Отже, поля тензорів ν^{α} і ν_{α}^{o} визначають поля інваріантних нормалей відповідно до першого та другого роду тангенціально-виродженої поверхні V_{n-1}^{r}.

Список літератури

1. *Розенфельд Б.А.* Неевклидовы геометрии. – М.: Гостехиздат. – 1955.
2. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана. – М.; Л.: Гостехиздат. – 1948.
3. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий: Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований// Тр. Моск. мат. о-ва. – 1953. – Т.2. – С. 275–382.
4. *Абель Э.П.* Поверхности неполного ранга в многомерных неевклидовых пространствах. – Тарту, 1979.

Стаття надійшла до редакції 08.02.02.

УДК 517:681.3(06) 045

В.О. Касьянов, д-р техн. наук, проф.

ГАМІЛЬТОНОВА ФОРМА МЕХАНІКИ ДИСИПАТИВНИХ СИСТЕМ І ДЕЯКІ АНАЛОГИ ЗАКОНІВ ЗБЕРЕЖЕННЯ НЕТЕР

Розглянуто гамільтонову механіку дисипативних систем з дисипацією, пропорційною першому і другому ступеням узагальненої швидкості

У роботі [1] було запропоновано перетворення «фізичного» фазового простору (узагальнених імпульсів і координат) для дисипативної системи з частками змінної маси в новий фазовий простір, у якому рівняння Гамільтона не містять узагальнених сил і методи теорії консервативних систем, вивчалася система з дисипацією, пропорційною швидкості частки в першому степеню. За аналогією з консервативними системами були отримані основні результати для вказаних дисипативних систем, зокрема, рівняння Гамільтона-Якобі, інтегральні інваріанти Картана і Пуанкаре–Картана, теорема Лідвілля, показано, що статистичні середні, обчислені в обох просторах, збігаються, розглянута система N часток змінної маси, що рухаються з релеєвською дисипацією в континуальному середовищі. Якщо функцію Лагранжа зобразити у вигляді

$$L^{*}=\sum_{i=1}^{N}\left[\exp\beta\cdot\dot{\vec{q}}_i\cdot\dot{\vec{q}}_i-2\vec{\alpha}_i\cdot\dot{\vec{q}}_i-2m^{-1}\cdot\exp\beta\cdot\left(\Pi_i+\sum_{j=1}^{N}\Phi_{ij}\right)\right], \tag{1}$$

то рівняння Ейлера-Лагранжа з точністю до постійного множника збігаються з рівняннями руху системи. У співвідношенні (1):

$$\beta(t)=\int_{0}^{\infty}\theta(t-\xi)m^{-1}\left[k(\xi)+\dot{m}(\xi)\right]d\xi;$$

$$\vec{\alpha}_i(t)=\int_{0}^{\infty}\theta(t-\xi)\exp\beta(\xi)m^{-1}(\xi)\left[k(\xi)\vec{V}(q_i(\eta),\xi)+\dot{m}(\xi)\vec{U}_i(q_i(\eta),\xi)\right]d\xi,$$

де m – маса частки; Π_i – потенціал зовнішніх сил; $\Phi_{ij}\left(\left|\vec{q}_i-\vec{q}_j\right|\right)$ – потенціал парної взаємодії; $\theta(t-\xi)$ – східчаста функція Хевісайда; k – коефіцієнт опору середовища; V – швидкість руху середовища; $\vec{U}_i(\vec{q}_i(\eta),\xi)$ – швидкість відльоту (приєднання) маси.

Якщо ввести новий фазовий простір зі змінними $\vec{p}_i^{\,*}$, $\vec{q}_i^{\,*}$, що пов'язані з «фізичними» змінними $\vec{p}_i$, $\vec{q}_i$ співвідношеннями:

$$p_i^{*}=2m^{-1}\exp\beta(t)\vec{p}_i+2\vec{\alpha}_i(t);\quad \vec{q}_i^{\,*}=\vec{q}_i,$$

то функція Гамільтона має вигляд:

$$H^* = \exp(-\beta)\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{4}\left(\vec{p}_i^* + 2\vec{\alpha}_i\right)^2 + m^{-1}\exp 2\beta\left(\Pi_i + \sum_{j=1}^{N}\Phi_{ij}\right)\right],$$

а рівняння руху формально виглядатимуть як рівняння Гамільтона для консервативної системи:

$$\dot{\vec{p}}^* = -\frac{\partial H^*}{\partial \vec{q}_i^*};$$

$$\dot{\vec{q}}^* = -\frac{\partial H^*}{\partial \vec{p}_i^*}.$$

При цьому функція Гамільтона H^* пов'язана з «фізичною» функцією H співвідношенням:

$$H^* = 2m^{-1}\exp\beta(t)H,$$

де $$H = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2}m^{-1}p_i.p_i + \Pi_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\Phi_{ij}\right).$$

Надалі результати роботи [1] було поширено на більш широкий клас дисипативних систем у монографії [2]. Зокрема, виявляється можливим подібний перехід до квазіконсервативної механіки для систем з квадратичною дисипацією, тобто дисипацією, пропорційною квадрату швидкості.

Розглянуті задачі відносяться до класу обернених задач математичної фізики, наприклад, така теорема [3].

Нехай A – позитивний оператор $(Aq, q) > 0$ для будь-якого $q \in G$, де G – гільбертовий простір. Якщо рівняння $Aq = u$ має рішення, то це рішення надає функціоналу

$$\xi = (Aq, q) - (q, u) - (u, q) \tag{2}$$

найменшого значення і, навпаки, елемент гільбертового простору $q \in G$, що реалізує мінімум функціонала (2), задовольняє рівняння $Aq = u$. У формулі (2) (Aq, q) означає скалярний добуток у теоретико-функціональному розумінні.

Так, для самосполученого (у розумінні Лагранжа) диференціального рівняння

$$Ag = -\frac{d}{dt}\left(a(t)\frac{dq}{dt} + r(t)q = f(t)\right)$$

на відрізку $t \in [t_0, t_1]$ із самосполученими крайовими умовами, де $\in$ – знак приналежності :

$$\alpha\,\dot{q}(t_0) - \beta\,q(t_0) = 0;$$

$$\lambda\,\dot{q}(t_1) - \delta.q(t_1) = 0.$$

При додаткових умовах, коли $a(t)$ і $r(t)$ неперервні і $a(t) > 0$, $r(t) \geq 0$, відповідний функціонал має вигляд:

$$\xi(q) = \frac{\beta}{\alpha}a(t_0).q^2(t_0) + \frac{\delta}{\lambda}a(t_1).q^2(t_1) + \int_{t_0}^{t_1}\left[a(t)\dot{q}^2(t) + r(t)q^2(t) - 2f(t).q(t)\right]dt.$$

Наводимо додаткові результати розв'язання оберненої задачі, коли оператор не є позитивним, самосполучним, що відбувається у випадку дисипативних систем. Зокрема, отримаємо закони збереження для таких систем, що є аналогами теорем Нетер для консервативних систем.

Один з таких результатів наведений у роботі [4], а саме, функція Лагранжа для системи з одним степенем вільності і дисипацією, пропорційною швидкості у першому степені, задана у вигляді:

$$L^* = e^{pt}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}cq^2\right)$$

або, приймаючи позначення $2n = \beta$, $k^2 = \frac{c}{m}$, у вигляді:

$$L^* = \frac{1}{2}\left(\dot{q}^2 - k^2q^2\right)e^{2nt}.$$

Цьому відповідає рівняння Ейлера – Лагранжа:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0.$$

Теорема Нетер дає перший інтеграл щодо групи перетворень $t^* = t + \varepsilon$, $x^* = x - \varepsilon nq$:

$$\left(\dot{q}^2 + k^2q^2 + nq\dot{q}\right)e^{2nt} = C. \tag{3}$$

Для дисипативної системи інтеграл (3) відіграє ту ж роль, що й інтеграл енергії для консервативної системи.

Розглянемо деяке узагальнення. Нехай функція Лагранжа має вигляд:

$$L^* = \left(f\dot{q}^2 + gq.q + r.q\right)e^{\xi q}, \tag{4}$$

де f, g, r – функції часу у загальному випадку; ξ – постійний коефіцієнт.

Відповідне рівняння Лагранжа буде таким:

$$\ddot{q} + \frac{\xi}{2}\dot{q}^2 + \left(\frac{\dot{f}}{f}\right)\dot{q} + \frac{g - r\xi}{2f}q = \frac{r(t)}{2f(t)} = W(t). \tag{5}$$

У рівнянні (5) є члени, що забезпечують дисипацію, пропорційну як першому, так і другому степеню узагальненої швидкості. Вільний член

$$w(t) = r(t)(2f(t))^{-1}$$

свідчить про те, що в даному формалізмі можна розглядати збурений рух. Узагальнений імпульс, що відповідає функції Лагранжа [4], такий:

$$p^* = \frac{\partial L^*}{\partial q} = \left(2f\dot{q} + gq\right)e^{\xi q}. \tag{6}$$

Якщо «фізичний» імпульс для одновимірного осцилятора $p = mq$, то новий імпульс p^* пов'язаний з p формулою

$$p^* = (2 - p + gq)e^{\xi q},$$

або ж, якщо $2f = m$, то

$$p^* = (p + gq)e^{\xi q}.$$

Припустимо, що рівняння руху системи з одним степенем вільності задано у вигляді:

$$\ddot{q} = a\dot{q}^2 + b\dot{q} + cq = w(t),$$

тоді коефіцієнти функції Лагранжа (4) виражаються в такий спосіб:

$$f = \exp\left(\int b(t)\,dt\right);$$

$$g = \int\ [r(t)\xi + 2C(t)\exp\left(\int b(t)\,dt\right)] = 2\int\ [\xi.w(t)]\exp\left(\int b(t)\,dt\right);$$

$$r = 2w(t)\exp\left(\int b(t)\,dt\right).$$

Знайдемо функцію Гамільтона, що відповідає функції Лагранжа (4):

$$H^* = q.p^* - L^* = \frac{1}{4f}p^{*2}.e^{-\xi q} - \frac{g}{2f}p^*.q - rq.e^{\xi q} + \frac{g^2}{4f}q^2e^{\xi q}.$$

Гамільтонові рівняння руху даної дисипативної системи мають вигляд:

$$\dot p^* = -\frac{\partial H^*}{\partial q}; \tag{7}$$

$$\dot q = \frac{\partial H^*}{\partial p^*}. \tag{8}$$

Рівняння (7) у докладному записі має вигляд:

$$\dot P^* = \frac{1}{4f}p^{*2}\xi\, e^{-\xi q} + \frac{g}{2f}p^* + r.e^{\xi q} + rq.\xi.e^{\xi q} - \frac{g^2}{4f}\left(\xi q^2 + 2q\right)e^{\xi q}.$$

Рівняння (8) є оберненням співвідношення (6):

$$q = \frac{1}{2f}\left(p^* e^{-\xi q} - g.q\right).$$

Отже, перетворення

$$p^* = (p + gq)e^{\xi q},\quad q^* = q$$

приводить дисипативну систему до формально гамільтонової форми. Одержимо деякі аналоги законів збереження для дисипативної системи, виходячи з підходу, який використовувався в роботі [5]. Приймемо, що варіація функції Лагранжа:

$$\delta L^* = L^*\left(T, Q, \frac{dQ}{dT}\right) - L\left(t, q, \frac{dq}{dt}\right),$$

де Q і T – нові змінні, пов'язані зі старими (q, t) співвідношеннями:

$$Q = q + \delta q(t,q);$$

$$T = t + \delta t(t,q); \tag{9}$$

$$\delta q = \Delta q + q\delta t.$$

Для інфінітезимальних варіацій змінних у лінійному наближенні варіація функції Лагранжа ξL^* має вигляд:

$$\delta L^* = \frac{\partial L^*}{\partial t}.\delta\, t + \frac{\partial L^*}{\partial q}.\delta q + \frac{\partial L^*}{\partial \dot q}\left(\frac{d\delta q}{dt} - \dot q\frac{d\delta\, t}{dt}\right).$$

Серед перетворень (9) виділимо перетворення, що мають групові властивості і щодо яких функція Лагранжа інваріантна. Це означає, що для таких перетворень $\delta L^* = 0$. Далі розглядається ще більш вузька група ізохронних перетворень (ізохронна група), що задовольняють умову

δt = const.

Для ізохронної групи правдиві співвідношення:

$$\frac{d}{dt}\left(L^*.\delta\, t + \frac{\partial L^*}{\partial \dot q}\Delta q\right) = 0;$$

$$\left(\frac{dH^*}{dt}.\delta\, t - p^*.\delta q\right) = 0\ , \tag{10}$$

які мають характер «фундаментальних» законів збереження. Якщо $G(\varepsilon)$ є перетворенням групи, що залежить від параметра ε, і визначений добуток перетворень:

$$G_1(\varepsilon_1)\, G_2(\varepsilon_2) = G_3(\varepsilon_3)\,,$$

то повинна існувати така функція $\varphi\,(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_3$, при якій

$$T_3 = G_T\left[G_T\left(t, q, \varepsilon_1\right), \varepsilon_2\right] \equiv G_T\left[t, q, \varepsilon_3\right];$$

$$Q_3 = G_Q\left[G_Q\left(t, q, \varepsilon_1\right), \varepsilon_2\right] \equiv G_Q\left[t, q, \varepsilon_3\right]$$

є тотожностями. Для перетворення групи виконується асоціативний закон, існує тотожне перетворення і обернене перетворення. Інфінітезимальне перетворення можна подати у вигляді:

$$T = t + \left.\frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\right|_0 \cdot \varepsilon\,;$$

$$Q = q + \left.\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}\right|_0 \cdot \varepsilon + \left.\frac{\partial Q}{\partial \mu}\right|_0 \mu\,,$$

де $T(t, \varepsilon) = t + \delta t(\varepsilon)$;

$$Q = Q(t, q, \varepsilon, \psi);$$

$$\psi = \psi(t, q).$$

Тоді маємо «фундаментальний» закон збереження :

$$\frac{d}{dt}\left[H^* \left.\frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\right| - p^* \left.\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}\right|\right] = 0$$

і інтеграл еволюції:

$$p^* \left.\frac{\partial Q}{\partial \mu}\right| = 0\,.$$

Розглянемо окремі випадки перетворень.

Перший випадок

$$T = t + \varepsilon;\ \ Q = q$$

відповідає рівномірному зрушенню часу. У першому випадку

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}\right|_0 = 0;\quad \left.\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \varepsilon}\right|_0 = 1\,,$$

з чого випливає, що

$$\frac{dH^*}{dt} = 0\,.$$

Отже, $H^* = \text{const}$

або, що є тим самим,

$$\left(\frac{1}{4f} p^{*2}.e^{-2\xi q} - \frac{g}{2f} q.p^*.e^{-\xi q} - r.q + \frac{g^2}{4f} q^2\right) e^{\xi q} = \text{const}\,. \qquad (11)$$

Співвідношення (11) являє собою аналог закону збереження енергії у випадку системи, якій властива дисипація.

У другому випадку:

$$T = t;\ \ Q = q + \varepsilon$$

відбувається однорідне зрушення узагальненої координати і тотожне перетворення часу. Як і в першому випадку, групові властивості виконуються. Визначимо безпосередньо варіацію функції Лагранжа L^*:

$$\delta L^* = \left[\dot{f}.q^2 + \dot{g}(q+\varepsilon).q + r(q+\varepsilon)\right]e^{\xi q}(1+\dot{\varepsilon}\xi) - \left(\dot{f}.q^2 + gq.q + rq\right)e^{\xi q} =$$

$$= \varepsilon\,[\,\dot{g}q + \dot{r} + \xi\left(fq^2 + gq.q + rq\right)]\,e^{\xi q}. \qquad (12)$$

Праву частину співвідношення (12) можна подати у вигляді $\varepsilon.\dfrac{\partial L^*}{\partial q}$.

Тоді з умови інваріантності δL^* випливає, що

$$\frac{\partial L^*}{\delta q} = 0,$$

а з рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}} = 0,$$

але $\dfrac{\partial L^*}{\partial \dot{q}} = p^*$.

Тому одержуємо аналог закону збереження:

$p^* = \text{const} = C.$

Це означає, що зберігається новий імпульс p^*. З огляду на вираз (6) для p^* знаходимо, що повинна виконуватися умова:

$$q = \frac{1}{2f}\left(C.e^{-\xi q} - gq\right).$$

Припустимо, що у розгляді беруть участь два імпульси: p_1^* і p_2^*. Їх можна трактувати як проекції векторного імпульсу. Розглянемо перетворення інфінітезимального обернення.

У третьому випадку

$T = t$; $Q_1 = q_1 + \varepsilon q_2$; $Q_2 = q_2 + \varepsilon q_1$;

$\delta t = 0$; $\delta q_1 = \varepsilon q_2$; $\delta q_2 = -\varepsilon q_1$.

З фундаментального закону збереження (10) у третьому випадку одержуємо:

$$\frac{d}{dt}\left(p_1^*.q_2 - p_2^*.q_1\right) = 0. \qquad (13)$$

Назвемо вираз в дужках кінетичним моментом M_{12},, тоді рівняння (13) перепишемо у вигляді:

$$\frac{dM_{12}}{dt} = 0,$$

звідки $M_{12} = \text{const} = C$.

У докладному записі отримаємо аналог закону збереження кінетичного моменту:

$$\left(2fq_1 + g\xi\right)q_2.e_1^{\xi q} - \left(2fq_2 + gq_2\right)q_1 e_2^{\xi q} = C.$$

Передбачається, що відсутня взаємодія між компонентами, які відповідають степеням вільності. Наведені прості приклади демонструють можливість одержання аналогів законів збереження для випадку систем з дисипацією.

У випадку, розглянутому в роботі [1], аналогічні закони збереження будуть мати вигляд:

$$H^* = 2m^{-1}\beta(t)H = \mathrm{const};$$

$$\sum_{i=1}^{N} p_i^* = \mathrm{const};$$

$$\vec{M}^* = \mathrm{const},$$

де $\vec{M}^*$ – сумарний кінетичний момент, визначений у новому фазовому просторі.

У випадку системи з квадратичною дисипацією і декількома степенями вільності задача зведення шляхом перетворення фазового простору до квазіконсервативної системи стає значно складнішою, якщо між степенями вільності існує взаємодія.

Покажемо одну з можливостей подолання цих труднощів на прикладі системи з двома степенями вільності.

Функцію Лагранжа такої системи подамо у вигляді:

$$L^* = \left[\left(f_1 \cdot \dot{q}_1^2 + g_1 q_1 \dot{q}_1\right)e_2^{-\xi q_2} + \rho_1(q_1, q_2)\right]e^{\xi(q_1+q_2)} + \left[\left(f_2 \cdot \dot{q}_2^2 + g_2 q_2 \cdot \dot{q}_2\right)e_2^{-\xi q_1} + \rho_2(q_1, q_2)\right]e^{\xi(q_1+q_2)}.$$

У цьому випадку рівняння Лагранжа матимуть вигляд:

$$\dot{q}_1 + \frac{1}{2}\xi \dot{q}_1^2 + \frac{\dot{f}_1}{f_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\dot{g}_1}{2f_1} \cdot q_1 = \frac{1}{2f_1}\left(\frac{\partial \rho}{\partial q_1} + \xi . \rho\right)e^{\xi q_2}; \tag{14}$$

$$\ddot{q}_2 + \frac{1}{2}\xi \dot{q}_2^2 + \frac{\dot{f}_2}{f_2} \cdot \dot{q}_2 + \frac{\dot{g}_1}{2f_1} \cdot q_1 = \frac{1}{2f_1}\left(\frac{\partial \rho}{\partial q_1} + \xi . \rho\right)e^{\xi q_2}. \tag{15}$$

Нехай взаємодія між степенями вільності описується функціями $F_1(q_1, q_2)$, $F_2(q_1. q_2)$. З рівнянь (14), (15) видно, що перехід до квазіконсервативної форми можливий, якщо функції $F_1(q_1, q_2)$ і $F_2(q_1, q_2)$, що відбивають фізичний характер взаємодії, можна подати у вигляді:

$$F_1(q_1, q_2) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_1} + \xi\rho\right)e^{\xi q_2};$$

$$F_2(q_1, q_2) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_2} + \xi\rho\right)e^{\xi q_1};$$

$$\rho = \rho_1 + \rho_2.$$

Введемо функцію

$$\beta = \rho(q_1, q_2)e^{\xi(q_1+q_2)}.$$

Тоді можна записати:

$$\frac{\partial \beta}{\partial q_1} = F_1(q_1, q_2).e^{\xi q_1} = F_1^*(q_1, q_2);$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial q_2} = F_2(q_1, q_2).e^{\xi q_2} = F_2^*(q_1, q_2),$$

де F_1^* і F_2^* – нові функції, для яких виконується умова:

$$\frac{\partial F_1^*}{\partial q_2} = \frac{\partial F_2^*}{\partial q_1}.$$

Це означає, що при інтегруванні співвідношення:

$$d\beta = \frac{\partial\beta}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\beta}{\partial q_2}dq_2$$

результат не залежить від шляху інтегрування в площині (q_1, q_2) і, отже, можна записати:

$$\beta(q_1, q_2) = \int_{q_{01}}^{q_1} F_1^*(q_1, q_2)dq_1 + \int_{q_{02}}^{q_2} F_2^*(q_1, q_2)dq_2,$$

де (q_{01}, q_{02}) – деяка початкова точка.

Пропонований варіант функції Лагранжа

$$L^* = \left(f_1\dot{q}_1^2 + g_1 q_1.\dot{q}_2\right)e^{\xi q_1} + \left(f_2\dot{q}_2^2 + g_2 q_2.\dot{q}_2\right)e^{\xi q_2} + \beta\left(q_1, q_2\right)$$

не допускає цілком довільного вибору функцій F_1 і F_2, що відбивають фізичний характер взаємодії степенів вільності.

Обчислені за допомогою функції Лагранжа імпульси мають вигляд:

$$p_i^* = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i} = \left(2f_i\dot{q}_i + g_i q_i\right)e^{\xi q_i}, \quad i \in \overline{1,2},$$

а відповідний гамільтоніан:

$$H^* = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{f_1}p_i^{*2}.e^{-\xi q_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\rho_i^* q_i - \rho(q_1, q_2)e^{\xi(q_1+q_2)},$$

де $\rho = \rho_1 + \rho_2$.

Формалізація дисипативних систем, коли між степенями вільності існує взаємодія, є об'єктом подальшого дослідження.

Список літератури

1. *Касьянов В. О., Ткаченко Н. Е.* Опис дисипативних систем за допомогою формалізму Гамільтона. – К.: Прикладна механіка. – 1970. – Т. 2.
2. *Кильчевський Н. А., Кильчинська Г. А., Ткаченко Н.Е.* Аналітична механіка континуальних систем. – К.: Наук. думка, 1979. – 186 с.
3. *Михлин С. Г.* Прямые методы в математической физике. – М.: Гос. изд.-во техн. лит., 1950. –427 с.
4. *Добронравов В. В.* Основы аналитической механики. – М.: Высш. шк., 1976. – 262 с.
5. *Ткалич В С.* Теоретичні основи оптимальних взаємодій. Ч. 1. Аналітична динамика. – К.: Наук. думка, 1971. – 114 с.

Стаття надійшла до редакції 08.02.02.