований із $x(t)$ екстраполятором нульового порядку. Для усунення впливу на результати експерименту вільної (перехідної) складової моделей визначення похибки моделювання проводиться тільки після проходження часу $5 t_{\text{пп}}$ ($t_{\text{пп}}$ – час затухання перехідного процесу, що відповідно до аналітичних розрахунків дорівнює 14,5 с) від початку моделювання, при цьому час закінчення моделювання покладається рівним $10 t_{\text{пп}}$.

При дослідженні характеристик ЦМ ДС задаються різні розрахункові значення часу $t_{\text{пп}}$:

$$t_{\text{пп}} = \{3,5; 5,0; 10,0; 12,5; 20,0\},$$

а для кожного значення $t_{\text{пп}}$ задаються крок екстраполяції T і частота вхідного сигналу f :

$T = \{0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5\}$,

логарифмічний масштаб зміни:

$$f = 0,01; 1,0 \text{ Гц.}$$

Розрахункові значення часу перехідного процесу вибираються як меншими, так і більшими від аналітичного значення $t_{\text{пп}}$, що зменшує або збільшує кількість членів ряду, які утримуються при згортці відповідно до виразу (22). Ця кількість є одним з основних чинників, що роблять вплив на точність моделювання реакції ДС. Іншим чинником є значення T , так як воно також впливає на кількість членів ряду, що утримуються. У свою чергу, витрати часу τ_m на моделювання однієї точки характеристики ДС залежать від кількості членів ряду, що утримуються.

Як приклад розрахунку витрат часу τ_m розглядалася керуюча ЦОМ з характеристиками часу виконання операцій: додавання – 4,8 мкс, множення – 9,2 мкс, пересилка – 2,0 мкс. Розрахунок витрат часу τ_m наведено для двох випадків.

1. Припустимо, що $t_{\text{пп}} = 5,0$ с, $T = 1,0$ с, тоді з урахуванням кількості значень перехідної характеристики, що утримуються, і співвідношень (24)–(26) число операцій множення складе 7, додавання – 7, пересилки – 5, усього – 19 операцій. Сумарний час виконання операцій τ_m розраховується як сума добутків кількості операцій на час їх виконання. Отже, для аналізованого випадку $\tau_m = 108$ мкс.

2. Для $t_{\text{пп}} = 20$ с, $T = 0,1$ с кількість операцій множень складе 202, додавання – 202, пересилки – 200, усього – 604 операції. Тоді сумарний час виконання операцій $\tau_m = 3228$ мкс.

У результаті проведених експериментів були отримані графіки, що являють собою поверхні $\pi_i(\delta, f, T) = 0$ ($i = \overline{1,5}$) у тривимірному просторі координат δ, f, T , і для кожного узлового значення поверхні π_i обчислені витрати часу τ_m на моделювання однієї точки реакції ЦМ ДС. Оцінка залежності похибки моделювання δ від витрат часу моделювання τ_m здійснюється з використанням цих графіків: при заданих $t_{\text{пп}i}$ ($i = \overline{1,5}$) і T_j ($j = \overline{0,5}$) будуються залежності $\delta(\tau_m)$ як криві, що огинають максимальні значення $\delta(f)$ по всіх $t_{\text{пп}i}$ для одних і тих самих T_j .

Побудована у такий спосіб поверхня $\pi(\delta, \tau_m, T) = 0$ містить інформацію про співвідношення між δ, τ_m, T (рис. 2).

Використовуючи дані рис. 2 і результати роботи ЦМ ДС, можна здійснити оптимальний вибір між δ і τ_m . Так, при зменшенні похибки від $\delta = 905,4\%$ ($T_i = 0,5$ с, $t_{\text{пп}} = 5$ с) до $\delta = 101,4\%$

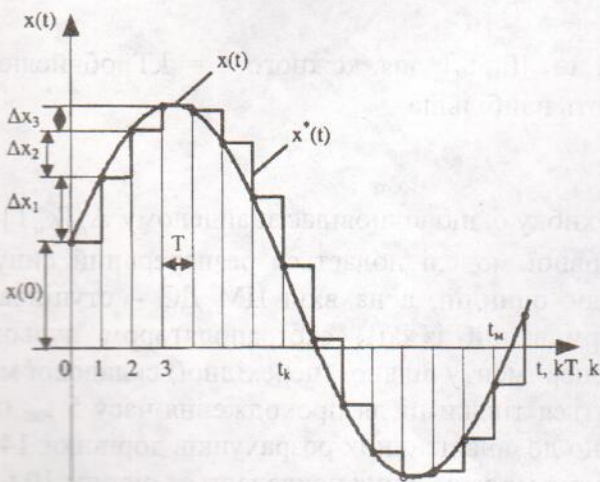


Рис. 1. Апроксимація вхідного сигналу $x(t)$ при його введенні до МС:

τ_m – максимальний час моделювання

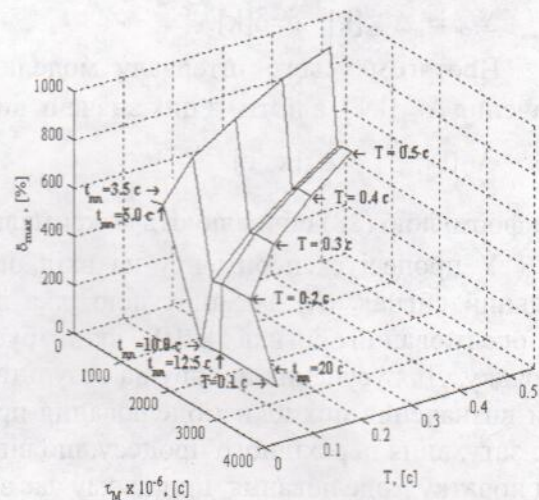


Рис. 2. Поверхня $\pi(\delta, \tau_m, T) = 0$

($T_i = 0,1$ с; $t_{\text{пп}} = 12,5$ с), тобто приблизно у 8,93 раз, витрати часу збільшуються від $\tau_m = 188$ мкс до $\tau_m = 2028$ мкс. Зазначені точки лежать на границі поверхні π , тобто кожна точка належить одночасно парі кривих. Перша точка належить до плоскої кривої $\delta(\tau_m)|_{T=0,5}$ і просторової кривої, що огинає точки кривих $\delta(\tau_m)|_{t_{\text{пп}}=5}$. Друга точка належить до плоскої кривої $\delta(\tau_m)|_{T=0,1}$ і просторової кривої, що огинає точки кривих $\delta(\tau_m)|_{t_{\text{пп}}=12,5}$. Як приклад оптимального вибору δ і τ_m розглянемо декілька пар точок, що належать поверхні π .

Припустимо, є точка $\tau_m = 828$ мкс з $\delta = 569,36$ % ($t_{\text{пп}} = 5$ с, $T = 0,1$ с) і точка $\tau_m = 828$ мкс з $\delta = 194,22$ % ($t_{\text{пп}} = 10$ с, $T = 0,2$ с). Отже, розглядаються дві точки поверхні π , у яких досягається одне і те саме значення витрат часу на моделювання – $\tau_m = 828$ мкс, тобто при тих самих витратах часу τ_m збільшення кроку моделювання T веде для аналізованої пари точок до зменшення похибки δ . Природньо в цьому випадку обрати точку з $t_{\text{пп}} = 10$ с, $T = 0,2$ с, для котрої $\delta = 194,22$ %, $\tau_m = 828$ мкс.

Для наступної пари точок при тому ж самому значенні $\tau_m = 428$ мкс похибка $\delta_1 = 655,67$ % ($t_{\text{пп}} = 5$ с, $T = 0,2$ с), а похибка $\delta_2 = 406,49$ % ($t_{\text{пп}} = 10$ с, $T = 0,4$ с). У цьому випадку при збільшенні кроку моделювання від $T = 0,2$ с до $T = 0,4$ с похибка також значно зменшується. Доцільніше обрати точку з $t_{\text{пп}} = 10$ с, $T = 0,4$ с.

У випадку довільно заданої у просторі координат $\delta\tau_m$ точки (δ_3, τ_{m3}) пропонується така процедура: передбачається, що $\delta_3 \in [\delta_{\text{min}}, \delta_{\text{max}}]$ і $\tau_{m3} \in [\tau_{\text{min}}, \tau_{\text{max}}]$. Оскільки поверхня $\pi(\delta, \tau_m, T) = 0$, яка показана на рис. 2, будується кривими $\delta(\tau_m)|_{T=T_i}$, то наближена оцінка похибки δ як функції τ_m проводиться з використанням лінійної інтерполяції функції двох змінних $T(\delta_3, \tau_{m3})$, тобто визначається таке єдине значення T_p , при якому точка $(\delta_3, \tau_{m3}, T_p)$ лежить на поверхні π , де T_p – розрахункове значення T .

Можливий випадок, коли для заданих значень δ_3, τ_{m3} відсутнє значення T_p , при якому точка $(\delta_3, \tau_{m3}, T_p)$ належить поверхні π , тобто задана точність моделювання не може бути досягнута при заданих витратах часу, іншими словами – ресурси моделюючої цифрової обчислювальної системи (ЦОС), які існують у наявності, не в змозі при витратах часу τ_{m3} забезпечити похибку моделювання δ_3 . У цьому випадку необхідно змінити вимоги до точності моделювання чи до витрат часу на моделювання або провести вибір ЦОС з іншими ресурсами.

Визначення факту приналежності точки $(\delta_3, \tau_{m3}, T_p)$ поверхні π здійснюється з використанням програмних засобів. При цьому необхідно враховувати, що поверхня π у машинному вигляді зображається як двовимірна таблиця значень T_{ij} , заданих у вузлах сітки по δ_i і τ_{mj} , причому кількість вузлів по аргументах може бути різною. Отже, парі аргументів δ_i і τ_{mj} відповідає єдине значення функції T_{ij} . Якщо задані такі δ_i та τ_{mj} , що $T_{ij} = T_{i+1,j} = T_{i,j+1} = T_{i+1,j+1} = 0$, то точка $(\delta_3, \tau_{m3}, 0)$ знаходиться поза поверхнею π . Реалізація програми, що аналізує подібний випадок, не натикається на труднощі.

Належність точки $(\delta_3, \tau_{m3}, T_p)$ поверхні $\pi(\delta, \tau_m, T) = 0$ визначається з деякою похибкою, на яку необхідний допуск. Рекомендується обирати такі границі допусків за координатами:

$$\Delta\delta = \left| \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{2} \right|, \quad \Delta\tau = \left| \frac{\tau_{i+1} - \tau_i}{2} \right|,$$

де $\Delta\delta$ і $\Delta\tau_m$ визначаються для максимальних значень міжвузлових різниць по індексам i та j .

Після обчислення T_p проводиться корекція його значення і значення τ_{m3} з урахуванням дискретності завдання характеристики $h(t)$, тобто з точністю до мінімального кроку DT дискретизації $h(t)$. Потім моделюється реакція ЦМ ДС і визначається характеристика $(\delta_3, \tau_{m3})|_{T=T_p}$, за якою проводиться оцінка відповідності фактичних і заданих значень δ і τ_m . У випадку їхнього виходу за границю заданого допуску T_p коректується на крок DT , розрахунок і

порівняння заданих і фактичних значень повторюється. Якщо при цьому похибка для δ і τ_m збільшується (ітераційний процес розходиться), то необхідно змінити δ_3 або τ_{m3} чи обрати ЦОС з іншими значеннями ООР.

Описана процедура вибору оптимального значення δ і τ_m включає два кроки: визначення приналежності точки $(\delta_3, \tau_{m3}, T_p)$ поверхні $\pi(\delta, \tau_m, T) = 0$ та ітераційний процес уточнення значень δ, τ_m, T . Скінченням результатом процедури є одержання такого кроку моделювання (екстраполяції) T_p , при якому $\delta = \delta_3 \pm \Delta\delta$, а $\tau_m = \tau_{m3} \pm \Delta\tau_m$, де τ_{m3} у свою чергу, визначає $t_{\text{пл}}$.

Отже, запропонований підхід дозволяє здійснити ефективний вибір між точністю моделювання δ і тимчасовими витратами τ_m при обчисленні однієї точки реакції ЦМ ДС.

Стаття надійшла до редакції 30.03.02.

УДК 681.3

В.В. Васильєв, чл.-кор.,
Л.О. Сімак, д-р техн. наук,
Г.М. Тодорова, асп.

АПРОКСИМАЦІЯ НЕПЕРЕРВНИХ СИГНАЛІВ У СЕРЕДОВИЩАХ ІНТЕГРОВАНИХ СИСТЕМ «MATHEMATICA» ТА «MATLAB/SIMULINK»

Розглянуто питання апроксимації неперервних сигналів узагальненими поліномами за допомогою модифікованого методу рівних площ. Показано, що використання цього методу призводить до простіших апаратних рішень та зменшує витрати обчислювальних ресурсів. Ілюстрацію виконано в інтегрованих середовищах Mathematica ® та MatLab ®.

В обчислювальній математиці та технічних прикладеннях широко використовується апроксимація сигналів поліномами на основі різних систем базисних функцій. Коефіцієнти поліномів, що наближують сигнали, як правило, визначаються за методом найменших квадратів [1]. Технічна реалізація цього методу ускладнюється у зв'язку з необхідністю обчислення інтегралів добутку сигналу з базисними функціями.

П.В. Мелентьевим [2] було розглянуто простіший метод апроксимації, заснований на визначенні коефіцієнтів апроксимуючого полінома, виходячи з умови рівності нулю інтегралів функцій похибки апроксимації на деякій системі інтервалів зміни аргументу. Цей метод було орієнтовано на ручні обчислення. У даній роботі запропоновано модифікований метод рівних площ.

Нехай неперервний сигнал $x(t)$ задано на деякому інтервалі зміни аргументу $[0, T]$. Вибирається деяка система функцій $\{s_k(t)\}_{k=0}^n$, що задані на тому ж інтервалі зміни аргументу. З теорії апроксимації відомо, що сигнал може бути подано на певному інтервалі зміни аргументу узагальненим поліномом

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=0}^n \tilde{X}(k) s_k(t). \quad (1)$$

Систему коефіцієнтів $\tilde{X}(k)$, як правило, називають апроксимуючим поліноміальним спектром сигналу $x(t)$.

Задача визначення апроксимуючого спектра формулюється так: визначити систему величин $\tilde{X}(k)$, що мінімізує норму $\|\beta(t)\|$ функції похибки:

$$\beta(t) = \tilde{x}(t) - x(t). \quad (2)$$