УДК 681.32(045)

А.Я. Білецький, д-р техн. наук, проф.,
О.А. Білецький

СИНТЕЗ КОДІВ ГРЕЯ

Наведено алгоритми і структурні схеми формування лівобічних і правобічних кодів Грея в двійковій і m-й системах числення.

Вступ і постановка задачі. Процес формування і передачі цифрової інформації (повідомлення) припускає перетворення сигналів у цифрові коди. У перетворювачах сигналів використовуються різні системи числення. Найбільше поширення отримали позиційні системи з позитивними цілими основами.

У зв'язку з переважним застосуванням у техніку обробки сигналів елементів цифрової електроніки часто використовуються коди, які базуються на двійковій системі числення. Поширення двійкової системи числення пов'язано з її загальновідомими перевагами у виконанні операцій додавання і множення, легкості подання двох стійких станів для зображення цифр 0 і 1 в одному розряді двійкового числа тощо. У той же час двійковій системі числення притаманна властивість, яка при технічній реалізації перетворювачів аналогових сигналів у цифрові коди може привести до специфічної помилки, називаною помилкою неоднозначності. Розглянемо приклад звичайного двійкового коду.

У двійковому коді при переході від зображення одного числа до зображення сусіднього старшого або сусіднього молодшого числа може відбуватися одночасна зміна цифр у декількох розрядах. Так, при переході від числа 7 (двійковий код 0111) до зображення числа 8 (1000) одночасно змінюються цифри у всіх чотирьох розрядах. Це може стати джерелом значних помилок при деяких методах кодування безупинних повідомлень у двійковий код [1].

Одним з ефективних засобів боротьби з помилкою неоднозначності є використання спеціальних кодів, що носять назву відбитих [2]. Найбільш розповсюдженим з відбитих кодів є двійковий відбитий код, на основі якого в 1953 р. Ф.Греєм був запропонований перетворювач кута у код [3]. Цей код часто називають кодом Грея, що не цілком обґрунтовано, тому що такий відбитий код був відомий і до пропозиції Грея. Зокрема, у роботі [4] вказується, що цей код був описаний у 1872 р. Гроссом у книзі з цікавої математики при викладі теорії гри «китайські кільця».

Класичний код Грея складається з цілих чисел у двійковому зображенні, розташованих у такому порядку, що сусідні елементи коду відрізняються тільки на значення одного розряду. Код будується починаючи з нуля, причому кожен наступний елемент коду виходить з попереднього зміною одного можливо більш низького розряду.

Основна задача складається в системному викладі не тільки відомих алгоритмів формування кодів Грея, але й у розробці нових варіантів кодування за схемами, подібними до схем формування класичних кодів Грея.

Двійкові коди Грея. Виклад матеріалу по кодах доцільно вести, спираючись на структурну схему формування коду. Такий підхід до пояснення суті алгоритму кодування зручний тим, що робить матеріал не тільки більш зрозумілим для інженерів, але й істотно спрощує задачу формального математичного опису процедури кодування.

Позначимо розряди числа, зображеного в позиційному коді, через x_{n-1}, $x_{n-2}, \ldots, x_1, x_0$ (старший розряд ліворуч), а розряди того ж числа, вираженого у відбитому коді (коді Грея), через $y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_1, y_0$, де n – число розрядів у кодових векторах $\vec{x}$ і $\vec{y}$. Обидві системи числення мають однакову двійкову основу.

Процес перетворення кодового вектора $\vec{x}$ у вектор $\vec{y}$ будемо називати прямим кодуванням за Греєм, а перетворення вектора $\vec{y}$ у вектор $\vec{x}$ – зворотним кодуванням за Греєм. Позначимо через КГ і ОКГ прямий і зворотний коди Грея відповідно.

Для двійкової системи числення правило перетворення вектора $\vec{x}$ у вектор $\vec{y}$ досить просте [2] і має вигляд:

$$y_i = x_i \overset{2}{\oplus} x_{i+1},\ i = \overline{0, n-1},\ x_n = 0, \tag{1}$$

де $\overset{2}{\oplus}$ – операція порозрядного додавання за модулем 2.

Структурна схема, яка відповідає алгоритму (1) формування класичного лівобічного коду Грея, показана на рис. 1, *а*.

Отже, для перетворення двійкового позиційного коду в двійковий код Грея (прямий лівобічний) необхідно знайти суму за модулем 2 однойменного і сусіднього старших розрядів позиційного коду. Для виконання такого перетворення найпростіше скласти двійковий код із самим собою, але зрушеним на один розряд вправо. У процесі формування прямого коду Грея для деякого позиційного двійкового числа виконується операція зсуву цього числа зліва направо. При цьому молодший розряд зсунутого числа втрачається, а сума знаходиться за модулем 2, тобто без врахування одиниць переносу.

При формуванні відбитого коду значення його старшого (лівого) розряду збігається зі значенням лівого розряду позиційного двійкового коду.

Правило формування зворотного лівобічного коду Грея, яке відповідає класичному ОКГ, має описовий характер [1] або є недостатньо зручним через необхідність виконання в деяких випадках двох операцій. Перша складається у відшуканні ознаки обертання коду γ_i за сумою старших розрядів позиційного коду, що визначається за виразом

$$\gamma_i = ((y_{i+1} + y_{i+2} + \ldots + y_{n-1}))_2,$$

де $((b))_m$ – значення числа b за модулем m або залишок від ділення b на m.

Після того, як ознаки γ_i знайдені, виконується друга операція, що і обертає відбитий код у позиційний за формулою

$$x_i = y_i \overset{2}{\oplus} \gamma_i,\ i = \overline{0, n-1}.$$

Незважаючи на те, що описаний алгоритм обертання відбитого двійкового коду Грея в позиційний двійковий код досить простий, складання структурної схеми зворотного кодування за Греєм викликає значні ускладнення. Дана задача може бути спрощена, якщо звернутися до рекурентного співвідношення [2] формування позиційного двійкового коду $\vec{x}$ по заданому відбитому коду $\vec{y}$:

$$x_i = \overset{n-1}{\underset{l=i}{\oplus}} \gamma_i,\ i = \overline{0, n-1}. \tag{2}$$

Правило (2) стає більш прозорим, якщо подати його як систему рівностей:

$$\begin{aligned} y_{n-1} &= x_{n-1}; \\ y_{n-2} &= y_{n-1} \overset{2}{\oplus} x_{n-2}; \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_1 &= y_2 \overset{2}{\oplus} x_1; \\ y_0 &= y_1 \overset{2}{\oplus} x_0. \end{aligned} \tag{3}$$

Система (3) призводить до структурної схеми (рис. 1, *б*), яка відповідає алгоритму формування класичного лівобічного зворотного коду Грея.

Зі структурної схеми, показаної на рис. 1, *б*, випливає, що процес формування класичного двійкового зворотного коду Грея виконується по напрямку зліва направо. З метою забезпечення подібності (по напрямку процесу перетворення) візьмемо за основу лівобічний напрямок формування для класичного прямого коду Грея. В обох процесах перетворення (прямому і зворотному) значення старших (лівих) розрядів перетворених кодів дорівнюють значенню відповідних розрядів вхідних кодів.

Приведемо у відповідність до напрямку процесу перетворення формули обертання двійкового позиційного коду у відбитий код і навпаки:

– для прямого лівобічного коду Грея

$$y_{n-1-j} = x_{n-j} \overset{2}{\oplus} x_{n-1-j},\ j = \overline{0,n-1},\ x_n = 0; \tag{4}$$

– для зворотного лівобічного коду Грея

$$x_{n-1-j} = y_{n-1-j} \overset{2}{\oplus} x_{n-j},\ j = \overline{0,n-1},\ x_n = 0. \tag{5}$$

Алгоритми перетворення позиційного двійкового коду у відбитий код за формулами (1) і (4) однаковою мірою, як і алгоритми перетворення відбитого двійкового коду в позиційний (див. формули (2), (5)), відповідають класичному трактуванню формування прямого і зворотного кодів Грея, досить добре вивчених і описаних. Але не була звернена увага на можливість генерації кодів, подібних класичному прямому і зворотному кодам Грея, процес формування яких відповідає перетворенню по напрямку від молодших розрядів коду до старших, тобто розвивається у напрямку справа наліво. Назвемо таке перетворення прямим і зворотним кодуванням за Греєм правобічним і введемо позначення: $\overleftarrow{\text{КГ}}$ і $\overleftarrow{\text{ОКГ}}$ для правобічних прямого і зворотного кодів Грея відповідно.

Нескладно скласти структурну схему перетворення кодів, яка відповідає алгоритму формування прямого правобічного коду Грея (рис. 1, *в*).

Компоненти y_j кодового вектора $\vec{y}$ утворяться за правилом

$$y_j = x_j \overset{2}{\oplus} x_{j-1},\ j = \overline{0,n-1}, x_{-1} = 0. \tag{6}$$

Структурна схема алгоритму формування зворотного двійкового правобічного коду Грея інверсна схемі, показаної на рис. 1, *б*, наведена на рис. 1, *г*.

Компоненти x_j кодового вектора $\vec{x}$ формуються за правилом

$$x_j = y_j \overset{2}{\oplus} x_{j-1},\ j = \overline{0,n-1},\ x_{-1} = 0. \tag{7}$$

Відповідно до співвідношень (6), (7) і рис. 1, *в*, *г* молодший (правий) розряд перетвореного коду зберігає значення молодшого розряду коду, що перетворюється за визначенням правобічного коду Грея.

М-і коди Грея. Перетворення за Греєм (прямому і зворотному лівобічному і правобічному) можна виконувати не тільки на множині двійкових чисел, але і на множині чисел з будь-якою основою системи числення.

У структурних схемах алгоритмів прямого перетворення за Греєм як лівобічного (рис. 1, *а*), так і правобічного (рис. 1, *в*) при переході до *m*-ї системи числення досить замінити порозрядний суматор за модулем 2 на порозрядний суматор за модулем *m* (рис. 2, *а*, *б*).

Компоненти y_i кодового вектора $\vec{y}$ (рис. 2, *а*) визначаються за формулою

$$y_{n-1-j} = x_{n-j} \overset{m}{\oplus} x_{n-1-j},\ j = \overline{0,n-1},\ x_n = 0, \tag{8}$$

де $\overset{m}{\oplus}$ – операція порозрядного додавання за модулем *m*.

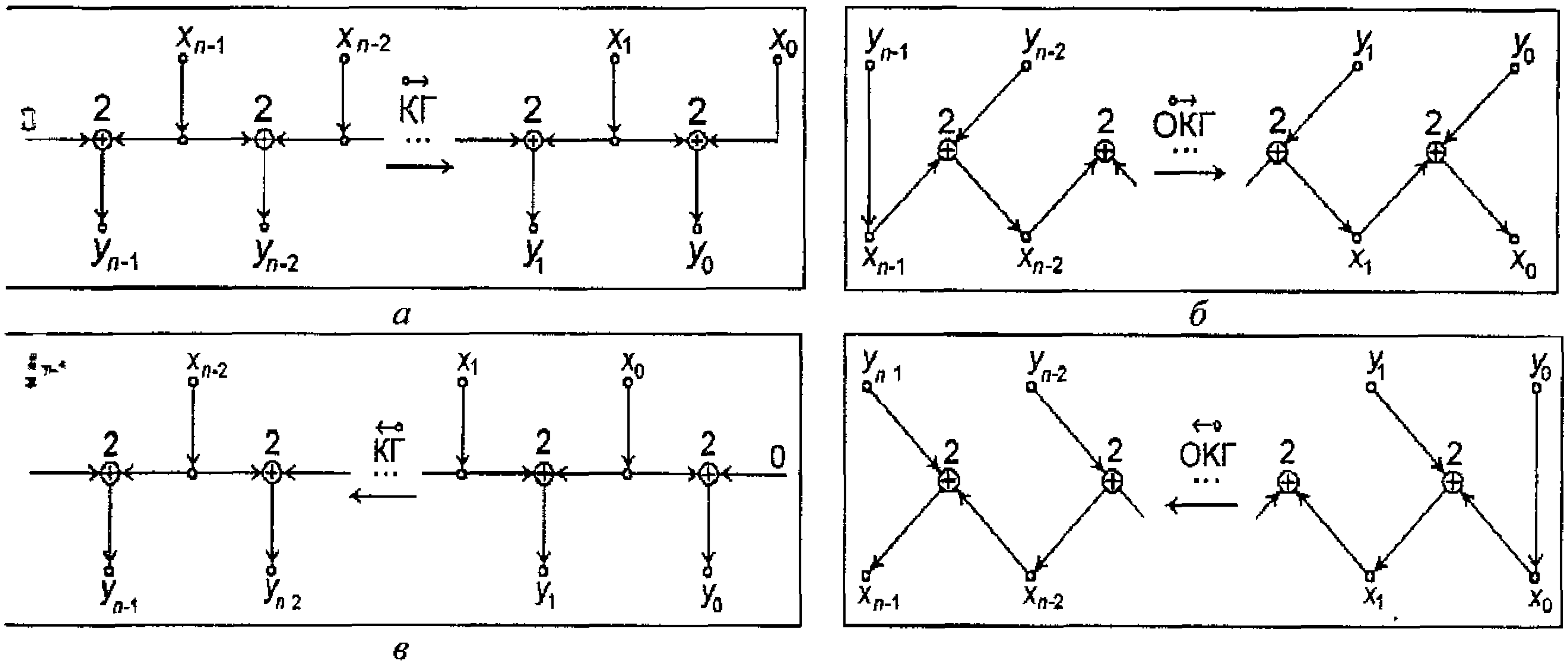

Рис. 1 Структурна схема алгоритму формування двійкового коду Грея - лівобічного прямого *(а)* і зворотного (*б*), правобічного прямого *(в)* і зворотного (*г*)

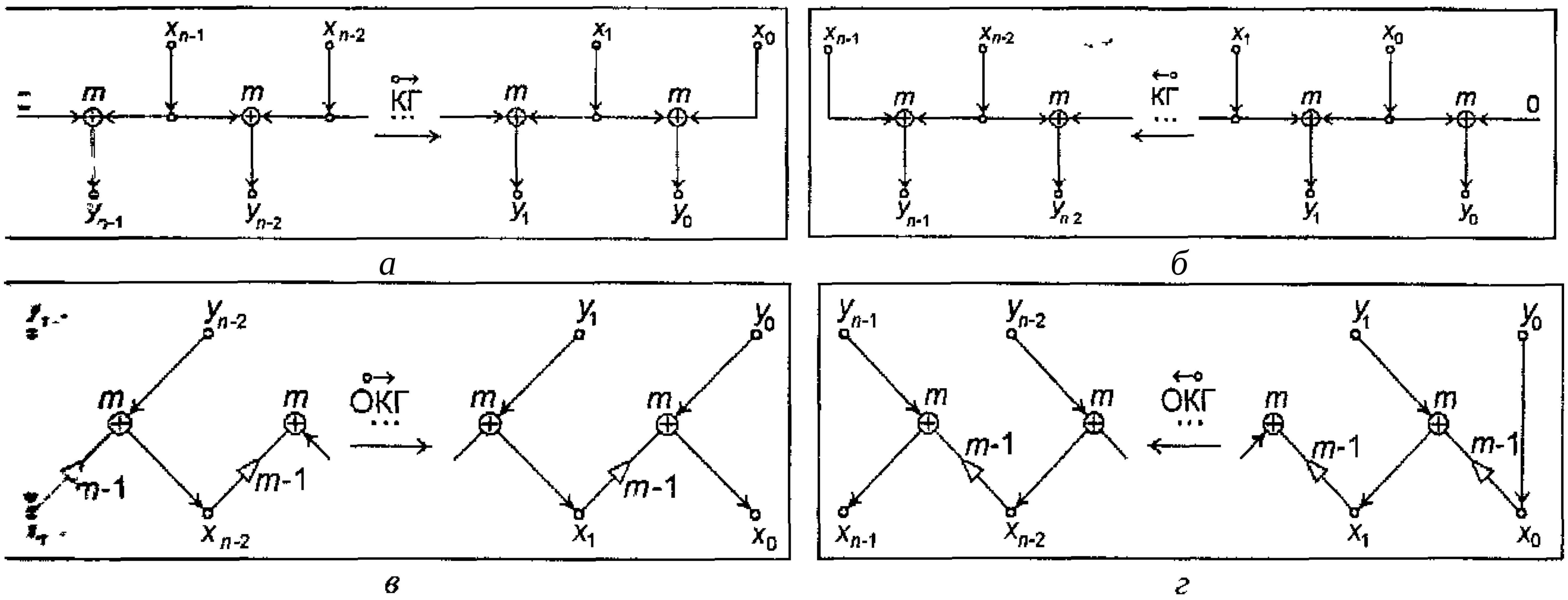

Рис. 2. Структурна схема алгоритму формування *m*-го коду Грея – прямого лівобічного (*а*) і правобічного (б), зворотного лівобічного (в) і правобічного (г)

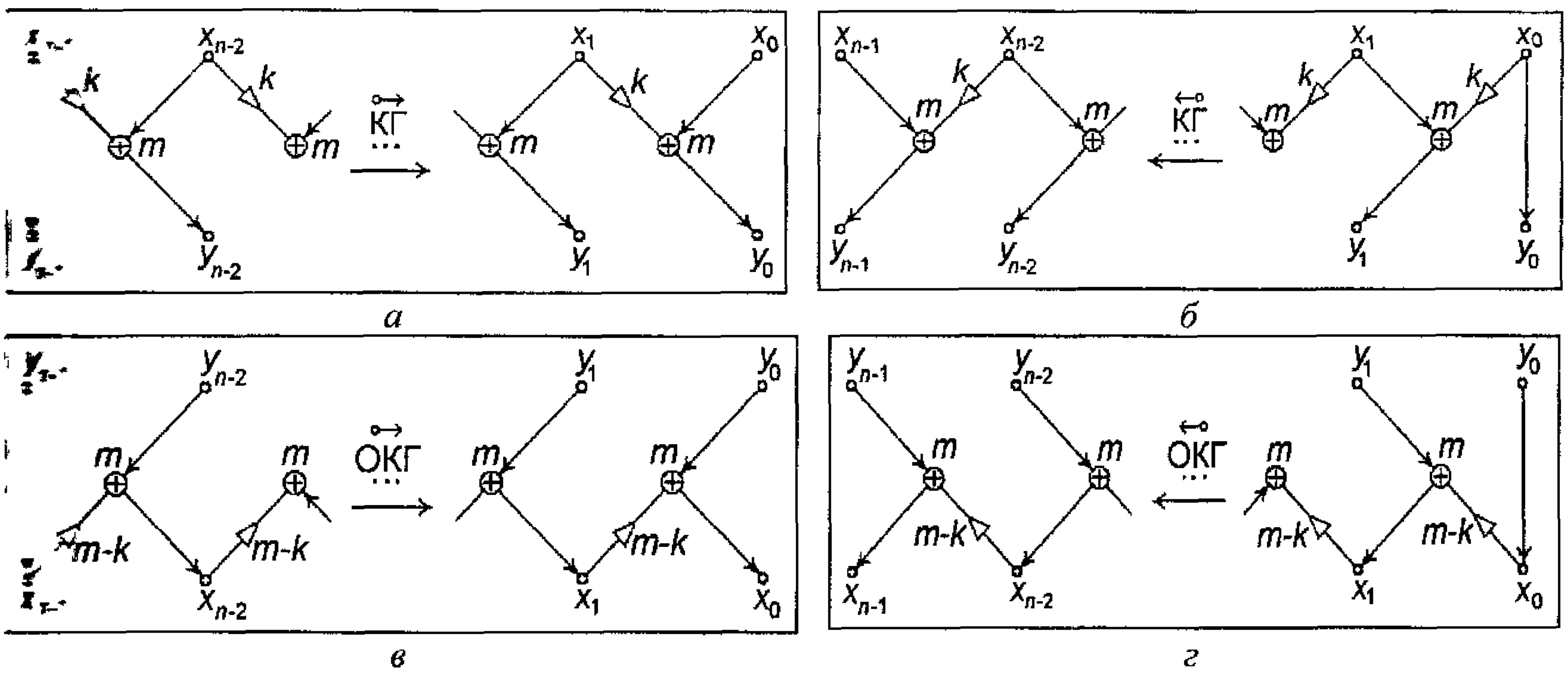

Рис. 3 Структурна схема алгоритму формування узагальненого т-го коду Грея - прямого лівобічного (а) і правобічного (б), зворотного лівобічного (є) і правобічного (г)

Алгоритм обчислення узагальненого прямого правобічного коду Грея відображений на рис. 3, *б*.

Кодові компоненти y_i визначаються за формулою

$$y_j = x_j \overset{m}{\oplus} kx_{j-1},\ j = \overline{0, n-1},\ x_{-1} = 0. \tag{13}$$

Співвідношення (12) і (13) подібні до формул (7) і (8) і відрізняються від них лише наявністю множника *k*, який стоїть перед лівим і правим операндами суматора відповідно.

Нетрудно скласти структурні схеми алгоритмів обчислення зворотних узагальнених кодів Грея. На підставі схеми, показаної на рис. 2, *в*, приходимо до реалізації алгоритму обчислення узагальненого зворотного лівобічного коду Грея (рис. 3, *в*).

Із зіставлення рис. 2, *в* і 3, *в* випливає, що в алгоритмі формування узагальненого *m*-го зворотного лівобічного коду Грея заміна множника $m-1$, що використовується в простому *m*-му зворотному лівобічному коді Грея, на множник $m-k$, що призводить до такого алгебричного виразу для компонентів x_i вихідного вектора $\vec{x}$:

$$x_{n-1-j} = y_{n-1-j} \overset{m}{\oplus} (m-k)x_{n-j},\ j = \overline{0, n-1},\ x_n = 0. \tag{14}$$

Аналогічно приходимо до схемної реалізації узагальненого *m*-го зворотного правобічного коду Грея (рис. 3, *г*).

Аналітичний вираз для компонентів x_i кодового вектора $\vec{x}$ алгоритму перетворення, показаного на рис. 3, *г*, має вигляд:

$$x_j = y_j \overset{m}{\oplus} (m-k)x_{j-1},\ j = \overline{0, n-1},\ x_{-1} = 0. \tag{15}$$

Співвідношення (14) і (15) подібні до формул (10) і (11) і відрізняються від них лише значенням множника для операнда чисел позиційної системи числення, тобто множник $m-1$ заміняється множником $m-k$.

Висновок. Дослідження розглянутих математичних моделей і структурних схем алгоритмів формування відомих (класичних) кодів Грея в *m*-й системі числення, а також запропоновані нові, інверсні до класичних кодів правобічні коди Грея можуть бути основою для подальшого синтезу й аналізу перешкодостійких кодів Грея. З уведених узагальнених кодів Грея лівобічні (класичні) і правобічні коди Грея отримуються як окремий випадок узагальнених кодів.

Список літератури

1. *Кодирование* информации / Н.Г. Березюк, А.Г. Андрущенко, С.С. Мощицкий и др. – Харьков: Вища шк., 1978. – 252 с.

2. *Гитис Э.И.* Преобразователи информации для элементарных цифровых вычислительных устройств. – М.: Энергия, 1970. – 399 с.

3. *Gray F.* Pulse code communication. – Pat USA, № 2632058, 1953.

4. *O'Beirne* T.H. Gray or Gross? // Computer J.– 1959. – 2, № 2.

Стаття надійшла до редакції 11.03.02.