

УДК 532.528.+539.4

<sup>1</sup>В.В. Астанін, д-р техн. наук  
<sup>2</sup>П.П. Лепіхін, д-р фіз.-мат. наук  
<sup>3</sup>В.Г. Корбач, канд. техн. наук  
<sup>4</sup>В.М. Сторожук

## АНАЛІЗ ВЕЛИКИХ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ ЕЛІПТИЧНИХ ПЛАСТИН ПРИ КВАЗІСТАТИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

<sup>1</sup>НАУ, кафедра механіки  
 E-mail: astanin@nau.edu.ua  
<sup>2,4</sup>Інститут проблем міцності імені Г.С. Писаренка НАН України  
 E-mail: lepikhin@ipp.kiev.ua  
<sup>3</sup>Київське державне конструкторське бюро «Луч»  
 E-mail: kvg@luch.kiev.ua

*Виконано порівняння отриманих на основі енергетичного підходу аналітичних співвідношень для визначення великих прогинів центральної точки еліптичних пластин при гідростатичному видавлюванні з результатами числових розрахунків і відомих експериментів. Досліджено вплив геометрії на прогини еліптичних пластин з пружно-пластичних матеріалів, що зміцнюються.*

*The accuracy of earlier obtained energy-approach-based analytical relations for sagging prediction of the central point of elliptical plate subjected to hydrostatical indentation has been determined by comparison with the results of numerical calculations and known experiments. The influence of geometry on the sagging of elliptical plates made of elastoplastic strengthening materials has been investigated.*

### Постановка проблеми

У листовій штамповці як критерій руйнування широко застосовують діаграми граничної формозміни [1; 2], експериментальне одержання яких у ряді випадків проводиться за допомогою гідравлічного видавлювання пластин через матриці з еліптичними отворами.

Гідравлічне видавлювання еліптичних пластин використовують під час дослідження двовісного пружно-пластичного деформування листових матеріалів при різних співвідношеннях головних деформацій.

### Аналіз досліджень і публікацій

Теоретичних та експериментальних досліджень гідравлічного видавлювання пружно-пластичних еліптичних пластин при великих прогинах дуже мало.

У праці [3] розглянуто експериментальне дослідження деформування тиском сталевих еліптичних пластин різного ступеня еліпсності.

Залежність між інтенсивностями напружень  $\sigma_i$  і деформацій  $\varepsilon_i$  таких матеріалів має вигляд

$$\sigma_i = F(\varepsilon_i) = A\varepsilon_i^m, \quad (1)$$

де  $A$ ,  $m$  – сталі матеріалу:

$A = 588$  МПа;

$m = 0,28$ .

У праці [3] досліджувалися такі геометричні характеристики:

– велика піввісь еліпса

$$a = 0,1 \text{ м};$$

– мала піввісь

$$b = 0,0375 \text{ м};$$

$$b = 0,05 \text{ м};$$

$$b = 0,075 \text{ м};$$

$$b = 0,1 \text{ м};$$

– товщина пластини

$$h_0 = 0,82 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Числовою та експериментальному визначенню квазістатичного деформування пружно-пластичних еліптичних пластин з двома ступенями еліпсності, які навантажені гідродаром, присвячено працю [4], де було виконано порівняння числових результатів з даними експериментів для мідних пластин однакової товщини.

Аналітичні залежності для великих прогинів статично навантажених еліптичних пластин, що зміцнюються, вперше були отримані авторами праці [5], де розглянута нерухомо закріплена вздовж контуру еліптична пластина, навантажена статичним рівномірно розподіленим тиском, та показано відповідність отриманих теоретичних результатів і даних експериментів, наведених у працях [3; 4].

**Мета** цієї роботи – визначити точність аналітичних залежностей [5] та дослідити вплив геометрії на прогини центральної точки еліптичних пластин із пружно-пластичних матеріалів, що зміцнюються, порівняно з числовими результатами, які отримано з використанням програми LS-Dyna [6].

### Матеріали дослідження

Під час побудови аналітичних співвідношень у праці [5] прийнято припущення (рис. 1), що прогин центральної точки пластини  $w_0$  задовольняє нерівності

$$w_0 > 5h_0,$$

де  $h_0$  – початкова товщина пластини.

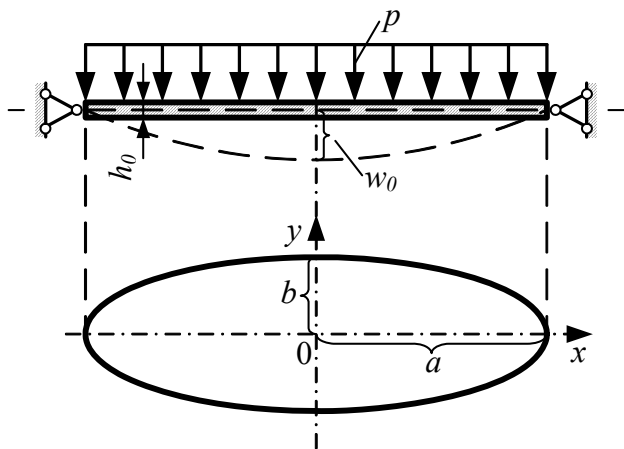


Рис. 1. Розрахункова схема пластини

Оскільки при великих прогинах головну роль у напружено-деформованому стані відіграють мембранні зусилля, то з достатнім ступенем точності її можна розглядати як мембрану, що дозволяє використовувати безмоментну теорію при визначенні кінцевого прогину та мембранне наближення.

Згідно з енергетичним методом, урахується робота зовнішніх сил внутрішньої пружної потенційної енергії пластини та пластичного деформування.

Деформований стан мембрани описаний поверхнею еліптичного параболоїда:

$$w(x, y) = w_0 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right),$$

де  $w$  – прогин у довільній точці серединної поверхні мембрани.

Інтенсивність деформацій пластини  $\varepsilon_i$  дорівнює півсумі інтенсивностей деформацій у центрі  $\varepsilon_{ic}$  і на нерухомому контурі  $\varepsilon_{ik}$  пластини:

$$\varepsilon_i = \frac{\varepsilon_{ic} + \varepsilon_{ik}}{2}.$$

Нехай поточна товщина мембрани не залежить від координат, матеріал нестисливий. Розв'язок задачі, що поданий у безрозмірних змінних величинах

$$q = \frac{P\sqrt{ab}}{Eh_0};$$

$$\hat{O}(\varepsilon_i) = \frac{F(\varepsilon_i)}{E}; \quad (2)$$

$$\eta = \frac{w_0^2}{ab},$$

де  $E$  – модуль Юнга,

має вигляд [5]:

$$\left. \begin{aligned} q &= 4\sqrt{\eta} (A_1 B_1 + A_2 B_2) \hat{O}(\varepsilon_i); \\ A_1 &= \frac{[\lambda^3(1+\theta) + \lambda - 2 + \sqrt{\lambda}(\lambda^2 + 2\lambda - 3)]}{8\lambda^3 R + (\lambda^2 + 1)/2\lambda^2 \sqrt{3}}; \\ A_2 &= \lambda/8R; \\ B_1 &= [1 + (2C\eta - 1)\sqrt{1 + 4C\eta}]/6C\eta^2; \\ B_2 &= 128(C^2 - 1)\eta/(3 + \eta)^3; \\ R &= \sqrt{\left[ \frac{(\lambda - 1)(\sqrt{\lambda} + 1)}{\lambda} \right]^2 + \lambda\theta}; \\ \theta &= \frac{64}{3}(C^2 - 1)[\eta/(3 + \eta)]^2; \\ \lambda &= [(1 + 4C\eta)^{3/2} - 1]/6C\eta; \\ C &= (a^2 + b^2)/2ab; \\ \varepsilon_i &= R/4 + (\lambda^2 - 1)/2\lambda\sqrt{3}; \end{aligned} \right\} (3)$$

Під час розрахунку прогину розглядали сталеві пластини з геометричними характеристиками, наведеними в праці [3] та пластини з товщинами  $2h_0, 3h_0, 4h_0$ .

Модуль Юнга матеріалу  $E$  дорівнював  $1,96 \cdot 10^5$  МПа.

Графіки залежності прогину центральної точки пластини від її товщини і тиску, які отримано з використанням формул (2), (3), показано на рис. 2.

Прогини центральної точки пластини розраховували за допомогою програми LS-Dyna (версія 950 у складі вільно розповсюдженого обчислювального комплексу Ansys/ED), яка базується на методі скінченних елементів і призначена для розв'язання тривимірних динамічних нелінійних задач механіки деформівного твердого тіла.

Кількість скінченних елементів становила 800 (розглядалася 1/4 частина еліпса з відповідними граничними умовами).

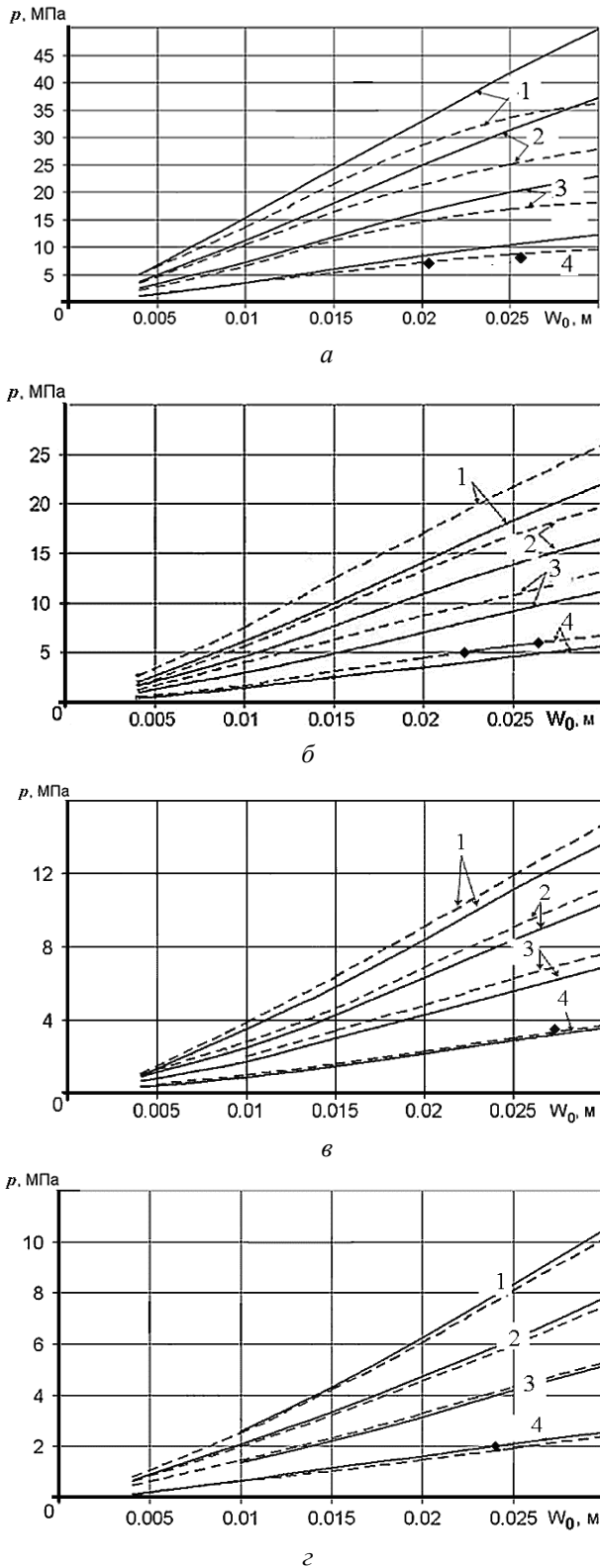


Рис. 2. Залежності прогинів центральної точки пластини  $w_0$  від тиску на її поверхні для різних ступенів еліпсності та товщини:  
 $a - b/a = 0,375$ ;  $б - b/a = 0,5$ ;  $в - b/a = 0,75$ ;  $г - b/a = 1,0$ ;  
 $1 - 4h_0$ ;  $2 - 3h_0$ ;  $3 - 2h_0$ ;  $4 - h_0$ ;  $h_0 = 0,82 \cdot 10^{-3}$ ;  
 — розрахунок за формулами (2), (3);  
 - - - розрахунок за допомогою програми LS-Dyna;  
 ♦ експериментальні значення

Тиск на пластину змінювався в часі за лінійним законом зі швидкістю зростання 200 МПа/с, що, як показали числові експерименти, відповідає квазістатичному навантаженню.

Під час проведення тестових розрахунків з використанням програми LS-Dyna прийнята моментна теорія оболонок Belytschko-Tsay [6], а залежність напружень від деформацій апроксимувалася виразом (1).

У праці [3] закріплення пластини на контурі було визначено як жорстке.

Під час проведення числових експериментів з встановлення типу граничних умов на контурі пластини, що найбільш точно відповідають наведеним експериментальним даним, було досліджено:

- жорстке защемлення (на контурі пластини переміщення і кути повороту відсутні);
- шарнірне обпирання контуру (відсутні тільки переміщення);
- контакт для системи «матриця–пластина» з різними радіусами заокруглення граней матриці, що беруть участь у формуванні тонкостінної оболонки.

Максимальний прогин центральної точки пластини був отриманий для всіх досліджених розрахункових схем. Для подальших розрахунків було взято шарнірне обпирання контуру.

Для еліптичних пластин товщиною  $h_0 = 0,82 \cdot 10^{-3}$  м на рис. 2 показано експериментальні значення прогинів у центрі пластини, отримані в праці [3], що з похибкою, яка не перевищує 2 %, відповідають значенням прогинів, обчислених за допомогою програми LS-Dyna. Це свідчить про можливість використання обчислених за допомогою програми LS-Dyna значень прогинів як еталонних для оцінки точності формул (2), (3).

Для еліптичної пластини зі співвідношенням півосей  $b/a = 0,375$  і товщиною  $4h_0$  на рис. 3 зображено порівняння результатів розрахунку з використанням програми LS-Dyna і формул (2), (3) для малих прогинів.

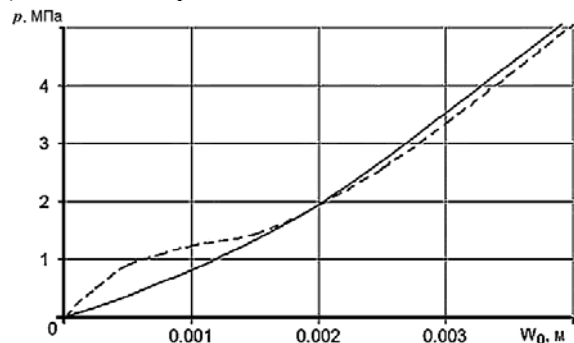


Рис. 3. Малі прогини центральної точки пластини:  
 - - - розрахунок за допомогою програми LS-Dyna;  
 — розрахунок за формулами (2), (3)

Помітна розбіжність результатів спостерігається в області  $w_0 < 1,5h_0$ .

### Висновки

1. Для всіх розглянутих еліптичних пластин у разі виконання умови  $w_0 > 5h_0$  зі збільшенням прогину пластини похибка аналітичних залежностей зростає. При цьому вона не перевищує 10 % до прогину, що менший за 0,02 м.
2. Формули (2), (3) більш точно описують прогини пластин малої товщини і дають більшу похибку при збільшенні товщини пластин.
3. Для круглих пластин ( $b/a = 1,0$ ) наведені формули однаково точно описують прогини як тонких, так і товстих пластин.
4. Точність обчислення прогинів за формулами, тим вище, чим ближче обрис пластини до кола.
5. Зазначена в праці [5] умова  $w_0 > 5h_0$  не є строгим обмеженням знизу області застосування наведених розрахункових формул, що видно з рис. 3.
6. Застосування формул (2),(3) в області великих деформацій обмежено значеннями прогинів, за яких відбувається руйнування пластин.

7. Порівняння результатів обчислень за формулами (2), (3) з даними експериментів [3; 4] і розрахунками, проведеними з застосуванням програми LS-Dyna, показало, що отримані в праці [5] формули можуть бути використані для інженерних розрахунків прогинів центральної точки еліптичних та круглих пластин.

### Література

1. *Perce R. A.* User's guide to forming limit diagrams// Sheet Metal Ind. – 1971. – 48, N12. – P. 943–949.
2. *William F. Hosford, Robert M. Cadell.* Metal forming mechanics and metallurgy, second edition. – Englewood, PTR Prentice-Hall Inc, 1993 – 467 p.
3. *Головлев В.Д.* Об особенностях металла к глубокой вытяжке // Новые процессы обработки металлов давлением. – М.: АН СССР, 1968. – С. 135–143.
4. *Ромащенко В.А., Сторожук В.Н.* Метод исследования неосесимметричного динамического формоизменения разрушаемых оболочек. Сообщение 2. Расчеты и эксперимент // Пробл. прочности. – 1996. – №4. – С. 41–48.
5. *Ромащенко В.А., Сторожук В.Н.* Аналитический расчет сильного формоизменения первоначально эллиптических пластин // Пробл. прочности. – 2002. – №1. – С. 78–87.
6. *Hallquist J.O.* LS-Dyna theoretical manual, version 950, livermore software technology corporation, 1999.

Стаття надійшла до редакції 04.04.06.