

УДК 629.735

О.І. Запорожець, д-р техн. наук, проф.,
В.І. Токарев, д-р техн. наук, проф.

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ІМПЕДАНСНОЇ ПОВЕРХНІ НА РОЗПОВСЮДЖЕННЯ АКУСТИЧНИХ ХВИЛЬ

Розглянуто нове розв'язання задачі поширення звуку вздовж імпедансної поверхні з використанням рівняння Гельмгольца і відповідної граничної умови. Отриманий розв'язок порівнюється з відомими теоретичними та експериментальними даними поширення звуку вздовж відбиваючої імпедансної поверхні.

Дослідження розповсюдження звуку вздовж імпедансної поверхні має важливе прикладне значення в задачах поширення звуку над землею поверхнею [1–3]. При поширенні звукових хвиль уздовж поверхні спостерігається ряд ефектів: поглинання, відбивання, інтерференція. Інтерференція звукових хвиль виявляється у вигляді ефектів взаємодії прямих і відбитих хвиль, що розповсюджуються між акустичним джерелом і приймачем. Найбільш характерним випадком розміщення джерел шуму відносно приймача є варіант, коли звукова хвиля розповсюджується вздовж земної поверхні на відстань, яка перевищує довжину звукової хвилі (розглядається модель компактних джерел шуму).

У реальних умовах відбиваюча поверхня не є ідеально жорсткою, тому амплітуда коливань звуку у відбитій хвилі менша від падаючої завдяки поглинанню звуку поверхнею. Це ослаблення звуку залежить від нормалізованої характеристики адмітанса поверхні. У разі імпедансної поверхні спостерігаються фазові і амплітудні зміщення прямої і відбитої хвиль, які утворюють складну інтерференційну картину ослаблення чи посилення звуку в окремих смугах частот.

Аналіз існуючих розрахункових моделей показує, що вплив ефектів інтерференції звукових хвиль, прямої та відбитої, на розповсюдження залежить від висоти джерела і приймача звуку, відстані між джерелом і приймачем, імпедансних характеристик земної відбиваючої поверхні. На рис. 1 показані результати експериментальних досліджень впливу відбиваючої поверхні на рівні звукового тиску шуму реактивного двигуна для акустично жорсткої поверхні з бетону й акустично м'яких поверхонь, виготовлених з пінопласту різної товщини (4 та 8 дюймів).

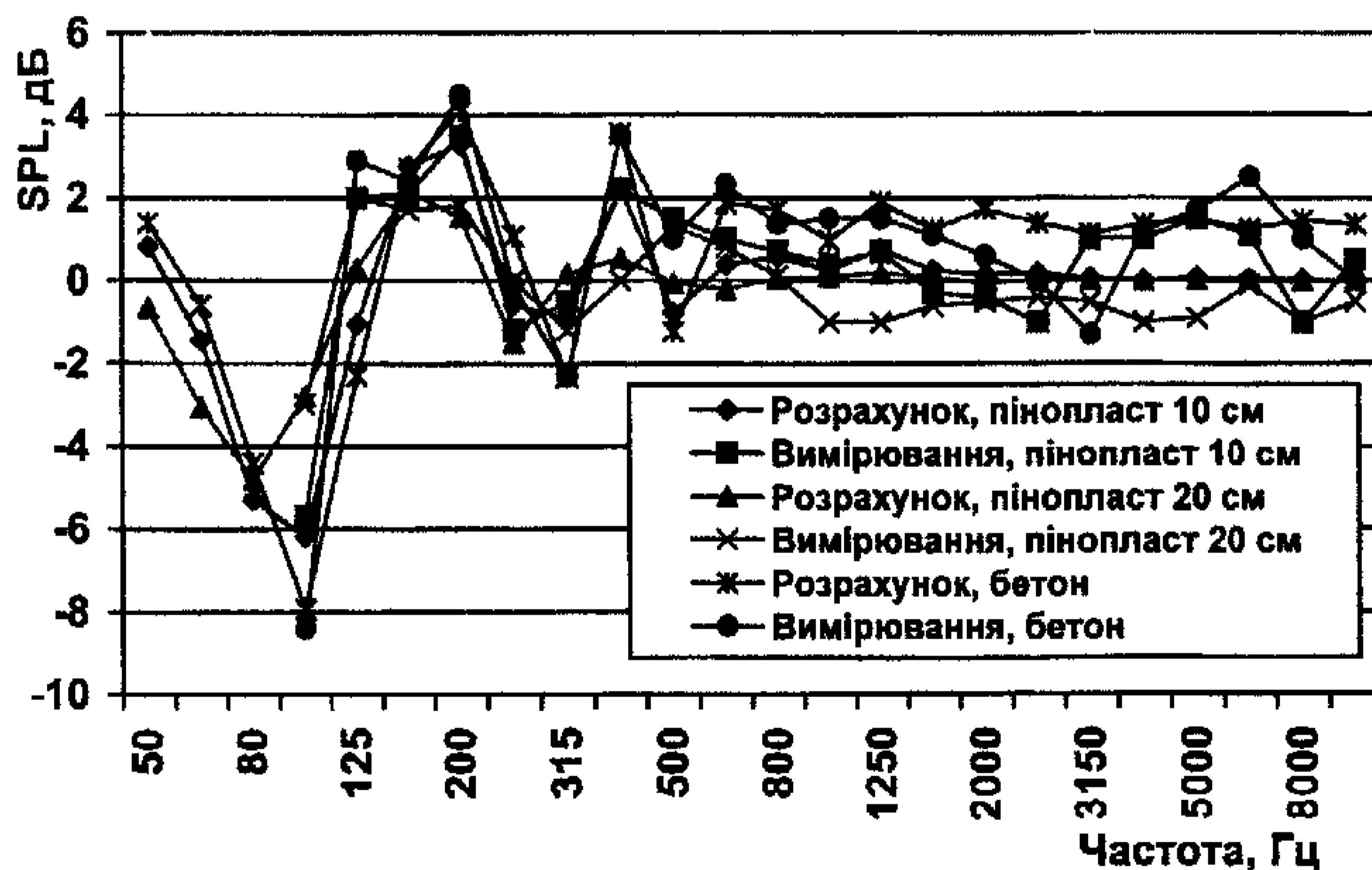


Рис. 1. Результати дослідження впливу типу відбиваючої поверхні на рівні звукового тиску шуму реактивного двигуна

Розглянемо математичну постановку задачі розповсюдження точкового джерела звуку для гармонічної залежності звукового тиску P від часу ($\exp(-i\omega t)$):

$$\Delta P + k^2 P = \Gamma(x, y, z); \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} + ik\beta_0 P = 0 \text{ на } S,$$

де k – хвильове число; $\Gamma(x, y, z)$ – визначення мультипольного джерела звуку в точці (x, y, z) .

Рівняння (1) правдиве для верхньої півплощини $z > 0$, відбиваюча поверхня визначається рівнянням $z = 0$. На розв'язання рівняння (1) накладаються умови Зоммерфельда – затухання хвиль на великих відстанях від джерела.

Розглянемо допоміжне рівняння:

$$\Delta \psi_i + k^2 \psi_i = \exp[-i(\beta_x x + \beta_y y + \beta_z z)], \quad (2)$$

де ψ_i – загальне поле для падаючої звукової хвилі:

$$\psi_i = \psi_i + \psi;$$

$$\psi_i = \frac{\exp[-i(\beta_x x + \beta_y y + \beta_z z)]}{k^2 - \beta_x^2 - \beta_y^2 - \beta_z^2};$$

$\beta_x, \beta_y, \beta_z$ – деякі комплексні змінні; ψ – вторинне звукове поле.

Рівняння (2) може бути редуцироване до розв'язання однорідного рівняння:

$$\Delta \psi + k^2 \psi = 0. \quad (3)$$

Використовуючи перетворення Фур'є для функції, що визначає повторне поле, отримуємо:

$$\Phi(\alpha, \delta, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi \exp(i\alpha x + i\delta y) dx dy,$$

тому рівняння (3) запишемо у вигляді:

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \gamma^2 \Phi = 0; \quad (4)$$

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \delta^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \alpha^2 - \delta^2},$$

де α, δ – деякі змінні.

Для хвилі, що відходить, розв'язок рівняння (4) може мати вигляд:

$$\Phi = A(\alpha, \delta) \exp(-\gamma z); \quad (5)$$

$$\operatorname{Re} \gamma > 0, z > 0,$$

де $A(\alpha, \delta)$ – невідома функція.

Використовуючи розв'язок (5), вторинне звукове поле ψ може бути отримане у вигляді оберненого перетворення Фур'є:

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha, \delta) \exp(-\gamma z - i\alpha x - i\delta y) d\alpha d\delta. \quad (6)$$

Загальне акустичне поле також може бути зображене у вигляді суми двох складових:

$$P_t = P_i + P,$$

де P_i – тиск в падаючій хвилі; P – вторинне відбите поле тиску.

Неоднорідний розв'язок для функції P_i може мати вигляд суперпозиції плоских хвиль

$$\frac{\Gamma(\beta_x, \beta_y, \beta_z) \exp[-i(\beta_x x + \beta_y y + \beta_z z)]}{k^2 - \beta_x^2 - \beta_y^2 - \beta_z^2}$$
 з амплітудою $\Gamma(\beta_x, \beta_y, \beta_z)$:

$$P_i = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta_x d\beta_y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta_x, \beta_y, \beta_z) \exp[-i(\beta_x x + \beta_y y + \beta_z z)]}{k^2 - \beta_x^2 - \beta_y^2 - \beta_z^2} d\beta_z, \quad (7)$$

де $\Gamma(\beta_x, \beta_y, \beta_z)$ – перетворення Фур'є для мультипольних джерел:

$$\Gamma(\beta_x, \beta_y, \beta_z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x, y, z) \exp[i(\beta_x x + \beta_y y + \beta_z z)] dx dy dz.$$

Розв'язок початкового рівняння для вторинного поля визначається у формі (6):

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha, \delta) \exp(-\gamma z - i\alpha x - i\delta y) d\alpha d\delta. \quad (8)$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (1) для загального акустичного поля може бути записаний у вигляді:

$$P_t = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta_x d\beta_y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta_x, \beta_y, \beta_z) \exp[-i(\beta_x x + \beta_y y + \beta_z z)]}{k^2 - \beta_x^2 - \beta_y^2 - \beta_z^2} d\beta_z + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha, \delta) \exp(-\gamma z - i\alpha x - i\delta y) d\alpha d\delta.$$

Досліджуємо акустичне поле від точкового мультипольного джерела над однорідною поверхнею, що має нормалізований адмітанс β_0 , і використовуємо граничні умови рівняння (1). Для граничної умови, що розглядається, отримуємо інтегральне рівняння

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha, \delta) (-\gamma + ik\beta_0) \exp(-i\alpha x - i\delta y) d\alpha d\delta = \\ = -\frac{i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta_x d\beta_y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta_x, \beta_y, \beta_z) (k\beta_0 - \beta_z) \exp[-i(\beta_x x + \beta_y y)]}{k^2 - \beta_x^2 - \beta_y^2 - \beta_z^2} d\beta_z. \quad (9)$$

Розв'язок рівняння (9) може бути отриманий унаслідок оберненого перетворення Фур'є:

$$A(\alpha, \delta) = -\frac{i}{(2\pi)^{\frac{5}{2}} (-\gamma + ik\beta_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\eta_1(\alpha - \beta_x) + i\eta_2(\delta - \beta_y)] \times \\ \times \frac{\Gamma(\beta_x, \beta_y, \beta_z) (k\beta_0 - \beta_z)}{k^2 - \beta_x^2 - \beta_y^2 - \beta_z^2} d\eta_1 d\eta_2 d\beta_x d\beta_y d\beta_z. \quad (10)$$

Як приклад розглянемо монопольне джерело, для якого

$$\Gamma(\beta_x, \beta_y, \beta_z) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \exp(i\beta_x x_0 + i\beta_y y_0 + i\beta_z z_0).$$

В інтегралі (10) використовуємо внесок полюса

$$\beta_z = \sqrt{k^2 - \beta_x^2 - \beta_y^2}. \quad (11)$$

Функції Дірака мають вигляд:

$$2\pi\delta^{(D)}(\alpha - \beta_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\eta_1(\alpha - \beta_x)] d\eta_1, 2\pi\delta^{(D)}(\delta - \beta_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\eta_2(\delta - \beta_y)] d\eta_2.$$

Передбачаємо можливість заміни порядку інтегрування за змінними $\eta_1, \eta_2, \beta_1, \beta_2$ в інтегральному виразі (10). Після ряду перетворень інтеграл (10) записуємо у вигляді:

$$A(\alpha, \delta) = \frac{\exp(i\alpha x_0 + i\delta y_0 + iz_0 \sqrt{k^2 - \alpha^2 - \delta^2})(k\beta_0 - \sqrt{k^2 - \alpha^2 - \delta^2})}{4\pi \sqrt{k^2 - \alpha^2 - \delta^2} (-\gamma + ik\beta_0)}. \quad (12)$$

У загальному випадку для мультипольного джерела звуку розв'язок рівняння (10) може мати вигляд:

$$A(\alpha, \delta) = \frac{\sqrt{2\pi} \Gamma(\alpha, \delta, \sqrt{k^2 - \alpha^2 - \delta^2})(k\beta_0 - \sqrt{k^2 - \alpha^2 - \delta^2})}{2\sqrt{k^2 - \alpha^2 - \delta^2} (-\gamma + k\beta_0)}.$$

У разі монопольного джерела звуку, що розглядається, зі співвідношень (7), (12) може бути отриманий розв'язок для тиску в падаючій хвилі з використанням при інтегруванні внеску полюса (10):

$$\begin{aligned} P_i &= -\frac{i}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta_x d\beta_y \frac{\exp[-i\beta_x(x-x_0) - i\beta_y(y-y_0) + i(z-z_0)\sqrt{k^2 - \beta_x^2 - \beta_y^2}]}{\sqrt{k^2 - \beta_x^2 - \beta_y^2}} = \\ &= -\frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(r\sqrt{k^2 - t^2}) \exp[i(z-z_0)] dt = \frac{\exp(ikR)}{4\pi R}, \end{aligned} \quad (13)$$

де $H_0^{(1)}(r\sqrt{k^2 - t^2})$ – функція Ханкеля нульового порядку і першого роду;

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2};$$

$$R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2};$$

$$0 \leq \arg \sqrt{k^2 - t^2} < \pi.$$

В інтегралі (13) використовувався вираз [4]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(r\sqrt{k^2 - t^2}) \exp[it(z-z_0)] dt = -2i \frac{\exp(ikR)}{R};$$

$$0 \leq \arg \sqrt{k^2 - t^2} < \pi, r > 0.$$

Із співвідношень (8), (12) може бути отриманий вираз для тиску у вторинному полі з розглядом монопольного джерела звуку і врахуванням внеску полюса (11):

$$P = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-i\alpha(x-x_0) - i\delta(y-y_0) - \gamma z + iz_0 \sqrt{k^2 - \alpha^2 - \delta^2}] (k\beta_0 - \sqrt{k^2 - \alpha^2 - \delta^2})}{\sqrt{k^2 - \alpha^2 - \delta^2} (-\gamma + ik\beta_0)} d\alpha d\delta. \quad (14)$$

Використовуємо нові змінні:

$$\alpha = -k_r \cos \xi, \quad \delta = -k_r \sin \xi, \quad x - x_0 = r \cos \vartheta, \quad y - y_0 = r \sin \vartheta.$$

Тоді інтеграл (14) може бути записаний у вигляді:

$$P = \frac{1}{8\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_0^{(1)}(k_r r) \exp[i(z+z_0) \sqrt{k^2 - k_r^2}] (k\beta_0 - \sqrt{k^2 - k_r^2})}{\sqrt{k^2 - k_r^2} (\sqrt{k^2 - k_r^2} + k\beta_0)} dk_r.$$

Припустимо, що

$$t^2 = k^2 - k_r^2,$$

тоді рівняння (14) буде мати вигляд:

$$P = \frac{\exp(ikR')}{4\pi R'} + \frac{k\beta_0}{4i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_0^{(1)}(r\sqrt{k^2 - t^2}) \exp[it(z+z_0)]}{k\beta_0 + t} dt,$$

де $R' = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}.$

Загальне поле над однорідною імпедансною поверхнею має вигляд:

$$P_t = \frac{\exp(ikR)}{4\pi R} + \frac{\exp(ikR')}{4\pi R'} + P_1, \quad (15)$$

де

$$P_1 = \frac{k\beta_0}{4i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_0^{(1)}(r\sqrt{k^2 - t^2}) \exp[it(z+z_0)]}{k\beta_0 + t} dt. \quad (16)$$

Рівняння (15), (16) зображають розв'язок поставленої задачі в початковій формі, що звичайно використовується для дослідження проблеми розповсюдження звуку над однорідною імпедансною поверхнею [1-3]. Зі співвідношення (16) випливає розв'язок для поверхневих хвиль, які швидко затухають на великих відстанях від поверхні (для $\text{Im} \beta_0 < 0$) [3]:

$$P_s = \frac{k\beta_0}{2} H_0^{(1)}(kr\sqrt{1-\beta_0^2}) \exp[-ik\beta_0(z+z_0)].$$

Після перетворень рівняння (16) має вигляд:

$$P_1 = \frac{ik\beta_0}{2\pi} \int_R^{\infty} \frac{\exp[ik(R_q - q\beta_0)]}{\sqrt{R_q^2 - r^2}} dR_q,$$

де

$$R_q = \sqrt{r^2 + (z+z_0 - q)^2}.$$

Використовуємо очевидне співвідношення:

$$\frac{1}{k\beta_0 + t} = i \int_0^{\infty} \exp[-iq(k\beta_0 + t)] dq, \quad \text{Im}[q(k\beta_0 + t)] < 0.$$

Для нових змінних

$$R_q = r \operatorname{ch} \vartheta_1,$$

де $\operatorname{ch} \vartheta_1$ – гіперболічний косинус від нового параметра ϑ_1 , рівняння (16) може бути записане у вигляді:

$$P_1 = \frac{ik\beta_0 \exp[-ik\beta_0(z+z_0)]}{2\pi} \int_{\operatorname{arch}(\frac{R'}{r})}^{\infty} \exp[ikr(\operatorname{ch}\vartheta_1 + \beta_0 \operatorname{sh}\vartheta_1)] d\vartheta_1. \quad (17)$$

Остаточно рівняння (17) може мати вигляд ($\operatorname{Im} \beta_0 < 0$):

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{ik\beta_0 \exp[-ik\beta_0(z+z_0)]}{2\pi} \int_s^{\infty} \exp[ikr\sqrt{1-\beta_0^2}(\operatorname{ch}\vartheta')] d\vartheta' = \\ &= \frac{ik\beta_0 \exp[-ik\beta_0(z+z_0)]}{2\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \exp[ikr\sqrt{1-\beta_0^2}(\operatorname{ch}\vartheta')] d\vartheta' - \int_0^s \exp[ikr\sqrt{1-\beta_0^2}(\operatorname{ch}\vartheta')] d\vartheta' \right\} = \\ &= -\frac{k\beta_0 \exp[-ik\beta_0(z+z_0)]}{4} [H_0^{(1)}(kr\sqrt{1-\beta_0^2}) - H_0^{(1)}(s, kr\sqrt{1-\beta_0^2})], \end{aligned}$$

де $s = \vartheta_1 - i\vartheta_0$, $\operatorname{ch}\vartheta_1 = \frac{R'}{r}$, $\cos\vartheta_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}}$, $\sin\vartheta_0 = \frac{i\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}}$, $H_0^{(1)}(s, kr\sqrt{1-\beta_0^2})$ – неповна циліндрична функція Ханкеля нульового роду, першого порядку [5].

Використовуючи асимптотичне розкладання для функцій Ханкеля, при умовах

$$\left| kr\sqrt{1-\beta_0^2} \sin(\vartheta_1 - i\vartheta_0) \right| > 1, \quad \left| kr\sqrt{1-\beta_0^2} \right| < \pi, \quad 0 \leq \vartheta_1 < \pi,$$

розв'язок для звукового тиску монопольного акустичного джерела над однорідною імпедансною поверхнею отримано у вигляді:

$$P_1 \approx -\frac{\beta_0 \exp(ikR')}{2\pi R'(\beta_0 + \cos\theta_1)} \left[1 - \frac{i(1 + \beta_0 \cos\theta_1)}{R'k(\beta_0 + \cos\theta_1)^2} \right],$$

де θ_1 – кут падіння звукової хвилі.

Чисельне дослідження отриманих розв'язків виконане з використанням результатів вимірювань, наведених у роботі [6]. Звук розповсюджується вздовж імпедансної поверхні, причому відбивання падаючої хвилі виконується поблизу лінії розподілу поверхні на півплощини з різними значеннями імпедансів. У даному разі характеристики поверхні визначалися значеннями опору продування поверхні:

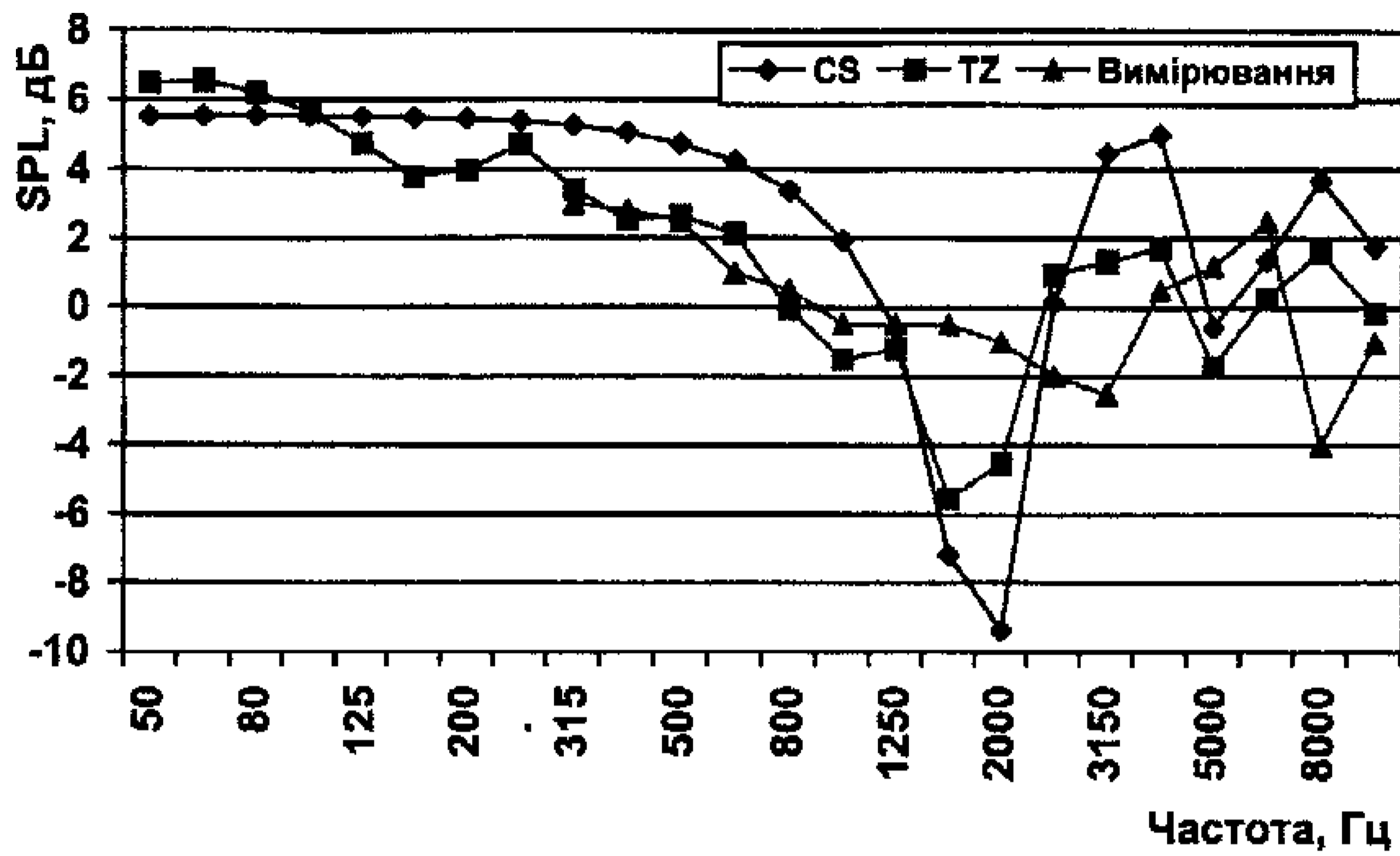
- для жорсткої півплощини $\sigma = 50 \text{ кНс/м}^4$;
- для м'якої півплощини $\sigma = 10000 \text{ кНс/м}^4$.

Геометричні характеристики розповсюдження звуку між джерелом та приймачем у першому випадку були такі:

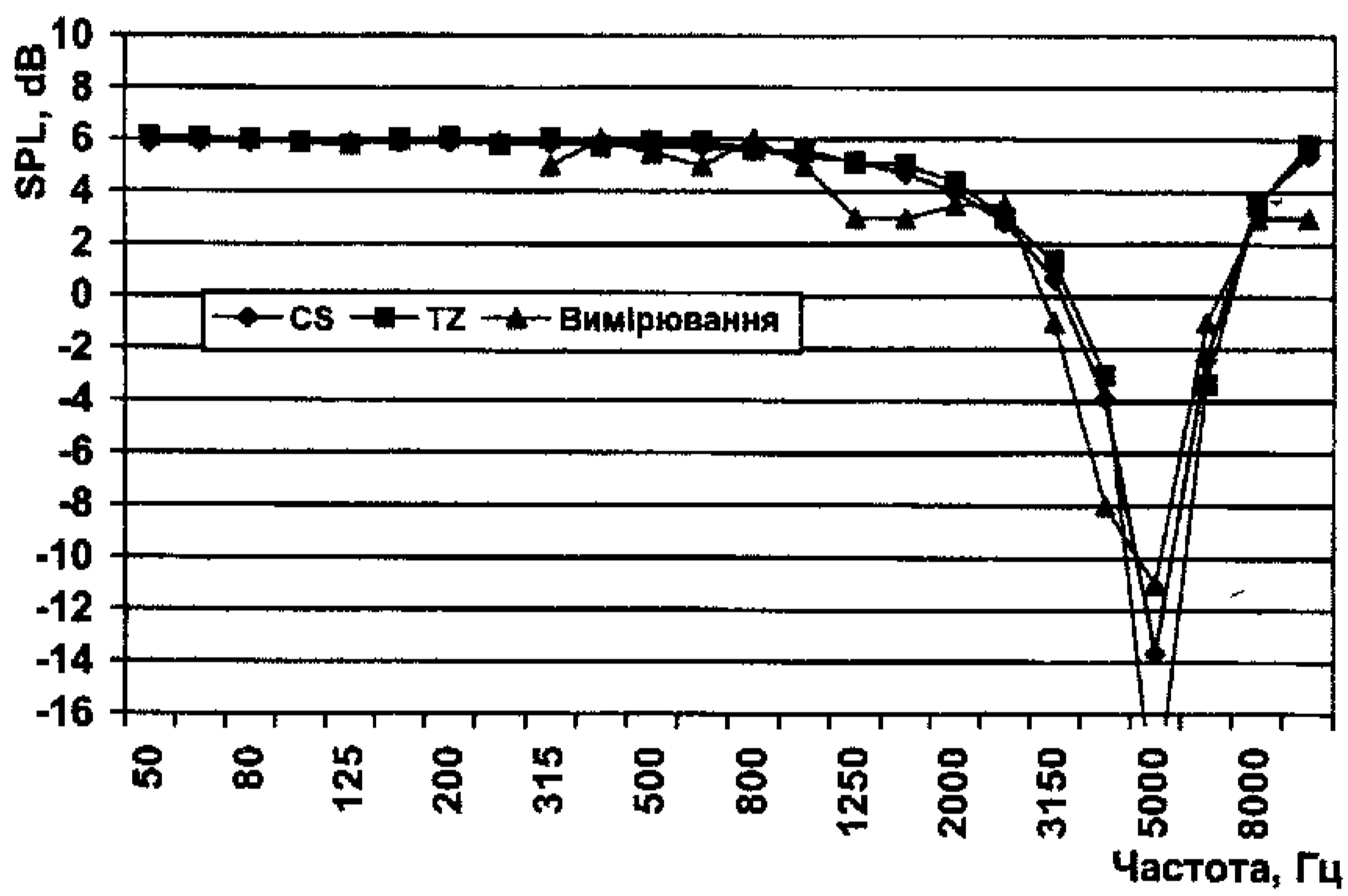
$$h_s = 0,4 \text{ м}, \quad h_r = 0,2 \text{ м}, \quad x_s = -1,7 \text{ м}, \quad x_r = 0,7 \text{ м},$$

де h – висоти; x – відповідні координати розміщення джерела та приймача відносно лінії розподілу.

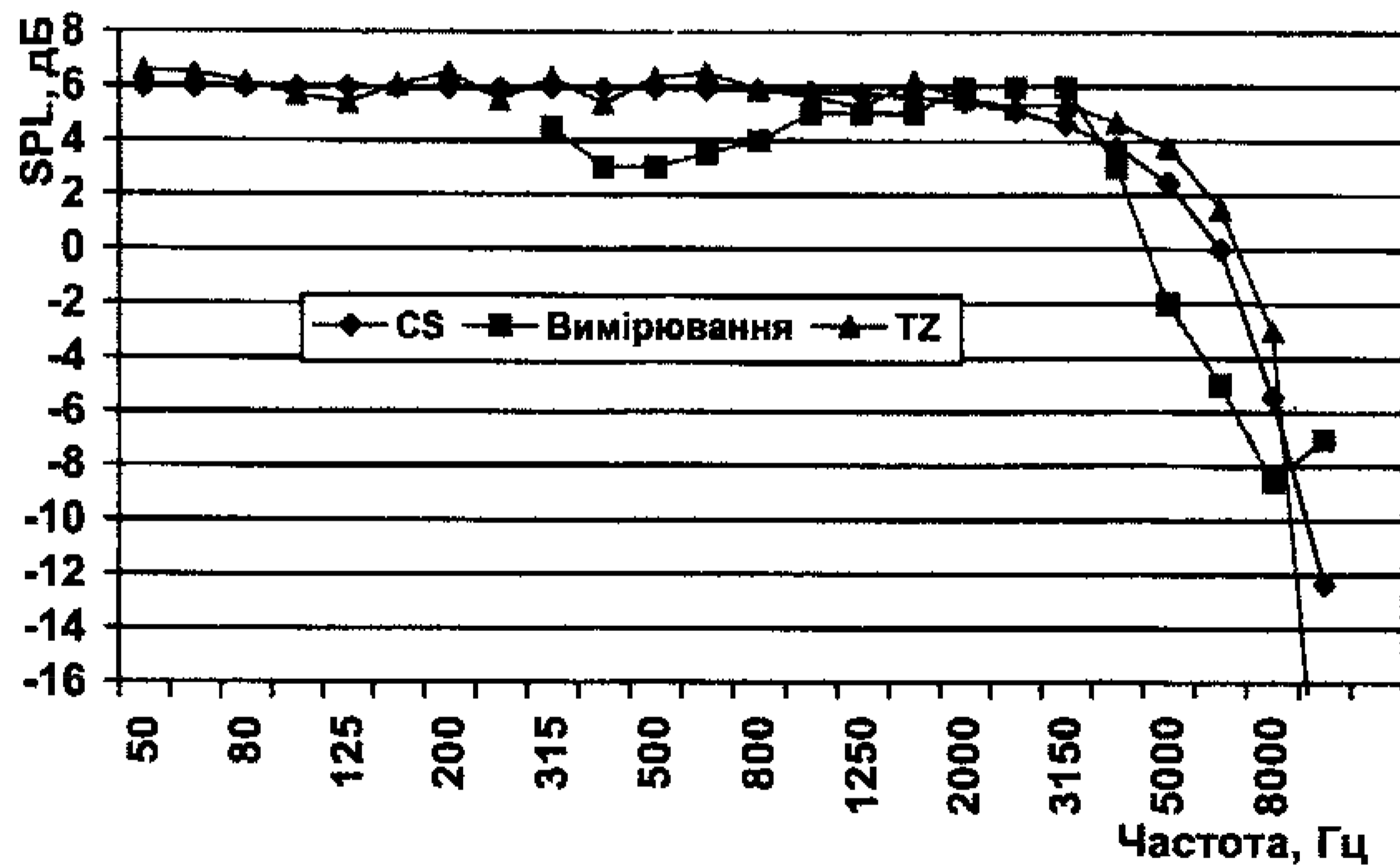
Точка відбивання падаючої хвилі від лінії розподілу знаходиться на відстані $x_{ref} = -0,1 \text{ м}$ на жорсткій півплощині [6, рис. 5 а]. Відстань є незначною, тому вплив ефекту дифракції звуку, що утворюється на лінії розподілу, є відчутним, що добре видно у порівнянні з ефектом, який визначається моделлю Чена і Сороки (рис. 2) [2].



a



б



в

Рис. 2. Порівняння результатів розрахунку (CS – модель [2];

TZ – поточна модель) з результатами вимірювань:

а – $h_s = 0,4$ м, $h_r = 0,2$ м, $h_s = -1,7$ м, $h_r = 0,7$ м; $x_{ref} = -0,1$;

б – $h_s = 0,1$ м, $h_r = 0,4$ м, $x_s = -2,2$ м, $x_r = 0,2$ м; $x_{ref} = -1,72$,

в – $h_s = 0,1$ м, $h_r = 0,2$ м, $x_s = -2,1$ м, $x_r = 0,3$ м, $x_{ref} = -1,3$ м

У другому випадку (рис. 2, б) геометрія розміщення джерела відносно приймача [6, рис. 5b] обумовила значну відстань точки відбивання від лінії розподілу півплощин ($x_{ref} = -1,72$ м), тому ефект дифракції звуку на лінії розподілу відсутній – розв'язок за поточною моделлю майже збігається з розв'язком за відомою моделлю [2].

Аналогічний результат отриманий і для третього вимірювання [6, рис. 5c] – ефект імпедансного відбивання подібний до відбивання від однорідної імпедансної поверхні. Результати за обома моделями є майже однаковими як за частотою, так і амплітудою отриманих значень (рис. 2, в).

Отже, отримана модель є більш універсальною. Вона дозволяє розглядати випадки зміни типу відбиваючої поверхні і враховувати вплив змінного імпедансу на ефект розповсюдження звуку. Така ситуація є звичайною для умов розповсюдження авіаційного шуму в межах аеродрому.

Список літератури

1. Фельсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т.2. - М.: Мир, 1978. – 555 с.
2. Chien C. F., Soroka W. W. Sound propagation along an impedance plane // J. Sound Vib. – 1975. – Vol. 43. – P. 9–20.
3. Kai Ming Li, Taherzaden S., Attenborough K. Sound propagation from dipole source near an impedance plane // J. Acoust. Soc. Am. – 1997. – Vol. 101 (6). – P. 3343–3352.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. – 1100 с.
5. Агрест М.М., Максимов М.З. Теория неполных цилиндрических функций и их приложения. – М.: Атомиздат, 1965. – 352 с.
6. Daigle G.A., Nikolas J., Berry J.L. Propagation of noise above ground having an impedance discontinuity // J. Acoust. Soc. Am. – 1985. – Vol. 77, (1). – P.127–138.

Стаття надійшла до редакції 05.03.02.