УДК 629.735.015

А.О. Антонова, канд. техн. наук, доц.

АНАЛІТИЧНІ ОЦІНКИ БІЧНОЇ ДАЛЬНОСТІ СПУСКУ ТА ОПТИМАЛЬНОГО КУТА КРЕНУ ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТА

Розглянуто нові аналітичні вирази залежності бічної дальності спуску літального апарата від величини аеродинамічної якості і кута крену в режимі квазістаціонарного планерування. Проаналізовано залежність оптимального кута крену апарата від його аеродинамічної якості

Побудова наближених аналітичних залежностей для визначення бічної дальності спуску літального апарата φ від величини його аеродинамічної якості K і кута крену γ в режимі квазістаціонарного планерування, тобто при постійних значеннях K і γ досліджено в монографії [1]. Виходячи з диференціального рівняння, що описує спуск апарата

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \varphi = \mathrm{tg}\gamma \frac{\left(1-\overline{V}_0^2\right)e^{\frac{2s}{K\cos\gamma}}}{1-\left(1-\overline{V}_0^2\right)e^{\frac{2s}{K\cos\gamma}}},$$

де s – безрозмірна незалежна змінна; $\overline{V}_0 = V_0 / g_0 R_0$ – безрозмірна початкова швидкість входу апарата в атмосферу, у роботі [1] було отримано загальний вираз для φ в момент приземлення $(\varphi(K,\gamma))$ у вигляді нескінченного збіжного ряду. Виконавши наближене підсумовування цього ряду, автори знайшли просту апроксимаційну формулу

$$\varphi_{app} = \frac{\pi^2}{24} K^2 \sin\gamma \cdot \cos\gamma \left[1 - \frac{6}{\pi^2\left(1+4/(K^2\cos^2\gamma)\right)}\right], \tag{1}$$

за допомогою якої можна отримати аналітичний вираз для знаходження оптимального кута крену. Покажемо далі, що відмічений ряд для функції $\varphi(K,\gamma)$ точно виражається через елементарні функції й апроксимаційна формула (1) при будь-якому значенні аеродинамічної якості K дає завищену бічну дальність спуску літального апарата. Для переконання в справедливості наведених тверджень будемо виходити з виразу для функції $\varphi(K,\gamma)$ [1, с. 74, формула (2.28)]:

$$\varphi = \frac{1}{4} K^2 \sin\gamma \cdot \cos\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\alpha^2}, \tag{2}$$

де

$$\alpha = \frac{K\cos\gamma}{2}.$$

Формулу (1) можна отримати з рівняння (2) таким чином. Легко помітити, що ряд, який входить до виразу (2), можна записати у вигляді різниці двох інших збіжних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\alpha^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2+\alpha^2)}. \tag{3}$$

Перша сума в правій частині виразу (3) добре відома [2]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Якщо у другій сумі обмежитися лише першим членом, який дорівнює $\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}$, то прийдемо до виразу (1).

Очевидно, що формула (1) дає завищені значення бічної дальності, адже при довільних K та γ різниця

$$\Delta = \varphi(K,\gamma) - \varphi_{app}(K,\gamma)$$

від'ємна:

$$\Delta = \varphi(K,\gamma) - \varphi_{app}(K,\gamma) = -\frac{\alpha^2 K^2}{4}\sin\gamma\cos\gamma\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n^2+\alpha^2)} \geq 0$$

і зростає при збільшенні параметра K.

Для оцінювання величини похибки Δ, яка виникає через урізання ряду, звернемо увагу на те, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\alpha^2}$ виражається через елементарні функції. Дійсно, як відомо з роботи [3], відбувається таке зображення функції гіперболічного котангенса у вигляді ряду

$$cth\pi x = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2},$$

з якого випливає:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2} = \frac{\pi x cth\pi x - 1}{2x^2}. \tag{4}$$

Тому, скориставшися формулою (4), можна записати вираз для бічної дальності спуску $\varphi(K,\gamma)$ через елементарні функції:

$$\varphi = \frac{\pi^2}{24}K^2\sin\gamma\cdot\cos\gamma\, G(\pi\alpha), \tag{5}$$

де

$$G(y) = 3\frac{ycthy - 1}{y^2}.$$

Наскільки відрізняються одна від одної функції $\varphi(K,\gamma)$ і $\varphi_{app}(K,\gamma)$, показано на рисунку для випадку $K=3$. Як видно з рисунка, відносна похибка може складати близько 30 %.

Легко бачити, що як функція $\varphi(\gamma)$, так і функція $\varphi_{app}(\gamma)$ мають максимум при деякому оптимальному куті крену $\gamma=\gamma_{opt}$, причому $0<\gamma_{opt}<90^0$. Дійсно, обидві функції додатні, обертаються на нуль при $\gamma=0$ та $\gamma=90^0$, тому кожна з цих функцій має максимум в межах $0<\gamma<90^0$. Положення максимуму визначається величиною аеродинамічної якості K. Можна переконатися, що $\gamma_{opt}\approx 45^0$ при малих K, а $\gamma_{opt}\to 90^0$ при $K>>1$. Так, $G\to 1$ при $K<<1$, і з формули (3) випливає, що функція $\varphi(\gamma)$ прямує до

$$\varphi = \frac{\pi^2}{24}K^2\sin\gamma\cdot\cos\gamma,$$

яка має максимум при $\gamma=45^0$.

У загальному випадку залежність $\gamma_{opt}(K)$ можна знайти з умови

$$\frac{d\varphi}{d\gamma} = 0,$$

з якої матимемо рівняння

$$2sh^2\pi\alpha(\pi\alpha cth\pi\alpha - 1) - \pi K\sin^2\gamma\cos\gamma(sh\pi\alpha ch\pi\alpha - \pi\alpha = 0). \qquad (6)$$

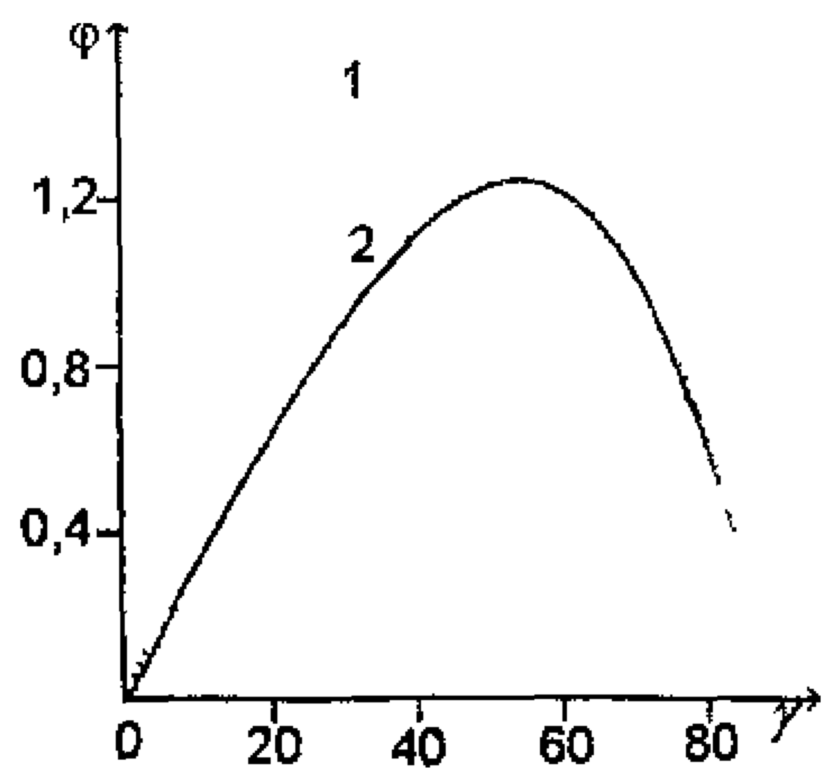
Значення оптимального кута крену $\gamma_{opt}(K)$ випливають з формули (6) і роботи [1, формула (2.33)]:

$$\gamma_{opt} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8}\left(1 + a/K^2\right)\left[1 - \sqrt{1 - \frac{64b}{(K^2+8)(1+a/K^2)^2}}\right],$$

де

$$a = \frac{8\pi^2}{\pi^2 - 6} \approx 20{,}4, \quad b = \frac{6}{\pi^2 - 6} \approx 1{,}55.$$

Як видно з таблиці, точні і наближені значення оптимального кута крену відрізняються слабко і близькі до 45^0.



Залежності $\varphi_{app}(\gamma)$ (крива *1*) та $\varphi(\gamma)$(крива 2) при $K = 3$

Значення оптимального кута крену

K	0	1	2	3
$\gamma_{opt}(K)$, град	45	47	51	55
$\gamma_{opt}(K)$ [1], град	45	46,7	50	52

Для оцінки бічної дальності спуску можна у формулі (5) покласти $\gamma \approx 45^0$, у результаті чого матимемо

$$\varphi(K) \approx 0{,}5\left(\frac{\pi K}{2\sqrt{2}} cth\frac{\pi K}{2\sqrt{2}} - 1\right).$$

Одержані аналітичні формули можна застосовувати для визначення бічної дальності спуску та оптимального кута крену літального апарата.

Список літератури

1. *Шкадов Л.М., Буханова Р.С., Илларионов В.Ф., Плохих В.П.* Механика оптимального пространственного движения летательных аппаратов в атмосфере. – М.: Машиностроение, 1972. – 244 с.

2. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

3. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.:Наука, 1973. – 736 с.

Стаття надійшла до редакції 15.02.02.