ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 621.386.64

В.В. Куліш, д-р фіз.-мат. наук
І.В. Губанов, канд. фіз.-мат. наук
Г.Є. Марінченко, канд. фіз.-мат. наук
А.Ю. Бруснік

ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ ЕН-ОНДУЛЯТОРНИХ ІНДУКЦІЙНИХ ПРИСКОРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ

НАУ, кафедра теоретичної фізики, e-mail: gubanov@gala.net

Побудовано універсальну теоретичну модель, у рамках якої можливий кількісний опис ЕН-прискорювачів і споріднених пристроїв на їхній основі (ЕН-систем). Опис такої універсальної моделі можна здійснювати в теорії ієрархічних коливань і хвиль. Для розв'язання нелінійних задач теорії ЕН-систем запропоновано використовувати ієрархічну версію методу Боголюбова, метод усередненого рівняння для густини струму та метод ієрархічного перетворення координат.

Вступ

ЕН-прискорювальні системи [1] відрізняються великою різноманітністю можливих моделей і фізичних ситуацій, що можуть бути реалізованими на практиці.

Наприклад, розрізняють стаціонарні і нестаціонарні моделі з лінійно, циркулярно й еліптично поляризованими ЕН-полями, моделі ЕН-прискорювачів, ЕН-формувачів, ЕН-охолоджувачів і лазерів на вільних електронах (ЛВЕ) з ЕН-накачкою тощо [1–6].

З фізичного погляду всі відомі ЕН-системи характеризуються явно вираженою спільністю базових робочих механізмів. Це дає надію на те, що, якщо і не для всіх, то принаймні для переважної більшості ЕН-систем можна розробити універсальний теоретичний підхід.

Основна **мета** цієї роботи – розробити універсальну модель та сформувати концептуальні підходи до її вивчення.

Модель такого класу дійсно може бути побудовано, а відповідний універсальний підхід може бути ефективний на практиці.

Універсальна теоретична модель

Сформулюємо перелік основних властивостей ЕН-систем, що мають бути враховані в рамках універсальної теоретичної моделі.

Насамперед, відзначаємо, що згідно з викладеним у праці [1] матеріалом, траєкторія руху заряджених частинок у робочому об'ємі прискорювального каналу ЕН-прискорювача у загальному випадку повинна вважатися тривимірною.

Відповідно і модель повинна бути тривимірною. Принципова особливість всіх без винятку ЕН-прискорювачів – ондуляторна природа траєкторій частинок, що прискорюються [7].

Причому формуватися такого сорту траєкторії можуть як ондуляторними, так і неондуляторними електромагнітними полями різної конфігурації [8].

Через специфіку базового робочого механізму ЕН-прискорювачів [1] усі ондуляторні поля повинні характеризуватись значною кількістю просторових ондуляцій (періодів коливань, осциляцій) на робочій довжині системи.

З фізичних міркувань ці осциляції можемо вважати швидкими.

На тлі цих швидких просторових коливань (ондуляцій) неондуляторні поля, як правило, виявляються повільно змінними в часі і координатах. Формально це означає, що за період одного швидкого коливання (ондуляції) кількісні характеристики повільних полів (індукції повздовжнього магнітного поля, напруженості електричного поля) змінюються несуттєво. При цьому помітні зміни зазначених характеристик спостерігаються лише за велику кількість коливань. Самі ж ондуляції реально можуть бути як періодичними, так і неперіодичними.

Періодичні поля, у свою чергу, можуть мати як гармонічну, так і негармонічну природу. Причому, як було продемонстровано в праці [1], можливі ситуації з використанням як залежних, так і незалежних методів генерації вихрового електричного і магнітного полів.

Отже, в загальному випадку всі електромагнітні поля у нашій моделі (як задані, так і генеровані) можуть бути умовно розбиті на дві частини:

– ондуляторні, що є швидкозмінними в часі та просторі;

– неондуляторні що, є повільно змінними.

Однак, як відзначалося в праці [7], у будь-якому разі траєкторія руху частинки має ондуляторний характер.

Постановка завдання

Усі зазначені властивості ЕН-систем можуть бути формально враховані для полів:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = Q_{e0}(\vec{r},t)\vec{E}_0(\vec{r},t) + \frac{1}{2}\sum_j Q_{ej}(\vec{r},t)\times$$

$$\times\left\{\vec{E}_j(\vec{r},t)\exp\left[im_j p_j(\vec{r},t)\right] + c.c\right\};$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = Q_{m0}(\vec{r},t)\vec{B}_0(\vec{r},t) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_l Q_{ml}(\vec{r},t)\left\{\vec{B}_l(\vec{r},t)\exp im_l p_l(\vec{r},t) + c.c.\right\}, \quad (1)$$

де $\vec{E}$, $\vec{B}$ – напруженість електричного та індукція магнітного полів відповідно; $Q_{ej,0}(\vec{r},t)$, $Q_{ml,0}(\vec{r},t)$ – просторово-часові оператори «включення–виключення» електричного і магнітного полів; $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ – аналогічні характеристики «глад- ких» (тобто, не осцилюючих) полів; $\vec{E}_j$, $\vec{B}_l$ – комплексні амплітуди; $p_{j,l}$ – фази осциляцій полів; m_i, m_j – цілі числа (m_j, $m_l = \pm1, \pm2, ...$).

У найпростішому випадку просторово-часовими операторами «включення–виключення» електричного і магнітного полів можуть бути, наприклад, оператори типу функції Хевісайда або інші аналогічні їм за змістом.

Серед осцилюючих полів (1) розрізняємо:

– періодичні;
– умовно-періодичні;
– майже періодичні;
– нерегулярні.

Періодичні осцилюючі поля реалізуються, коли обидва оператори «включення–виключення» Q_{ej}, Q_{ml} завжди дорівнюють одиниці, амплітуди $\vec{E}_j$, $\vec{B}_l$ – константи, фази $p_{j,l}$ – лінійні функції координат і часу:

$$p_q = \omega_q t - \vec{k}_q \vec{r}, \qquad q = l, j, \quad (2)$$

де ω_q – циклічні частоти; k_q – хвильові вектори; t – лабораторний час; $\vec{r}$ – просторова координата.

Умовно-періодичними називаємо поля, що є періодичними на інтервалах, "дозволених" операторами "включення–виключення" Q_{ej}, Q_{ml}.

До майже періодичних належать осцилюючі поля (періодичні та умовно-періодичні), що в загальному випадку характеризуються повільнозмінними (у масштабі періоду) амплітудами $\vec{E}_j$, $\vec{B}_l$, частотами ω_q і хвильовими векторами k_q.

У випадку нерегулярно осцилюючих полів (нерегулярних полів) усі залежності розмірів $\vec{E}_j(\vec{r},t)$, $\vec{B}_l(\vec{r},t)$, $\omega_q(\vec{r},t)$, $k_q(\vec{r},t)$ виявляються швидкими в масштабі деякого характерного інтервалу осциляцій, тобто в цьому разі маємо справу з тільки неперіодичними осциляціями.

Фази (2) при цьому можуть бути перевизначені в більш загальній формі:

$$p_q = \int_0^t \omega_q(\vec{r},t)dt - \int_0^{\vec{r}} \vec{k}_q(\vec{r},t)d\vec{r}. \quad (3)$$

Терміни «ондуляторні» і «хвильові» поля можна вважати «синонімами». Однак для зручності під квазістаціонарними ондуляторними розуміємо такі хвильові поля, всі осциляторні та інші залежності від часу яких носять повільний характер. Усі осциляторні залежності за просторовими координатами є швидкими. У випадку хвильових полів комплексні амплітуди, частоти і хвильові числа вважаємо константами, або ж повільнозмінними функціями координат $\vec{r}$ і часу t. Це означає, що моделі з істотно нерегулярними хвилями, в цій роботі не розглядаються.

Вихідні рівняння

У даному циклі робіт ми будемо мати справу з пучками заряджених частинок двох типів [9]:

– малої інтенсивності;
– великої інтенсивності.

До пучків малої інтенсивності належать пучки, в яких інтенсивність взаємодії частинок із зовнішніми полями помітно переважає над інтенсивністю взаємодії частинок між собою. Такі пучки можна вважати потоками практично невзаємодіючих між собою частинок і відповідно використовувати стосовно до них лагранжів метод опису.

Для опису кожної окремої частинки використовуємо або рівняння Гамільтона:

$$\frac{d\mathsf{H}_\alpha}{dt} = \frac{\partial \mathsf{H}_\alpha}{\partial t}; \ \frac{d\vec{\mathsf{P}}_\alpha}{dt} = -\frac{\partial \mathsf{H}_\alpha}{\partial \vec{r}}; \ \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \mathsf{H}_\alpha}{\partial \vec{\mathsf{P}}_\alpha}, \quad (4)$$

або рівняння Лоренца:

$$\frac{d\vec{\beta}_\alpha}{dt} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha \gamma_\alpha c}\left\{\vec{E} + \left[\vec{\beta}_\alpha \vec{B}\right] - \vec{\beta}_\alpha\left(\vec{\beta}_\alpha \vec{E}\right)\right\}. \quad (5)$$

де H_α – гамільтоніан частинки сорту α в електромагнітному полі:

$$\mathsf{H}_\alpha = \sqrt{m_\alpha^2 c^4 + c^2\left(\vec{\mathsf{P}}_\alpha - \frac{q_\alpha}{c}\vec{A}\right)^2} + q_\alpha \varphi \ q_\alpha;$$

m_α – маса спокою частинки сорту α; $\vec{P}_\alpha$ – канонічний імпульс; q_α – величина заряду ($q_\alpha = -e$ у випадку електрона і $q_\alpha = +Ze$ у випадку іона); $\vec{A}$ – вектор-потенціал; φ – скалярний потенціал, який пов'язаний з напруженістю й індукцією електромагнітного поля (1) відомими співвідношеннями [10]; $\beta_\alpha = \left|\vec{\beta}_\alpha\right|$ – безрозмірна швидкість α-ї частинки; $\vec{\beta}_\alpha = \vec{\upsilon}_\alpha / c$; $\vec{\upsilon}_\alpha$ – лагранжева швидкість; $\gamma_\alpha = \left(1-\beta_\alpha^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ – релятивістський фактор;. $\vec{r}_\alpha$ – радіус-вектор частинки сорту α.

Для опису інтенсивних пучків використовуємо квазігідродинамічне рівняння руху (ейлерів опис) [9]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}_\alpha\frac{\partial}{\partial\vec{r}}+\frac{\nu}{\gamma^2}\right)\vec{u}_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha\gamma_\alpha}\left\{\vec{E}+\frac{1}{c}\left[\vec{u}_\alpha\vec{B}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\vec{u}_\alpha}{c^2}\left(\vec{u}_\alpha\vec{E}\right)\right\}-\frac{\upsilon_T}{n_\alpha\gamma_\alpha}\left[\frac{\partial n_\alpha}{\partial\vec{r}}-\frac{\vec{u}_\alpha}{c^2}\left(\vec{u}_\alpha\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)n_\alpha\right], \qquad (6)$$

де $\vec{u}_\alpha$ – швидкість пучка як цілого; ν – частота зіткнень частинок; υ_T – середньоквадратична швидкість теплового руху частинок; n_α – концентрація.

Релятивістський фактор для парціального пучка частинок сорту α має вигляд:

$$\gamma_\alpha = \left(1-\vec{u}_\alpha^2/c^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Використовуючи відомі визначення для вектора густини струму $\vec{j}$ і густини заряду ρ [10]:

$$\vec{j}_\alpha = q_\alpha n_\alpha\vec{u}_\alpha, \quad \rho = q_\alpha n_\alpha,$$

рівняння руху (6) може бути переписане у формі рівняння густини струму [5]:

$$\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}+\frac{\vec{j}}{\rho}\frac{\partial\vec{j}}{\partial\vec{r}} = -\nu\frac{\vec{j}}{\gamma^2\left(\vec{j}\right)}+\frac{q}{m\gamma\left(\vec{j}\right)}\left\{\rho\vec{E}+\frac{1}{c}\left[\vec{j}\vec{B}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{c^2\rho^2}\vec{j}\left(\vec{j}\vec{E}\right)\right\}+\left(\frac{\vec{j}^2}{\rho^2}-\frac{\upsilon_T^2}{\gamma\left(\vec{j}\right)}\right)\frac{\partial\rho}{\partial\vec{r}}+$$

$$+\frac{\upsilon_T^2}{c^2\rho^2\gamma\left(\vec{j}\right)}\vec{j}\left(\vec{j}\frac{\partial\rho}{\partial\vec{r}}\right)+\frac{\vec{j}}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad (7)$$

з релятивістським фактором

$$\gamma\left(\vec{j}\right) = \left(1-\frac{\vec{j}^2}{\rho^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

а індекс α для простоти пропущений.

Для вирішення польової частини задачі використовуємо рівняння Максвела як базові:

$$\left[\vec{\nabla}\vec{E}\right] = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};$$

$$\left[\vec{\nabla}\vec{H}\right] = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}_0+\vec{j}\right);$$

$$\left(\vec{\nabla}\vec{D}\right) = 4\pi\left(\rho_0+\rho\right); \quad \left(\vec{\nabla}\vec{B}\right) = 0, \qquad (8)$$

де $\vec{\nabla}$ – диференціальний оператор набла; $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$, $\vec{D}$ – стандартні визначення для полів; $\vec{j}_0$, $\vec{j}$ – густина струмів, які створюються за рахунок зовнішніх джерел та індукованих у системі; ρ_0, ρ – аналогічні характеристики для густини заряду відповідно.

Методи вирішення

Відповідно до методології, прийнятої в електродинаміці, загальну задачу про самоузгоджену взаємодію потоку заряджених частинок з електромагнітними полями розбиваємо на дві частини:

– задачу про рух заряджених частинок у заданому полі, тобто задачу про збудження струмів заданими полями;

– задачу збудження полів при заданому русі частинок або при заданих струмах.

У свою чергу, стосовно першої частини можемо мати два можливих формулювання задачі відповідно для випадків пучків із низькою і високою інтенсивністю (густиною).

Згідно з прийнятою системою припущень задачу руху пучка з низькою інтенсивністю вирішуємо в рамках лагранжевого (одночастинкового) формалізму. Для опису динаміки пучків високої інтенсивності використовуємо ейлерів опис.

Заряджена частинка в осцилюючих електромагнітних полях як ієрархічна динамічна система

Вважаємо комплексні амплітуди коливань повільнозмінними функціями. Тоді, використовуючи відомі обчислювальні алгоритми [5; 6; 11–16], одночастинкові рівняння (4) або (5) можуть бути зведені до так званої ієрархічної стандартної форми:

$$\frac{dx}{dt} = X\left(x,\Psi_1,...,\Psi_\kappa,...,\Psi_m,...,\xi_1,...,\xi_m\right);$$

$$\frac{d\Psi_1}{dt} = \xi_1\omega_1\left(x\right)+Y_1\left(x,\Psi_1,...,\Psi_m,\xi_1,...,\xi_m\right);$$

……………………………………………...

$$\frac{d\Psi_m}{dt} = \xi_m\omega_m\left(x\right)+Y_m\left(x,\Psi_1,...,\Psi_m,\xi_1,...,\xi_m\right); \qquad (9)$$

де x – вектор повільних змінних; X, $Y_{1...m}$ – деякі відомі повільнозмінні функції; $\Psi_{1...m}$ – парціальні вектори, що є компонентами вектора швидких фаз ψ; m – номер вищого ієрархічного рівня; κ – номер ієрархічного рівня; $\omega_1 ... m$ – нормовані швидкості (циклічні частоти) обертання, які вважаються повільно змінними величинами.

Великі скалярні параметри задачі ξ_κ є членами ієрархічного ряду [5; 6; 11–16]:

$$\xi_1 >> \xi_2 >> \xi_\kappa >> ... >> \xi_m >> 1. \qquad (10)$$

Відповідно до базових ієрархічних принципів великі скалярні параметри ξ_κ у виразах (9), (10) визначають як відношення швидкостей зміни динамічних змінних двох сусідніх ієрархічних рівнів [5; 6; 11–16]:

$$\xi_1 \sim \left|\frac{d\psi_{1l}}{dt}\right| \Big/ \left|\frac{dx_q}{dt}\right| >> 1;$$

$$\xi_\kappa \sim \left|\frac{d\psi_{\kappa l}}{dt}\right| \Big/ \left|\frac{d\psi_{(\kappa-1)l}}{dt}\right|_{\kappa>1} >> 1, \qquad (11)$$

де $\psi_{\kappa l}$ – l-та компонента парціального вектора ψ_κ; x_q – q-та компонента вектора x.

Швидкість зміни x_q не перевищує швидкості зміни інших повільних змінних, а $\psi_{\kappa l}$ – сама повільна з компонент вектора ψ_κ. Алгоритм асимптотичного інтегрування стандартної системи вигляду (11) описаний у працях [5; 6; 11].

Нерезонансні і резонансні ієрархічні коливальні системи

Коротко зупинимося на класифікації змінних у нашій задачі. Гамільтоніан Н, як і змінні $\vec{P}$, $\vec{\beta}$ або $\vec{\upsilon} = \vec{\beta}c$, $\vec{r}$ у світлі їхнього фізичного змісту можуть бути класифіковані як повільні величини. Компонентний склад вектора лагранжевих швидких фаз визначити дещо складніше. У цьому разі виділимо ті фази коливань системи, які відповідно до визначення співвідношення (11) повинні бути класифіковані як швидкі фази одного з ієрархічних рівнів, і ті, які треба віднести до компонент вектора x. Крім того, ми повинні розрізняти явні і приховані фази. Явні фази пов'язані з наявністю явних періодичностей полів у системі. У першу чергу, фази полів ондуляторного типу (2), (3) через характерні структури рівнянь руху (4), (5) формально збігаються з фазами коливань зарядженої частинки. Відмінність у цьому разі полягає лише в тому, що ейлерова координата $\vec{r}$ в рівняннях (2), (3), яка характеризує деяку задану точку тривимірного простору, заповненого полем, трансформується у лагранжеву координату частинки $\vec{r}$, що знаходиться в цій точці.

Приховані фази визначити складніше. Ці фази пов'язані з періодичністю коливань частинки під дією неперіодичних зовнішніх полів і внутрішніх полів пучка, наприклад, циклотронні і діокотронні коливання, різні механізми синхротронних коливань у квазіпотенціальних високочастотних рельєфах тощо [5; 6; 11].

Техніка виділення прихованих періодичностей відома. При цьому використовують або певні специфічні фізичні особливості досліджуваної моделі [5; 11], або ж формальні процедури типу методів Ланцоша, Гребенникова, Пуанкаре [17; 18].

Крім явних і прихованих фаз у системі «частинка в електромагнітному полі» реалізуються також і комбінаційні фази різних типів, фізична природа яких визначається нелінійним характером руху частинки в електромагнітних полях, наприклад, математичною структурою рівнянь (4), (5). Комбінаційні фази виражаються через лінійні комбінації явних і прихованих фаз коливань частинки. У принципі можуть бути реалізовані подвійні, потрійні комбінації такого роду. Для умов нашої задачі, однак, найбільш цікаві тільки подвійні комбінації типу:

$$\theta_{vg} = \frac{m_v n_v}{m_g n_g} p_v + \sigma_{vg} p_g;$$

$$\psi_{vg} = \frac{m_v n_v}{m_g n_g} p_v - \sigma_{vg} p_g, \qquad (12)$$

де m_v, m_g – гармоніки осцилюючих полів; n_v, n_g – гармоніки коливань частинки, які зумовлені нелінійним характером її взаємодії з полями (1); p_v, p_g – явні або приховані фази відповідно; $\sigma_{vg} = \pm 1$ – знакові функції.

Характерним є випадок, коли одні з комбінаційних фаз, наприклад, фази θ_{vg} виявляються повільнозмінними на тлі інших комбінаційних фаз (у цьому разі – на тлі фаз ψ_{vg}), тобто:

$$\xi_{vgrk} \sim \left|\frac{d\,\psi_{vg}}{dt}\right| \Big/ \left|\frac{d\,\theta_{rk}}{dt}\right| >> 1 \qquad (13)$$

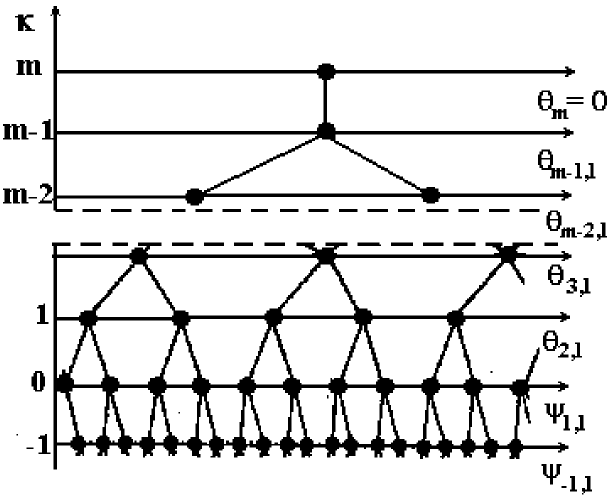
де ξ_{vgrk} – деякий великий параметр.

Умову (13) можна трактувати як умову реалізації в системі парного резонансу. Аналогічним шляхом можуть бути сформульовані умови реалізації триразового, чотириразового одночастинкового резонансів.

Порівнюючи умову (13) із визначенням (11), легко переконатися, що повільна θ_{vg} і швидка ψ_{vg} комбінаційні фази належать до різних рівнів ієрархії. Дотримуючись цих міркувань, далі легко виявити, що, у свою чергу, дві повільні комбінаційні (або повільна комбінаційна і «звичайна» повільна) фази, «збиваючись» згідно з однією зі схем, поданих у виразі (12), формують нові «суперповільну» і швидку комбінаційні фази тощо.

Це спостереження можна інтерпретувати як указівку на те, що фази коливань частинки в зовнішніх електромагнітних полях можуть формувати деяку ієрархічну коливальну структуру [5; 11–13].

У таких ситуаціях маємо підстави говорити про ієрархічні коливання в електродинамічних системах. Найпростіший випадок такої ієрархічної коливально-резонансної системи графічно зображено на рисунку [5].



Ієрархічне дерево Кейлі, що ілюструє концепцію ієрархічних резонансних коливань у ЕН-системах (найпростіший випадок парних резонансів):

κ – номер ієрархічного рівня; θ_i, ψ_i – повільна і швидка комбінаційні фази; m – найвищий ієрархічний рівень системи

Для простоти вважають, що всі резонанси є парними. Крім того, всі без винятку фази беруть участь у резонансних взаємодіях, причому тільки по одному разу.

З загальнофізичного погляду надзвичайно дивним є той факт, що аналогічними графічними структурами можуть бути описані також деякі фізичні, наприклад, твердотільні системи типу спінового скла, астрофізичні (наш Всесвіт), соціальні (будь-яка виробнича структура чи вся наша цивілізація в цілому), біологічні (будь-який біологічний об'єкт чи біосфера в цілому) об'єкти тощо [19–22].

Обмежимося розглядом деяких загальних постановочних аспектів самоузгодженої нелінійної резонансно-хвильової задачі про взаємодію інтенсивного потоку релятивістських заряджених частинок із полями осцилюючого типу (1).

Взаємодія інтенсивного потоку заряджених частинок з ондуляторними електромагнітними полями

Постановку задачі проводимо в термінах теорії ієрархічних коливань і хвиль [5; 6; 11–16]. Залежно від специфічних особливостей тої чи іншої із досліджуваних моделей будемо використовувати одну з розрахункових схем вирішення задачі [5; 6; 11–16]:

– комбінацію методу усередненого рівняння для густини струму і модифікованого методу повільнозмінних амплітуд;

– модифікований метод повільнозмінних амплітуд;

– метод ієрархічних перетворень координат.

Ключова ідея методу усередненого рівняння для густини струму [5] полягає в реалізації переходу в методі опису руху потоку частинок (див. рівняння (7)) від ейлерових до лагранжевих змінних. Як наслідок, результати таких перетворень можуть бути подані у параметричній формі:

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = -\nu \frac{\vec{j}}{\gamma\left(\vec{j},\rho\right)^2} + \frac{q}{m\gamma\left(\vec{j},\rho\right)}\left\{\rho\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{j}\vec{B}\right] - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{c^2\rho^2}\vec{j}\left(\vec{j}\vec{E}\right)\right\} +$$

$$+\left(\frac{\vec{j}^{\,2}}{\rho^2} - \frac{v_T^2}{\gamma}\right)\frac{\partial\rho}{\partial\vec{r}} + \frac{v_T^2}{c^2\rho^2\gamma}\vec{j}\left(\vec{j}\frac{\partial\rho}{\partial\vec{r}}\right) + \frac{\vec{j}}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t},$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{R}\left(\vec{j},\rho,p_\mu,...\right); \; \frac{dp_\mu}{dt} = \chi_\mu\left(\vec{j},p_\mu,\vec{r},...\right), \quad (14)$$

де p_μ – вектор, компонентами якого є всі явні та приховані фази коливань частинок, що рухаються в суперпозиції зовнішніх і внутрішніх полів; χ_μ – деяка відома вектор-функція.

Виконуючи класифікацію змінних на повільні і швидкі, у т. ч. з використанням визначень для повільної і швидкої комбінаційних фаз (див. рівняння (12)), на наступному етапі обчислювальної процедури система рівнянь (14) може бути зведена до ієрархічної стандартної форми (9).

Здійснюючи обернені перетворення від лагранжевих до ейлерових змінних у відповідному рівнянні останньої ієрархії, одержуємо m кратно-усереднене рівняння для густини струму [5]. Характерною рисою цього рівняння є відсутність будь-яких швидких осцилюючих членів. Це значить, що з обчислювальної точки зору m кратно-усереднене рівняння для густини струму виявляється набагато більш простим, ніж вихідне неусереднене рівняння (7). Вирішуючи m кратно-усереднене рівняння і виконуючи відповідний ланцюжок обернених ієрархічних перетворень (див. технічні деталі в працях [5; 6]), отримаємо асимптотичні розв'язки вихідної нелінійної задачі про густину струму.

Традиційну версію методу повільно змінних амплітуд, яка описана в працях [22; 23], використовують у задачах радіофізики з кінця сорокових років. Однак вона далеко не завжди виявляється придатною для вирішення деяких нелінійних резонансно-хвильових задач електродинаміки плазмоподібних систем [11–16], тому що тут не враховується можливість реалізації ряду специфічних фізичних ситуацій, характерних для деяких моделей такого типу. Наприклад, реалізації різного виду ефектів типу нелінійної генерації квазістатичних полів, вироджених випадків взаємодії, коли в резонансну смугу потрапляє не одна, а одночасно декілька власних хвиль [6; 11; 14–16; 24]. Як показав досвід, у таких ситуаціях ефективно застосовувати модернізовані версії методу повільнозмінних амплітуд [6; 10; 13–16].

Суть модернізації полягає в такому. Вважаємо, що шляхом використання однієї з відомих обчислювальних технологій (методу усередненого кінетичного рівняння, методу усередненого рівняння для густини струму [5; 11–16]) отримані розв'язки задачі руху.

У цьому разі це означає одержання аналітичних виразів для густини струму і просторового заряду як функцій характеристик полів [6; 14–16]. Це дозволяє звести вихідну систему польових рівнянь (рівнянь Максвела) до стандартної форми вигляду:

$$A\frac{\partial U}{\partial t}+(BP)U+CU=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_1^n R_U^{(n)}\big(U,\partial U/\partial t,(PU),z,t,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m\big),$$

де A,B,C – квадратні матриці розміру $n\times n$; $U=U(z,t)$ – деяка вектор-функція в евклідовому n-вимірному просторі R^n із координатами $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, $\forall z\in R^n$ $z=(z_1, z_2, \dots, z_n)^{\mathrm{T}}$, $\forall z_i\in(-\infty,+\infty)$, $i\in(1,2,\dots,n)$;

P – диференціальний оператор у просторі R^n; $\varepsilon_1=1/\xi_1<<1$ – малий параметр задачі; $R_U^{(n)}(\dots)$ – відомі поліноміальні функції зазначених аргументів; t – деяка скалярна змінна, наприклад, лабораторний час.

У загальному випадку вектор-функція U формується з періодичних, тобто хвильових, і квазістаціонарних розмірів, як із компонент. У розглянутому випадку це – вектори $\vec{E},\vec{D},\vec{H},\vec{B}$. Вважаємо, що можливо зображення векторів U і $R_U^{(n)}$ у вигляді суми квазістаціонарних (повільнозмінних) і швидкоосцилюючих частин:

$U=U_0+\widetilde{U};\quad R=R_0+\widetilde{R}$.

Тоді стандартне рівняння може бути переписано в так звану модифіковану форму:

$$A\frac{\partial U_0}{\partial t}+(BP)U_0+CU_0= =\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_1^n R_{U0}^{(n)}\left(U,\frac{\partial U}{\partial t},(PU),z,t,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m\right) \quad (15)$$

$$A\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t}+(BP)\tilde{U}+C\tilde{U}= =\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_1^n \tilde{R}_U^{(n)}\left(U,\frac{\partial U}{\partial t},(PU),z,t,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m\right) \quad (16)$$

Рівняння (16) може бути розв'язано традиційним методом повільно змінних амплітуд [23; 25]. При цьому, коли застосовують ітераційну схему розрахунків, то на першому етапі обчислювальної процедури повільно змінний вектор U_0 може вважатися заданою функцією. Тоді рівняння (15) зручно розв'язувати одним із традиційних наближених методів, наприклад, методом послідовних наближень і т.д.

Другий варіант розв'язання задачі ґрунтується на спостереженні, що система рівнянь, яка складається з рівнянь Максвела (8) і струмового рівняння (7), може бути зведена безпосередньо до стандартної форми (15), (16) і, отже, розв'язана шляхом використання ієрархічного алгоритму. При цьому, до кількості компонент вектора U, крім $\vec{E},\vec{D},\vec{H},\vec{B}$, входять густина просторового заряду ρ і вектор густини струму $\vec{j}$.

Ідея методу ієрархічного перетворення координат [5] (третій із варіантів розв'язання задачі) полягає в проведенні ланцюжка спеціальних перетворень, у результаті котрих «зникають» усі швидкі осциляції в правій частині рівняння (16). Процедура побудови асимптотичних розв'язків істотно спрощується і може бути автоматизована з використанням стандартних персональних комп'ютерів.

Висновок

У статті було описано об'єкт дослідження, та зроблено постановку задачі.

На базі цієї постановки задачі можна проводити кількісний аналіз більшості моделей ЕН-систем різних типів, у т. ч. прискорювачів і деяких унікальних систем формування пучків заряджених частинок, двопотокових релятивістських систем, включаючи супергетеродинні лазери на вільних електронах тощо.

Література

1. *Kulish V.V., Kosel P.B., Kailyuk A.G., Gubanov I.V.* New accelerator principle of charged particles for the electronic need. Quantitative analysis. // The Int.

J. of Infr. and Millim. waves. – 1998. – Vol. 19, № 2. – P. 251–328.

2. *Кулиш В.В., Крутько О.Б.* Усилительные свойства лазеров на свободных электронах с комбинированной ЕН-убитронной накачкой // Письма в ЖТФ. – 1995. – Т. 21, № 11. – С. 47–51.

3. *Куліш В.В., Крутько О.Б.* Лазер на свободных электронах с комбинированной ЕН-убитронной накачкой // Вісн. СумДУ. – 1995. № 2. – С. 10–21.

4. *Куліш В.В., Кайлюк О.Г., Квак О.О., Крутько О.Б.* Лазер на свободных электронах Пат. № 14547А (Украина). Приор. от 19.12.96. – № 95031123; Заявл. 10.03.95. – Опубл. 09.01.97.

5. *Kulish V.V., Kosel P.B., Kailyuk A.G.* New acceleration principle of charged particles for electronic applications // The Int. J. of Infr. and Mill. waves. – 1998. – Vol. 19, № 1. – P. 33–93.

6. *Kulish V.V.* Methods of averaging in nonlinear problems of relativistic electrodynamics // Atlanta, World Scientific Publishers, Inc., 1998.

7. *Kulish V.V.* Hierarchical methods. Vol.I. Hierarchy and Hierarchical Asymptotic Methods in Electrodynamics. – Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 2002.

8. *Kulish V.V.* Hierarchical methods. Vol.II. Undulative electrodynamic systems. – Dordrecht / Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 2002.

9. *Davidson R.C.* Theory of non-neutral plasmas // London: W.A. Benjamin Inc., 1974.

10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. – М.: Наука, 1973. – 368 с.

11. *Kulish V.V.* Hierarchical oscillations and averaging methods in nonlinear problems of relativistic electronics // The Int. J. of Infr. and Mill. waves. – 1997. – Vol. 18, № 5. – P. 1053–1117.

12. *Куліш В.В.* Ієрархічний метод та технічні особливості його застосування у нелінійних задачах електродинаміки. Загальна теорія // Укр. Фіз. Журн. – 1998. – Т. 43, № 4. – С. 483 – 499.

13. *Kulish V.V.* Hierarchic theory of oscillations and waves and its application to nonlinear problems of relativistic electrodynamics. // Causality and locality in modern physics. Dordrecht/Boston/London: Cluwer Academic Publishers.– 1998. – P. 97 – 105.

14. *Кулиш В.В., Лысенко А.В.* Метод усредненного кинетического уравнения и его применение в нелинейных задачах электродинамики плазмы // Физика плазмы. – 1993. – Т. 19, № 2. – С. 199–216.

15. *Кулиш В.В., Лысенко А.В., Кулешов С.А.* Применение метода усредненного кинетического уравнения в задачах теории трехволнового параметрического резонанса в плазме релятивистских электронных пучков // Физика плазмы. – 1993. – Т. 19, № 2. – С. 216–227.

16. *Kulish V.V, Kuleshov S.A., Lysenko A.V.* Nonlinear self-consistent theory of superheterodyne and parametric free electron laser // The Int. J. of Infr. and Mill. waves. – 1993. – Vol. 14, № 3. – P. 451 – 568.

17. *Гребенников Е.А.* Метод усреднения в прикладных задачах. – М.: Наука, 1986. – С. 255.

18. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. – М. : Физматгиз, 1961. – С. 324.

19. *Kohmanski S.S., Kulish V.V.* Parametric resonance interaction of electron in the field of electromagnetic waves and longitudinal magnetic field // Acta Phys. Polonica. – 1984. – T. A66, № 6. – P. 713–740.

20. *Haken H.* Advanced Synergetic. Instability Hierarchies of Self-Organizing Systems and Devices. – Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo: Springer-Verlag, 1983. – 472 p.

21. *Nicolis J.S.* Dynamics of Hierarchical Systems. An Evolutionary Approach. – Berlin-Heidelberg-New York, Tokyo: Springer-Verlag, 1986. – 486 p.

22. *Kaivarainen A.* Hierarchic concept of matter and field. – Earthpuls Press, 1997. – 422 p.

23. *Гапонов А.В., Островский Л.А., Рабинович М.И.* Одномерные волны в нелинейных средах с дисперсией // Изв. вузов. Радиофизика. – 1970. – Т.13, № 2. – С. 169–313.

24. *Рабинович М.И.* Об асимптотическом методе в теории колебаний распределенных систем // ДАН СССР. – 1971. – Т. 191. – С. 1253–1255.

25. *Кулиш В.В., Кулешов С.А.* Метод усередненого кінетичного рівняння та його застосування в нелінійних задачах електродинаміки плазми // Укр. фіз. журн. – 1993. – Т. 38, № 2.– С. 198–206.

Стаття надійшла до редакції 01.12.05.

Построена универсальная теоретическая модель, в рамках которой возможно количественное описание ЕН-ускорителей и аналогичных устройств на их основе (ЕН-систем). Описание такой универсальной модели можно реализовывать в теории иерархичных колебаний и волн. Для решения нелинейных задач теории ЕН-систем предложено использовать иерархическую версию метода Боголюбова, метод усредненного уравнения для плотности тока и метода иерархического преобразования координат.

Universal theoretical model within which it is possible quantitative description of EH-accelerators and similar devices on their basis is built (EH-systems). Description of such universal model is offered to realize within the theory of hierarhial ossilations and waves. For solution of nonlinear tasks of theory of the EH-systems is offered to use the

hierarchical versions of method of Bogolubov, method of averaged equation for the current density and method of hierarchical transformation of coordinates.