ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 621.519

Т. І. Олешко, канд. техн. наук, доц.

МОДЕЛЮВАННЯ КУСКОВО-ЛІНІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

Розглянуто кусково-лінійний процес $Z(t) = (Z_1(t),\ \ Z_2(t),..., Z_n(t))$, *який визначає поведінку збільшеного агрегату.*

Функціонування класу складних систем (технічних, економічних та ін.) можна описати кусково-лінійними випадковими процесами.

Для статистичного моделювання складних систем, в рамках якого є можливість підвищувати ефективність обчислювального процесу методами прискореного моделювання, як базову модель можна використовувати одновимірний агрегат.

Одновимірний кусково-лінійний агрегат описує функціонування елементів технічної системи, що дозволяє перейти від елемента до його моделі. Схема стикування агрегатів є моделлю тих взаємозв'язків, які існують між окремими елементами системи, що досліджується.

Модель системи складається із схеми стикування і сукупності агрегатів $A_1, A_2,..., A_n$, яким відповідають кусково-лінійні процеси

$$z_1(t),\ z_2(t),...,\ z_n(t),\ \ z_i(t) = (v_i(t), \xi_i(t)),\ 1 \le i \le n .$$

Кусково-лінійним процесом, який визначає внутрішній стан збільшеного агрегату

$$A = (A_1,\ A_2,...,\ A_n)\ ,$$

є також багатовимірний випадковий процес

$$Z(t) = (Z_1(t),\ Z(t),....,Z_n(t))\ .$$

Оскільки одновимірний агрегат зручно використовувати для підвищення ефективності статистичного моделювання об'єктів складної структури, то великого значення набуває побудова траєкторії випадкового процесу $Z(t)$.

Розглянемо багатовимірний випадковий процес

$$Z(t) = (Z_1(t),\ Z_2(t),...,Z_n(t))\ ,$$

який є кусково-лінійним процесом і визначає поведінку збільшеного агрегату

$$A = (A_1,\ A_2,...,\ A_n)\ .$$

Такий випадковий процес $Z(t)$ задається [1]:

– законом розподілу ймовірностей $Q_i^0(v, x)$ початкового стану процесу $Z_i(t), 1 \le n$ у момент часу t_0:

$$Q_i^0(v, x) = P(v_i(t_0 + 0) = v,\ \ \xi_1(t_0 + 0) < x);$$

– законом розподілу ймовірностей $Q_i^1(\zeta, \xi, k, B)$, які визначають аналіз станів дискретної компоненти $v_i(t)$ при перетворенні неперервної компоненти $\xi_1(t)$ в нуль:

$$Q_i^1(\zeta, \xi, k, B) = P(v_1(t+0) = k, \xi_1(t+0) < x | Z_i(t-0) = (l, \xi)); \tag{1}$$

– схемою стикування [2], яка встановлює шляхи передачі сигналів між окремими агрегатами у вигляді сукупності сигналів;

– швидкістю зменшення неперервної компоненти ξ_1 у стані $v_i(t) = j$, яка задається множиною чисел α_i^j, $j \in Z_i, 1 \le i \le n$.

Властивість процесу $Z(t)$ залишається знову кусково-лінійним, у результаті збільшення одновимірних агрегатів дозволяє організувати рекурентну процедуру побудови його траєкторії через побудову траєкторії процесів $Z_1(t)$, $Z_2(t),...,Z_n(t)$. Загальна схема моделювання випадкового процесу $Z(t)$ має такий вигляд [3].

Спочатку будемо виходити з визначення неперервної змінної, яка задається співвідношенням

$$\xi_i(t) = \sup\,(\tau > 0 : v_i(t) = v_i(t+\tau)),$$

і інтерпретується як залишковий час з моменту t до першої зміни дискретної компоненти v_1, $1 \le i \le n$. Реалізуємо початковий стан

$$Z(t_0+0) = (Z_1(t_0+0),\ Z_2(t_0+0),...,\ Z_n(t_0+0))$$

процесу згідно із законом розподілу ймовірностей

$$Q^{(0)}(v_1, v_2, ..., v_n;\ \ x_1, x_2, ..., x_n) =$$

$$= P(v_1(t_0+0) = v_1, \xi_1(t_0+0) < x_1, ..., = v_n(t_0+0) = v_n,\ \xi_n(t_0+0) < x_n).$$

Нехай в результаті моделювання одержали значення

$$Z(t_0+0) = (v_1, \eta_1; v_2, \eta_2; ...; v_n, \eta_n).$$

Використовуючи швидкість зменшення неперервних змінних $\alpha_{v_1}, \alpha_{v_2}, ..., \alpha_{v_n}$, визначимо нові значення $\alpha_1, \eta_1; v_2, \eta_2; ...; v_n, \eta_n$ випадкових величин $\xi_1(t_0+0),...,\ \xi_n(t_0+0)$, віднесених до єдиного масштабу модельного часу.

Далі знаходимо інтервал Δ, під час якого випадкові процеси $Z_1(t)$, $Z_2(t),...,\ Z_n(t)$ розвиваються незалежно один від одного. Для цього необхідно визначити «вузловий» момент часу t, коли вперше після моменту t_0 може з'явитися залежність між процесами. Цей час визначають за формулою

$$t_1 = t_0 + \min_{1 \le i \le n} \alpha_{v_i} \eta_i.$$

Імовірнісний характер появи залежності пояснюється випадковістю виникнення сигналів у момент t_1. Існування сигналу між агрегатами A_1 і A_j свідчить про наявність залежності між процесами $Z_i(t)$ і $Z_j(t)$. Для встановлення факту існування сигналу потрібно знайти номер i_1 агрегату, який змінив свій стан у момент t_1. Він дорівнює номеру тієї випадкової величини, на якій досягається мінімум, тобто

$$i_1 = \arg + \min_{1 \le i \le n} \alpha_{v_i} \eta_i.$$

У визначений таким способом «вузловий» момент з урахуванням значення i_1 відбувається перерахунок стану процесу $Z(t)$, який має на увазі знаходження значень $Z(t_1-0), Z(t_1+0)$ і полягає в наступному.

1. Залишкові значення випадкових величин $\xi_1(t+0)$, $1 \le i \le n, i = i$ визначаються за формулою

$$\xi_i(t_1+0) = \xi_1(t_0+0) - t.$$

2. Нехай значення випадкового процесу $Z_{i_1}(t)$ в момент стрибка дорівнює

$$Z_i(t_1-0) = (l, \xi).$$

Тоді значення неперервної змінної $Z_{i_1}(t+0)$ і дискретної компоненти $v_{i_1}(t+0)$ реалізуються згідно із сумісним законом розподілу ймовірностей $Q^{(0)}_{i_1}(l, \xi, k, B)$, який визначається формулою (1).

3. Згідно з парою $v_{i_1}(t_1-0)=l, v_{i_1}(t_1+0)=k$ визначається вид сигналу, якщо він існує, який видається агрегатом A_{i_1}, і реалізуються реакції агрегатів – приймачів сигналу $A_{j_1}, A_{j_2},..., A_{j_n}$, $Z_{i_1}(t+0),..., Z_{i_s}(t+0)$. Процес взаємодії між агрегатами продовжується до того часу, поки на деякому кроці реалізується останній ланцюжок миттєвої передачі сигналів.

4. Для агрегатів $A_{m_1},..., A_{m_k}$, які беруть участь в описаному процесі видачі і прийому сигналів, згідно з новими станами $v_{m_1}(t+0),..., v_{m_k}(t+0)$ визначаються значення неперервних компонент $\xi_{m_1}(t+0),..., \xi_{m_k}(t+0)$. Для агрегатів, які не беруть участь у передачі сигналів, дискретні компоненти зберігають свої значення, тобто

$$v_k(t_1-0)=v_k(t_1+0).$$

Після завершення перерахунку знову знаходиться черговий інтервал часу $\Delta_2=t_2-t_1$, протягом якого всі процеси $Z_i(t), 1\le i\le n$ функціонують незалежно один від одного, тобто обчислюється «вузловий» момент часу $t_2>t_1$ і знаходиться номер i_2 агрегату за формулою

$$i_2=\arg\min_{1\le i\le n}\alpha_{v_i}\xi_i(t_1+0).$$

Обчисливши вектор (t_1, i_2), переходимо до перерахунку стану процесу $Z(t)$ в момент часу t_2 і визначаємо значення $Z(t_2-0)$, $Z(t_2+0)$.

Рекурентна процедура знаходження величин $t_k, i_k, Z(t_k-0),\ Z(t_k+0), k>0$ циклічно повторюється через періоди $\Delta_1, \Delta_2,...$, відображаючи розвиток траєкторії процесу $Z(t)$ в часі. Як видно з наведеного алгоритму, траєкторія процесу в інтервалах неперервності $\Delta_1, \Delta_2,...$ складається з лінійних інтервалів, і лише у «вузлові» моменти часу, які визначаються послідовністю $0=t_0<t_1<...$, стрибком змінює свої значення. Це можна записати за допомогою таких співвідношень:

$$Z(t_k-0)=Z(t_k+0), k>0;$$

$$\xi_i(t)=\xi_i(t_k+0)-\alpha_{v_i}(t_k+0)(t-t_k);$$

$$v_1(t_k+0)=v_i(t_{k+1}-0)=v_i(t), 1\le i\le n, t\in\Delta_{k+1}.$$

Цей метод побудови траєкторій є безпосереднім моделюванням випадкового процесу $Z(t)$.

Наведемо ще один спосіб побудови траєкторії випадкового процесу, який використовують у випадках, коли потрібно реалізувати так звані «умовні траєкторії». Алгоритм побудови траєкторії процесу $Z(t)$ в цьому випадку такий:

1) реалізують початковий стан

$$Z_1(t_0+0)=(v_1(t_0+0), \xi_1(t_0+0)),..., Z_n(t_0+0)=(v_n(t_0+0), \xi_n(t_0+0))$$

агрегатів $A_1,..., A_n$ згідно із законом розподілу ймовірностей;

2) знаходять послідовність значень $\alpha_{v_1}\eta_1,..., \alpha_{v_n}\eta_n$, де $v_i=v_i(t_0+0)$;

3) визначають перший вузловий момент t_1 за формулою

$$t_1=t_0+\min_{1\le i\le n}\alpha_{v_i}\eta_i;$$

4) знаходять номер i_1 агрегату A_{i_1}, який змінив свої значення в момент часу t_1:

$i_1 = \arg \min\limits_{1 \le i \le n} \alpha_{v_i} \eta_i$;

5) визначають нове значення

$Z_{i_1}(t_1 + 0) = (v_{i_1}(t_1 + 0), \xi_{i_1}(t_1 + 0))$

агрегату згідно з законом розподілу ймовірностей.

6) здійснюють реалізацію ланцюжків миттєвої передачі сигналів, використовуючи схему стикування: перший ланцюжок починається від агрегату A_1 з урахуванням зміни станів значень дискретної компоненти $v_{i_1}(t_1 - 0), v_{i_1}(t_1 + 0)$;

7) реалізують перерахунок стану процесу функціонування об'єкту, в результаті чого визначається нове значення

$Z(t_1 + 0) = (Z_1(t_1 + 0),..., Z_n(t_1 + 0))$

(на відміну від попереднього алгоритму спочатку фіксуються значення $\nu_i = \nu_i(t_1 + 0)$, $\tau_i = \xi_i(t_1 - 0)$, а потім моделюється значення випадкових величин $\xi_i(t_1 + 0), 1 \le i \le n$);

8) визначають значення $Z(t_0 + 0)$ і здійснюють перехід на крок 2.

Цей спосіб є більш трудомістким в обчислювальному відношенні в порівнянні з першим способом, оскільки в кожний вузловий момент доводиться моделювати всі неперервні компоненти.

Список літератури

1. *Коваленко И.Н.* Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности систем. – М.: Сов. радио, 1980. – 208 с.

2. *Кривуца В Г* Нахождение вероятности эффективного функционирования систем // Электронное моделирование. – 1988. – № 5. – С. 93–98.

3. *Олешко Т.І.* Знаходження аналітико-статистичних оцінок імовірнісних характеристик систем // Моделювання та інформаційні технології: Зб.наук. праць. – Львів: Світ, 2000. – Вип. 7. – С. 37– 45.

Стаття надійшла до редакції 21.01.02.

УДК 514.75

М.Ф. Гребенюк, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ДВОЇСТА НОРМАЛІЗАЦІЯ ТАНГЕНЦІАЛЬНО-ВИРОДЖЕНОЇ ПОВЕРХНІ V^r_{n-1}

Розглянуто диференціальну геометрію тангенціально-вироджених поверхонь неевклідового простору. Одержано диференціальні рівняння, які визначають тангенціально-вироджену поверхню V^r_{n-1} в просторі ${}^{\ell}S_n$, що віднесений до рухомого автополярного нормованого реперу, двоїсту нормалізацію направляючої поверхні V_r у сенсі А.П. Нордена.

Нехай у проективному просторі P_n задано невироджену гіперквадрику

$$q'_{IJ} x^I x^J = 0; \quad q'_{IJ} = q'_{JI}; \quad det\|q'_{IJ}\| \neq 0; \quad I, J = 0,1,...,n \tag{1}$$

і в канонічному вигляді її рівнянь менше з чисел коефіцієнтів одного знака дорівнює ℓ. Тоді можна визначити півгрупу колінеацій, а, отже, і відповідну проективну метрику. Одержаний метризований простір з цією фундаментальною групою називається розширеним неевклідовим простором ${}^{\ell}S_n$ індекса ℓ [1], а гіперквадрика (1) – його абсолютом.

У рівняннях інфінітезимального переміщення репера

$d\vec{M}_J = \omega_J^K \vec{M}_K$,