4) знаходять номер i_1 агрегату A_{i_1}, який змінив свої значення в момент часу t_1:

$i_1 = \arg \min_{1 \le i \le n} \alpha_{v_i} \eta_i$;

5) визначають нове значення

$Z_{i_1}(t_1+0) = (v_{i_1}(t_1+0), \xi_{i_1}(t_1+0))$

агрегату згідно з законом розподілу ймовірностей.

6) здійснюють реалізацію ланцюжків миттєвої передачі сигналів, використовуючи схему стикування: перший ланцюжок починається від агрегату A_1 з урахуванням зміни станів значень дискретної компоненти $v_{i_1}(t_1-0), v_{i_1}(t_1+0)$;

7) реалізують перерахунок стану процесу функціонування об'єкту, в результаті чого визначається нове значення

$Z(t_1+0) = (Z_1(t_1+0),...,Z_n(t_1+0))$

(на відміну від попереднього алгоритму спочатку фіксуються значення $v_i = v_i(t_1+0)$, $\tau_i = \xi_i(t_1-0)$, а потім моделюється значення випадкових величин $\xi_i(t_1+0)$, $1 \le i \le n$);

8) визначають значення $Z(t_0+0)$ і здійснюють перехід на крок 2.

Цей спосіб є більш трудомістким в обчислювальному відношенні в порівнянні з першим способом, оскільки в кожний вузловий момент доводиться моделювати всі неперервні компоненти.

Список літератури

1. *Коваленко И.Н.* Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности систем. – М.: Сов. радио, 1980. – 208 с.

2. *Кривуца В Г* Нахождение вероятности эффективного функционирования систем // Электронное моделирование. – 1988. – № 5. – С. 93–98.

3. *Олешко Т.І.* Знаходження аналітико-статистичних оцінок імовірнісних характеристик систем // Моделювання та інформаційні технології: Зб.наук. праць. – Львів: Світ, 2000. – Вип. 7. – С. 37– 45.

Стаття надійшла до редакції 21.01.02.

УДК 514.75

М.Ф. Гребенюк, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ДВОЇСТА НОРМАЛІЗАЦІЯ ТАНГЕНЦІАЛЬНО-ВИРОДЖЕНОЇ ПОВЕРХНІ V_{n-1}^r

Розглянуто диференціальну геометрію тангенціально-вироджених поверхонь неевклідового простору. Одержано диференціальні рівняння, які визначають тангенціально-вироджену поверхню V_{n-1}^r в просторі ${}^{\ell}S_n$, що віднесений до рухомого автополярного нормованого реперу, двоїсту нормалізацію направляючої поверхні V_r у сенсі А.П. Нордена.

Нехай у проективному просторі P_n задано невироджену гіперквадрику

$$q'_{IJ}x^I x^J = 0; \quad q'_{IJ} = q'_{JI}; \quad det\|q'_{IJ}\| \ne 0; \quad I, J = 0,1,...,n \tag{1}$$

і в канонічному вигляді її рівнянь менше з чисел коефіцієнтів одного знака дорівнює ℓ. Тоді можна визначити півгрупу колінеацій, а, отже, і відповідну проективну метрику. Одержаний метризований простір з цією фундаментальною групою називається розширеним неевклідовим простором ${}^{\ell}S_n$ індекса ℓ [1], а гіперквадрика (1) – його абсолютом.

У рівняннях інфінітезимального переміщення репера

$d\vec{M}_J = \omega_J^K \vec{M}_K$,

пфаффові форми ω_J^K простору ${}^{\ell}S_n$ задовольняють рівняння структури

$$d\omega_J^K = \omega_J^L \wedge \omega_L^K$$

проективного простору P_n [2] і умови

$$dq'_{IJ} = q'_{LJ}\omega_J^L + q'_{JK}\omega_J^K + q'_{IJ}\Theta, \tag{2}$$

що забезпечують збереження абсолюту простору ${}^{\ell}S_n$ [3].

За допомогою симетричного відносного тензора q'_{IJ} можна визначити аналог скалярного добутку

$$(A,B) = \sigma q'_{IJ} a^I b^J \tag{3}$$

для точок A і B, що визначаються відповідно за векторами

$$\vec{A} = a^I \vec{M}_I; \quad \vec{B} = b^J \vec{M}_J,$$

де σ – деяка стала; $q'_{IJ} a^I b^J$ – значення білінійної форми, що полярна квадратичній формі, яка знаходиться в лівій частині рівняння (1).

З рівняння (3) випливає, що відбуваються співвідношення

$$(M_I, M_J) = \sigma q'_{IJ}. \tag{4}$$

Точка A лежить на абсолюті простору ${}^{\ell}S_n$ тоді і лише тоді, коли виконується умова (A, A) = 0. Крім того, якщо виконується рівність (A, B) = 0, то кажуть, що точки A і B полярно спряжені стосовно абсолюту простору.

Репер $\{M_o, \dots, M_n\}$ простору ${}^{\ell}S_n$ називається полярним, якщо вершина M_o не лежить на абсолюті, а вершини $M_{\hat{J}}\,(\hat{I}, \hat{J}, \ldots = 1, 2, \ldots, n)$ лежать на полярі точки M_o стосовно абсолюту простору ${}^{\ell}S_n$. Відповідно до рівностей (3) і (4) знаходимо, що в полярному репері відбуваються співвідношення

$$q'_{oo} \neq 0; \quad q'_{oJ} \neq 0; \quad \det\|q'_{IJ}\| \neq 0. \tag{5}$$

Позначимо

$$q_{\hat{I}\hat{J}} = \frac{1}{q'_{oo}} q'_{\hat{I}\hat{J}}, \tag{6}$$

тоді з умови (2) інваріантності тензора q'_{IJ} відповідно до співвідношень (5) випливає

$$\omega_{\hat{I}}^{o} = -q_{\hat{I}\hat{J}}\omega^{\hat{J}}; \tag{7}$$

$$dq'_{oo} = q'_{oo}\left(2\omega_o^o + \Theta\right). \tag{8}$$

Враховуючи рівності (7) і симетрію тензора $q_{\hat{I}\hat{J}}$, знаходимо

$$d\omega_o^o = \omega_o^{\hat{I}}\omega_{\hat{I}}^o = -q_{\hat{I}\hat{J}}\omega^{\hat{I}} \wedge \omega^{\hat{J}} = 0.$$

Отже, форма ω_o^o є повним диференціалом деякої функції λ, тобто $\omega_o^o = d\lambda$.

Після перенормування

$$\vec{\tilde{M}}_o = e^{-\lambda}\vec{M}_o$$

вершини M_o одержуємо

$$d\vec{\tilde{M}}_o = e^{-\lambda}\omega_o^{\hat{I}}\vec{M}_{\hat{I}},$$

тобто $\omega_o^o = 0$. (9)

Якщо повернутися до старих позначень, то з умов (2) і рівностей (5)–(9) випливає, що в одержаному репері відбуваються співвідношення

$$q_{oo} = e^{-2\lambda} q'_{oo}; \quad \Theta = d \ln q_{oo}; \quad \omega^{o}_{o} = 0; \tag{10}$$

$$dq_{\hat{I}\hat{J}} = q_{\hat{L}\hat{J}}\omega^{\hat{L}}_{\hat{I}} + q_{\hat{I}\hat{L}}\omega^{\hat{L}}_{\hat{J}}. \tag{11}$$

Оскільки матриця $\|q_{IJ}\|$ метричного тензора є регулярною, то можна ввести матрицю $\|q^{IJ}\|$, обернену до матриці $\|q_{IJ}\|$, так, щоб

$$q_{IJ}q^{JK} = \delta^{K}_{I}.$$

Якщо віднести простір ${}^{\ell}S_n$ до рухомого автополярного нормованого репера $\{M_o,...,M_n\}$, тобто до репера, при якому

$$|q_{IK}| = \begin{cases} 0, \text{ якщо } I \neq K; \\ 1, \text{ якщо } I = K, \end{cases} \tag{12}$$

то із співвідношень (1)–(12) випливає, що форми ω^{I}_{K} задовольняють рівності [4]

$$\omega^{I}_{K} = -\varepsilon_{IK}\omega^{K}_{I},$$

де $\quad \varepsilon_{IK} = q^{KK}q_{II} = q_{KK}q_{II} = q_{KK}q^{II}$.

У просторі ${}^{\ell}S_n$ розглянемо плоский елемент (A, τ), що складається з точки A і гіперплощини τ, яка проходить через неї. Нехай точка A і гіперплощина τ залежать від r ($1 \leq r \leq n-1$) незалежних параметрів. Тоді при зміні параметрів точка A описуватиме r-вимірну поверхню V_r, а сім'я гіперплощин τ – деяку тангенціально-вироджену гіперповерхню V^{r}_{n-1}, що володіє $(n-r-1)$-вимірними плоскими твірними.

Нехай у неевклідовому просторі ${}^{\ell}S_n$ задано неізотропну $(n-1)$-вимірну тангенціально-вироджену поверхню V^{r}_{n-1} з неізотропними твірними. Віднесемо цю поверхню до рухомого автополярного нормованого репера $\{M_o, M_1, ..., M_n\}$ простору ${}^{\ell}S_n$ так, щоб перші його точки $M_o, M_1, ..., M_{n-r-1}$ лежали в її $(n-r-1)$-вимірній твірній, точки $M_{n-r},\ldots,M_{n-1}$ – у дотичній площині до напрямної поверхні V_r, а точка M_n доповняла їх до повного автополярного нормованого репера простору ${}^{\ell}S_n$. При такому виборі репера тангенціально-вироджена поверхня V^{r}_{n-1} у просторі ${}^{\ell}S_n$ визначається диференціальними рівняннями:

$$\omega^{n}_{o} = 0; \quad \omega^{n}_{i} = 0; \quad \omega^{i}_{o} = 0;$$

$$\omega^{n}_{\alpha} = \Lambda_{\alpha\beta}\omega^{\beta}; \quad \Lambda_{\alpha\beta} = \Lambda_{\beta\alpha}; \quad \Lambda = \det\|\Lambda_{\alpha\beta}\| \neq 0; \tag{13}$$

$$\omega^{\alpha}_{i} = \lambda^{\alpha}_{i\beta}\omega^{\beta} = \lambda^{\alpha}_{i\beta}\Lambda^{\beta\gamma}\omega^{n}_{\gamma} = \lambda^{\alpha\gamma}_{i}\omega^{n}_{\gamma},$$

де $\Lambda^{\alpha\beta}$ – елементи матриці $\|\Lambda^{\alpha\beta}\|$, оберненої до матриці $\|\Lambda_{\alpha\beta}\|$:

$$\Lambda_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta\gamma} = \delta^{\gamma}_{\alpha}.$$

Нехай тепер і в подальшому

$$i, j, k, \ldots = 1, \ldots, n-r-1;$$

$$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}, \ldots = 0, 1, \ldots, n-r-1;$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots = n-r, \ldots, n-1.$$

Відповідно до автополярності репера маємо:

$$\omega_n^o = 0; \quad \omega_n^\imath = 0; \quad \omega_\imath^o = 0;$$

$$\omega_\alpha^\imath = -\varepsilon_{\jmath\beta}\lambda_{\jmath\gamma}^\beta\omega^\gamma;$$

$$\omega_\beta^o = -\varepsilon_{o\beta}\omega^\beta;$$

$$\omega_n^\beta = -\varepsilon_{\beta n}\Lambda_{\beta\gamma}\omega_o^\gamma.$$

Продовжуючи диференціальні рівняння (13), знаходимо:

$$\nabla\Lambda_{\alpha\beta} = -\Lambda_{\alpha\beta}\left(\omega_n^n + \omega_o^o\right) + \Lambda_{\alpha\beta\gamma}\omega_o^\gamma;$$

$$\nabla\lambda_{\imath\beta}^\alpha = -\lambda_{\imath\beta}^\alpha\omega_o^o + \lambda_{\imath\beta\gamma}^\alpha\omega_o^\gamma;$$

$$\nabla\lambda_\imath^{\alpha\gamma} = \lambda_\imath^{\alpha\gamma}\omega_n^n - \lambda_\imath^{\alpha\gamma\beta}\omega_\beta^n;$$

$$\nabla\Lambda^{\beta\alpha} = -\Lambda^{\beta\alpha}\left(\omega_n^n + \omega_o^o\right) - \Lambda^{\beta\alpha\gamma}\omega_\gamma^n.$$

В околі другого порядку елемента тангенціально-виродженої поверхні V_{n-1}^r будуємо величини

$$B_\imath = \frac{1}{r}\Lambda_{\alpha\beta}\lambda_\imath^{\alpha\beta};$$

$$B^\imath = -\frac{1}{r}\Lambda^{\alpha\beta}\varepsilon_{\imath\alpha}\lambda_{\imath\beta}^\alpha,$$

маємо

$$\nabla_\delta B^\imath = B^\imath\pi_n^n;$$

$$\nabla_\delta B^\imath = B^\imath\pi_n^n.$$

Отже, величини $B_\imath$ та $B^\imath$ є відносними тензорами.

Під двоїстою нормалізацією тангенціально-виродженої поверхні V_{n-1}^r будемо розуміти нормалізацію напрямної поверхні V_r у сенсі А.П. Нордена, причому в кожному центрі M_0 нормаль другого роду ${}^{\ell_7}N_{n-r}$ тангенціально-виродженої поверхні містить твірну ${}^{\ell_1}E_{n-r-1}$ тангенціально-виродженої поверхні V_{n-1}^r. Вимога щодо інваріантності нормалі

$${}^{\ell_7}N_{n-r} \equiv \left[{}^{\ell_1}E_{n-r-1}, N\right],$$

де $N=M_n+\nu^\imath M_\imath+\nu^\alpha M_\alpha$,

обумовлює такі умови на величини ν^α: для довільної точки K, де

$$K = x^o M_o + x^\imath M_\imath + x^n N,$$

що належить нормалі ${}^{\ell_7}N_{n-r}$, маємо $\delta K = \Theta K$. Звідси випливає

$$\delta x^o M_o + x^o\pi_o^o M_o + \delta x^\imath M_\imath + x^\imath\pi_\imath^k M_k + \delta x^n\left[M_n + \nu^\imath M_\imath + \nu^\alpha M_\alpha\right] +$$
$$+ x^n\left[\pi_n^n M_n + \delta\nu^\imath M_\imath + \nu^\imath\pi_\imath^k M_k + \delta\nu^\alpha M_\alpha + \nu^\alpha\pi_\alpha^\beta M_\beta\right] =$$
$$= \Theta\left[x^o M_o + x^\imath M_\imath + x^n\left(M_n + \nu^\imath M_\imath + \nu^\alpha M_\alpha\right)\right];$$

$$M_o: \delta x^o + x^o\pi_o^o = \Theta x^o;$$

$$M_n: \delta x^n + x^n\pi_n^n = \Theta x^n;$$

$$M_\iota : \delta x^\iota + x^k\pi_k^o + \delta x^n\nu^\iota + x^n\delta\nu^\iota + x^n\nu^k\pi_k^\iota = \Theta\left(x^\iota + x^n\nu^\iota\right);$$

$$M_\alpha : \delta x^n\nu^\alpha + x^n\delta\nu^\alpha + x^n\nu^\beta\pi_\beta^\alpha = \Theta x^n\nu^\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\delta x^n - \Theta x^n\right)\nu^\alpha + x^n\left(\delta\nu^\alpha + \nu^\beta\pi_\beta^\alpha\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla_\delta\nu^\alpha = \nu^\alpha\pi_n^n. \tag{14}$$

На величини ν^ι ця вимога не призводить до жодних умов. Але якщо, крім того, вимагати інваріантність прямої $[M_o, N]$, то величини ν^ι повинні задовольняти наступні рівняння.

Для довільної точки H, де

$$H = x^o M_o + x^n N,$$

що належить прямій $[M_o, N]$, маємо $\delta H = \Theta H$. Звідси випливає

$$\delta x^o M_o + x^o\pi_o^o M_o + \delta x^n\left(M_n + \nu^\iota M_\iota + \nu^\alpha M_\alpha\right) +$$

$$+ x^n\left(\pi_n^n M_n + \delta\nu^\iota M_\iota + \nu^\iota\pi_\iota^k M_k + \delta\nu^\alpha M_\alpha + \nu^\alpha\pi_\alpha^\beta M_\beta\right) =$$

$$= \Theta\left[x^o M_o + x^n\left(M_n + \nu^\iota M_\iota + \nu^\alpha M_\alpha\right)\right];$$

$$M_n : \delta x^n + x^n\pi_n^n = \Theta x^n;$$

$$M_\iota : \delta x^n\nu^\iota + x^n\delta\nu^\iota + x^n\nu^k\pi_k^\iota = \Theta x^n\nu^\iota \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\delta x^n - \Theta x^n\right)\nu^\iota + x^n\left(\delta\nu^\iota + \nu^k\pi_k^\iota\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla_\delta\nu^\iota = \nu^\iota\pi_n^n.$$

Отже, як величини ν^ι можна взяти тензор другого порядку B^ι. У подальшому будемо вважати, що пряма $[M_o, N]$ є інваріантною, що дозволяє як точку N взяти

$$N(\nu) = M_n + \nu^\alpha M_\alpha + B^\iota M_\iota,$$

де величини ν^α задовольняють рівняння (14).

Задання поля тензора ν^α визначає поле інваріантних прямих $[M_o, N(\nu)]$, а отже, поле інваріантних нормалей другого роду

$$^{\ell_7}N_{n-r}(\nu) = \left[^{\ell_1}E_{n-r-1}, N(\nu)\right].$$

Нормаль першого роду $^{\ell_2}E_{r-1}$ натягнута на точки

$$N_\alpha = M_\alpha + \nu_\alpha^o M_o.$$

Вимога щодо інваріантності площини $^{\ell_2}E_{r-1}$ рівносильна тому, що величини ν_α^o задовольняють наступні рівняння.

Для довільної точки P, де

$$P = x^o M_o + x^\alpha N_\alpha,$$

що належить площині $^{\ell_2}E_{r-1}$, маємо $\delta P = \Theta P$. Звідси випливає

$$\delta x^o M_o + x^o\pi_o^o M_o + \delta x^\alpha\left(M_\alpha + \nu_\alpha^o M_o\right) +$$

$$+ x^\alpha\left(\pi_\alpha^\beta M_\beta + \delta\nu_\alpha^o M_o + \nu_\alpha^o\pi_o^o M_o\right) = \Theta\left[x^o M_o + x^\alpha\left(M_\alpha + \nu_\alpha^o M_o\right)\right] \Rightarrow$$

$$M_\alpha : \delta x^\alpha + x^\beta\pi_\beta^\alpha = \Theta x^\alpha;$$

$$M_o : \delta x^o + x^o\pi_o^o + \delta x^\alpha\nu_\alpha^o + x^\alpha\left(\delta\nu_o^o + \nu_\alpha^o\pi_o^o\right) = \Theta\left(x^o + x^\alpha\nu_\alpha^o\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\delta x^\alpha - \Theta x^\alpha\right)\nu_\alpha^o + x^\alpha\left(\delta\nu_\alpha^o + \nu_\alpha^o\pi_o^o\right) = \Theta x^o - \delta x^o - x^o\pi_o^o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^\alpha\left(-\pi_\alpha^\beta\nu_\beta^o + \delta\nu_\alpha^o + \nu_\alpha^o\pi_o^o\right) = 0 \Rightarrow \nabla_\delta\nu_\alpha^o = -\nu_\alpha^o\pi_o^o.$$

Отже, поля тензорів ν^{α} і ν_{α}^{o} визначають поля інваріантних нормалей відповідно до першого та другого роду тангенціально-виродженої поверхні V_{n-1}^{r}.

Список літератури

1. *Розенфельд Б А* Неевклидовы геометрии. – М.: Гостехиздат. – 1955.
2. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана. – М.; Л.: Гостехиздат. – 1948.
3. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий: Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований// Тр. Моск. мат. о-ва. – 1953. – Т.2. – С. 275–382.
4. *Абель Э.П.* Поверхности неполного ранга в многомерных неевклидовых пространствах. – Тарту, 1979.

Стаття надійшла до редакції 08.02.02.

УДК 517:681.3(06) 045

В.О. Касьянов, д-р техн. наук, проф.

ГАМІЛЬТОНОВА ФОРМА МЕХАНІКИ ДИСИПАТИВНИХ СИСТЕМ І ДЕЯКІ АНАЛОГИ ЗАКОНІВ ЗБЕРЕЖЕННЯ НЕТЕР

Розглянуто гамільтонову механіку дисипативних систем з дисипацією, пропорційною першому і другому ступеням узагальненої швидкості.

У роботі [1] було запропоновано перетворення «фізичного» фазового простору (узагальнених імпульсів і координат) для дисипативної системи з частками змінної маси в новий фазовий простір, у якому рівняння Гамільтона не містять узагальнених сил і методи теорії консервативних систем, вивчалася система з дисипацією, пропорційною швидкості частки в першому степеню. За аналогією з консервативними системами були отримані основні результати для вказаних дисипативних систем, зокрема, рівняння Гамільтона-Якобі, інтегральні інваріанти Картана і Пуанкаре–Картана, теорема Лідвілля, показано, що статистичні середні, обчислені в обох просторах, збігаються, розглянута система N часток змінної маси, що рухаються з релеєвською дисипацією в континуальному середовищі. Якщо функцію Лагранжа зобразити у вигляді

$$L^{*}=\sum_{i=1}^{N}\left[\exp\beta.\ \dot{\vec{q}}_i.\dot{\vec{q}}_i-2\vec{\alpha}_i.\dot{\vec{q}}_i-2m^{-1}.\exp\beta.\left(\Pi_i+\sum_{j=1}^{N}\Phi_{ij}\right)\right], \qquad (1)$$

то рівняння Ейлера-Лагранжа з точністю до постійного множника збігаються з рівняннями руху системи. У співвідношенні (1):

$$\beta(t)=\int_0^{\infty}\theta(t-\xi)m^{-1}[k(\xi)+\dot{m}(\xi)]d\xi;$$

$$\vec{\alpha}_i(t)=\int_0^{\infty}\theta(t-\xi)\exp\beta(\xi)m^{-1}(\xi)\left[k(\xi)\vec{V}(q_i.(\eta),\xi)+\dot{m}(\xi)\vec{U}_i(q_i(\eta),\xi)\right]d\xi,$$

де m – маса частки; Π_i – потенціал зовнішніх сил; $\Phi_{ij}\left(\left|\vec{q}_i-\vec{q}_j\right|\right)$ – потенціал парної взаємодії; $\theta(t-\xi)$ – східчаста функція Хевісайда; k – коефіцієнт опору середовища; V – швидкість руху середовища; $\vec{U}_i(\vec{q}_i(\eta),\xi)$ – швидкість відльоту (приєднання) маси.

Якщо ввести новий фазовий простір зі змінними $\vec{p}_i^{\,*}$, $\vec{q}_i^{\,*}$, що пов'язані з «фізичними» змінними $\vec{p}_i$, $\vec{q}_i$ співвідношеннями:

$$p_i^{*}=2m^{-1}\exp\beta(t)\vec{p}_i+2\vec{\alpha}_i(t);\quad \vec{q}_i^{\,*}=\vec{q}_i,$$