УДК 621.372

В.М. Шутко, канд. техн. наук

СПЛАЙН-АПРОКСИМАЦІЯ ОЦІНОК КОРЕЛЯЦІЙНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ГАРМОНІЙНИХ СИГНАЛІВ

Запропоновано сплайн-обробку за методом найменших квадратів оцінок кореляційних послідовностей комплексних гармонійних сигналів, які містять випадкову складову, з урахуванням нелінійного аналітичного зв'язку між дійсною та уявною частинами цих послідовностей.

У задачах числової обробки гармонійних сигналів, що містять випадкові складові, часто необхідно оцінити тренди кореляційних послідовностей цих сигналів. У класичному випадку для цього можна використовувати комплексні сплайни з різним розташуванням вузлів склейки в залежності від частоти сигналу. Але така апроксимація не враховує аналітичного зв'язку між уявною та дійсною частинами оцінок кореляційних послідовностей:

$$\hat{r}(m)=\begin{cases}\dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-m-1}y[n+m]y^{*}[n], & 0\le m\le N-1;\\ \dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-|m|-1}y^{*}[n+|m|]y[n], & -(N-1)\le m<0,\end{cases} \tag{1}$$

де N – об'єм вхідної послідовності.

Цей зв'язок для кожного часового зміщення m є постійним незалежно від амплітуди та фази гармонійного сигналу і дорівнює

$$q(m)=\frac{Im[\hat{r}(m)]}{\mathrm{Re}[\hat{r}(m)]}=\frac{\sin[\frac{2\pi}{N}km]}{\cos[\frac{2\pi}{N}km]},\quad -(N-1)\le m\le N-1,$$

де k – фіксована нормована частота.

У формулі (1) вибрано зсунену оцінку (далі оцінку) кореляційної функції (нормуючий коефіцієнт $\frac{1}{N}$, а не $\frac{1}{N-m}$) для зменшення дисперсії відліків цієї функції при значних зміщеннях m.

Розглянемо задачу в такій постановці. Часова послідовність деякого гармонійного процесу зображена відліками:

$$y(t)=\{y(0),\ y(1),\dots,\ y(N-1)\}, \tag{2}$$

одержаними як результат вимірювань за схемою [1]:

$$y(t)=y_r(t)+jy_\iota(t)=A\exp\{j(2\pi f_0 t+\varphi)\}+\eta_r(t)+j\eta_\iota(t),$$

де A – амплітуда коливання; f_0 – частота; φ – випадкова початкова фаза з рівномірним розподілом на інтервалі $[0;2\pi]$; $\eta_r(t),\eta_\iota(t)$ – дійсна та уявна складові гауссівського білого шуму з нульовим середнім та дисперсіями $V_r=V_\iota=\frac{V}{2}$.

Далі по відлікам (2) знайдемо оцінку кореляційної функції (1). Як відмічалося, для даної нормованої частоти k вхідної послідовності (2) незалежно від амплітуди A та початкової фази φ між уявною та дійсною частинами $\hat{r}(m)$ можна встановити «відносний» зв'язок для кожного часового зміщення m:

$$q(m)=\mathrm{tg}[\frac{2\pi}{N}km]; \quad -(N-1)\le m\le N-1 .$$

Складемо наступний функціонал у вигляді:

$$\Phi=\sum_{m=-(N-1)}^{N-1}[\hat{r}_\iota(m)-S_\iota(m)]^2+\sum_{m=-(N-1)}^{N-1}[\hat{r}_r(m)-S_r(m)]^2+\lambda\sum_{m=-(N-1)}^{N-1}[S_\iota(m)-q(m)S_r(m)]^2,$$

де $S_\iota(m)=ZA_\iota$ та $S_r(m)=PA_r$ – кубічні ермітові сплайни, які апроксимують уявну $\hat{r}_\iota(m)$ та дійсну $\hat{r}_r(m)$ складові оцінки кореляційної послідовності; Z,P – матриці планування для сплайнів S_ι, S_r; $A_\iota=\{a_{\iota l}\}_{l=1}^{s}, A_r=\{a_{rl}\}_{l=1}^{s}$ – вектори оцінюваних параметрів (ординати точок «склейки» ділянок сплайнів).

Матриці планування Z,P в загальному випадку можуть бути неоднаковими внаслідок різного розташування вузлів «склейки».

Значення локального ермітового кубічного сплайна в довільній точці обчислюється за формулою [2]

$$S(\omega)=a_{l-1}\,{}^{1}x(\omega)+a_l\,{}^{2}x(\omega)+a_{l+1}\,{}^{3}x(\omega)+a_{l+2}\,{}^{4}x(\omega)$$

для $\omega\in[\omega u_l,\omega u_{l+1}]$; ${}^{g}x(\omega)$ – локальні функції форми; $g=\overline{1\div4}$; a_l – значення ординат вузлів «склейки»; $l=1,2,...,s$.

Для виконання умови методу найменших квадратів (МНК)

$$\Phi=\min$$

потрібен розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial a_{\iota l}}=0, \quad l=\overline{1,s};\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial a_{rl}}=0, \quad l=\overline{1,s};\\ S_\iota(m)=q(m)S_r(m), \quad -(N-1)\le m\le N-1.\end{cases} \tag{3}$$

Систему (3) розв'язати доцільніше у матричному вигляді:

$$\Phi=(\hat{R}_\iota-ZA_\iota)^T(\hat{R}_\iota-ZA_\iota)+(\hat{R}_r-PA_r)^T(\hat{R}_r-PA_r)+\lambda(ZA_\iota-\tilde{P}A_r)^T(ZA_\iota-\tilde{P}A_r),$$

де $\tilde{P}$ – матриця:

$$\tilde{P}=\begin{bmatrix}-q[-(N-1)]p_{11} & -q[-(N-1)]p_{12} & -q[-(N-1)]p_{1s}\\ -q[-(N-2)]p_{21} & -q[-(N-2)]p_{22} & -q[-(N-2)]p_{2s}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\ -q[N-1]p_{2N-1,1} & -q[N-1]p_{2N-1,2} & -q[N-1]p_{2N-1,s}\end{bmatrix},$$

а вимоги МНК:

$$(\tilde{R}-WA)^T(\tilde{R}-WA)=\min,$$

де $$\tilde{R}=\begin{bmatrix}\hat{R}_\iota\\ \hat{R}_r\\ D\end{bmatrix};$$

$$\hat{R}_\imath = [\hat{r}_\imath[-(N-1)],\ \hat{r}_\imath[-(N-2)], ...,\ \hat{r}_\imath[N-1]]^T\ ;$$

$$\hat{R}_r = [\hat{r}_r[-(N-1)],\ \hat{r}_r[-(N-2)], ...,\ \hat{r}_r[N-1]]^T\ ;$$

$\hat{R}_\imath$, $\hat{R}_r$ – вектори уявної та дійсної складових оціненої кореляційної функції;

$D = [0,0,...,0]^T$ розмірністю $(N*1)$;

$$A = \begin{bmatrix} A_\imath \\ A_r \end{bmatrix};$$

$$A_\imath = [a_{\imath 1}, a_{\imath 2}, ..., a_{\imath s}]^T\ ;$$

$$A_r = [a_{r1}, a_{r2}, ..., a_{rs}]^T\ ;$$

$A_\imath$, A_r – вектори ординат вузлів «склейки» сплайнів;

$$W = \begin{bmatrix} Z & \varnothing \\ \varnothing & P \\ Z & \tilde{P} \end{bmatrix},$$

Z, P – блоково-діагональні матриці планування, стовпцями яких є локальні функції форми сплайну ${}^k z(t)$, ${}^k p(t)$; $k = 1 \div 4$ [2].

Розмірність матриці W – $(3N*2s)$.

Класичний розв'язок МНК:

$$A = (W^T W)^{-1} W^T \tilde{R},$$

та $S_\imath = ZA_\imath$, $S_r = PA_r$ – сплайни, які побудовані вже з урахуванням аналітичного зв'язку між $\hat{r}_\imath(m)$ та $\hat{r}_r(m)$.

Наведемо приклади побудови запропонованої апроксимації. Нехай спостерігається гармонійний процес з амплітудою $A = 1$, випадковою початковою фазою φ, рівномірно розподіленою на інтервалі $[0; 2\pi]$, нормованою частотою $k = 4$, об'ємом вибірки $N = 10$:

$$y(n) = y_r(n) + jy_\imath(n) = A\exp\{j(\frac{2\pi}{N}knt + \varphi)\} + \eta_r(n) + j\eta_\imath(n), \quad n = \overline{0, N-1},$$

де $\eta_r(n), \eta_\imath(n)$ – дійсна та уявна складові гауссівського білого шуму з нульовим середнім та дисперсіями $V_r = V_\imath = 1$.

За формулою (1) знайдемо оцінку кореляційної функції $\hat{r}(m)$. Якісну сплайн-апроксимацію такої послідовності побудувати важко, через те що на десять відліків приходиться чотири коливання. Тому спочатку проведемо інтерполяцію даної оцінки, а потім по більшій кількості відліків розрахуємо апроксимуючі сплайни за класичним та запропонованим методами. На рис. 1 наведено інтерпольовану праву частину дійсної складової оціненої кореляційної функції. За рахунок наявності шуму вона значно відрізняється від ідеальної (побудованої в разі відсутності шуму). Класична сплайн-апроксимація (рис. 1, *а*) добре наближає вхідну послідовність, але ніякої нової інформації про процес не додає. Проте сплайн-апроксимація, побудована з урахуванням аналітичного зв'язку між уявною та дійсною складовими інтерпольованої оцінки кореляційної функції (рис. 1, *б*), навпаки зовсім не наближує цю вхідну послідовність, а відтворює функцію, подібну до ідеальної.

Цікаво прослідити за поведінкою сплайнів в разі відсутності корисної складової у вхідній послідовності ($A = 0$). На рис. 2 наведені приклади апроксимації оцінки кореляційної функції шуму. Як і в першому прикладі, класичний сплайн (рис. 2, *а*) добре наближує оцінку $\hat{R}_r$, але в

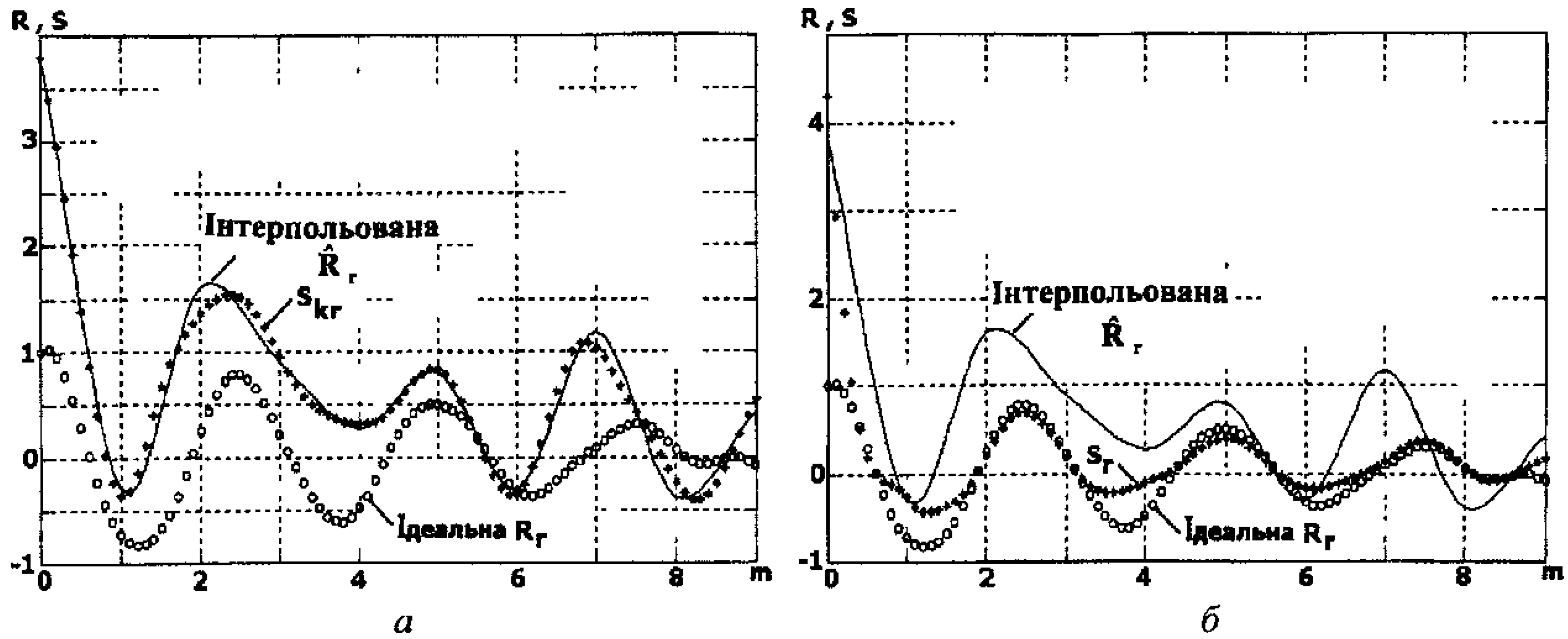

Рис. 1. Сплайн-апроксимації кореляційних послідовностей класичним S_{kr} (*а*) та запропонованим S_r (*б*) методами

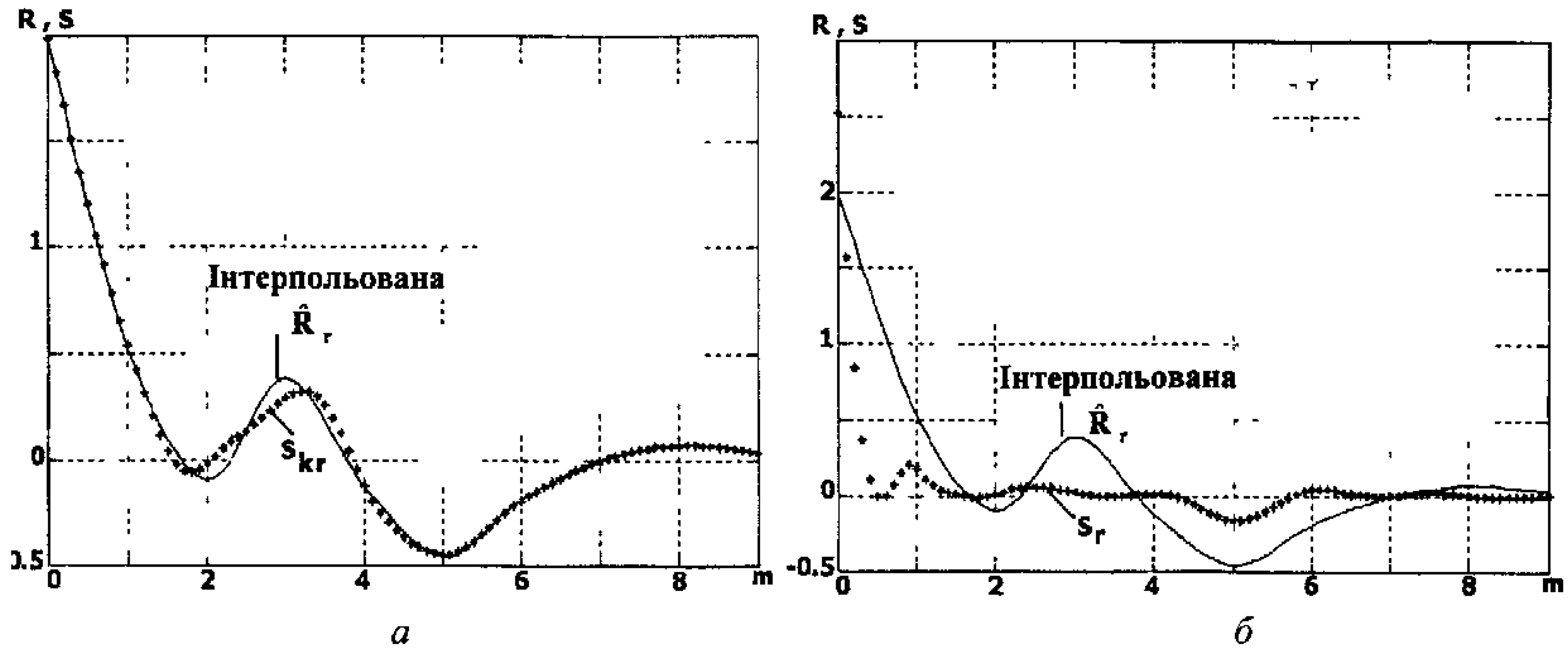

Рис. 2. Сплайн-апроксимації оцінки кореляційної функції шуму класичним S_{kr} (*а*) та запропонованим S_r (*б*) методами

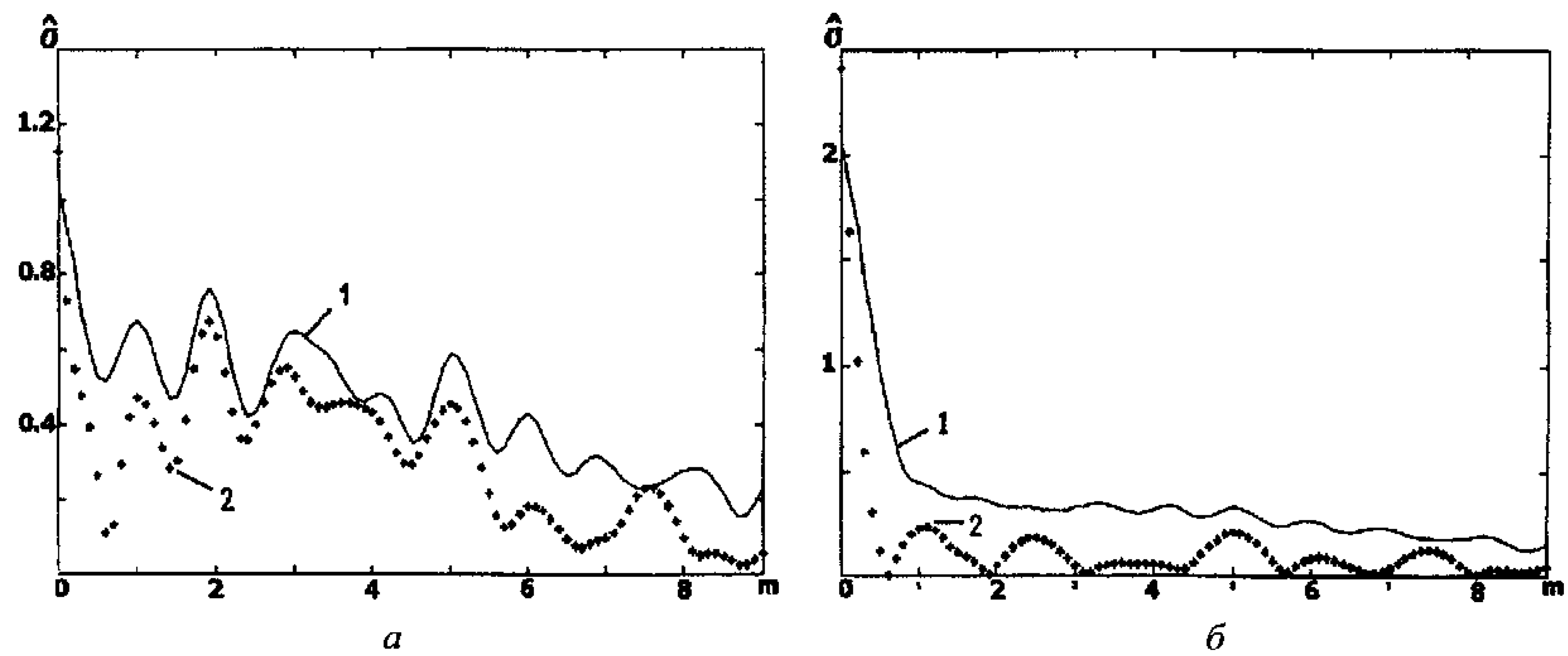

Рис. 3. Середньоквадратичне відхилення сплайнів, побудованих класичним (*1*) та запропонованим (*2*) методами відносно ідеальної (*а*) R_r ($A=1$), нуля $A=0$ (*б*)

цьому разі важко сказати про наявність чи відсутність корисної складової в сигналі, що спостерігається. Проте сплайн, побудований запропонованим методом (рис. 2, *б*), вказує на відсутність гармонійної складової в цьому сигналі.

В обох наведених прикладах для побудови апроксимації класичним та запропонованим методами матриці планування розраховувалися для однаково розташованих абсцис вузлів склейки сплайнів. Вузли підбиралися з умови якісного наближення класичним сплайном ідеальної кореляційної функції (див. рис. 1).

За допомогою математичного моделювання побудуємо графіки середньоквадратичних відхилень сплайнів відносно ідеальної R_r у випадку наявності гармонійної складової ($A = 1$) в сигналі, що спостерігається (рис. 3, *а*), та відносно нуля – у випадку відсутності гармонійної складової ($A = 0$) в цьому сигналі (рис. 3, *б*).

Кращі апроксимуючі властивості мають ті сплайни, середньоквадратичні відхилення яких наближуються до нуля. Винятком є точка $m = 0$ (рис. 3, *б*). Середньоквадратичні відхилення сплайнів відносно нуля в цій точці повинні наближуватися до 2, тому що $R_r(0) = V_r + V_t = 2$ при $A = 0$.

Таким чином, запропонований метод сплайн-апроксимації з урахуванням апріорно відомого аналітичного зв'язку між уявною та дійсною складовими кореляційної послідовності в цілому дозволяє більш якісно виділяти тренди цих послідовностей.

Список літератури

1. *Касьянов В.А., Шутко В.М., Шелевицький І.В.* Сплайн-апроксимація аналітично зв'язаних часових послідовностей // Вісн. КМУЦА. –К.: КМУЦА, 2001. – №4. – С. 117–120.

2. *Бойко И.Ф., Шелевицкий И.В., Шутко В.Н.* Рекурентный алгоритм построения сплайнов методом наименьших квадратов // Статистические методы обработки информации в авиационных радиоэлектронных системах: Сб.науч.тр. – К.: КМУГА, 1995. – С. 82–89.

Стаття надійшла до редакції 21.01.02.

УДК 519.21

В.Г. Капишон,
М.Т. Корнійчук, д-р техн. наук, проф.,
І.К. Совтус, канд. техн. наук, доц.,
В.Д. Тетерятник, доц.,
М.О. Шутко, д-р техн. наук, проф.

МОДЕЛІ ОПТИМІЗАЦІЇ ПОСЛІДОВНИХ СИСТЕМ ЗА КРИТЕРІЄМ УБЕЗПЕЧЕННЯ ВІД РИЗИКУ ВІДМОВ

Розглянуто метод оптимізації складних, послідовно зв'язних систем на етапі розробки та проектування за критерієм витрат на убезпечення від ризику відмов системи з урахуванням керування ризиком для можливості його зменшення. На основі розробленого модифікованого методу невизначених множників запропоновано метод і моделі, що дозволяють мінімізувати витрати на побудову системи заданої якості з допустимими рівнями ризику відмов.

Під складною системою розумітимемо класично означену систему, яка допускає технічне чи функціональне розбиття її на підсистеми, вузли чи елементи, жодному з яких не притаманні властивості, якими володіє система інтегрально. Під час розробки системи виникає проблема її оптимізації за різними показниками і, насамперед, оптимізації системи за критерієм ризику її відмов і критерієм її надійності при обмеженнях на економічні витрати на створення. В основу якості системи покладено, в першу чергу, певний припустимий рівень ризику її відмов або належний рівень її надійності. Цього можна досягти високою якістю комплектуючих матеріалів, сировини, найсучаснішим устаткуванням виробництва, наукоємними технологіями, що вимагає значних витрат