

УДК 681.786.069.3(045)

В.Н. Шмаров, канд. техн. наук

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СФЕРИЧЕСКИХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ МНОГОКАНАЛЬНЫХ ФАЗОВЫХ СВЕТОДАЛЬНОМЕРОВ

НАУ, Аэрокосмический институт, e-mail: fladeane@nau.edu.ua

*Рассмотрена работа четырехканальных и пятиканальных фазовых светодальномеров. Показано, что с помощью таких измерительных систем возможно восстановление формы крупногабаритных объектов сферической и цилиндрической форм.*

### Введение

Решение задачи восстановления формы поверхности крупногабаритных объектов возможно с использованием многоканальных фазовых светодальномеров [1–3]. Однако исследования были ограничены рассмотрением измерительных систем с тремя фазовыми светодальномерами для решения задачи восстановления формы объектов, у которых поверхность представлена совокупностью плоскостей. С точки зрения диагностики объектов для проведения оценок их эксплуатационных характеристик необходимо определение геометрических характеристик более сложной формы, отклонений геометрических характеристик самих крупногабаритных объектов сложной формы от первоначальных значений, характеристик поверхностных дефектов сложной геометрической формы.

Для решения подобных задач требуется использование систем с большим количеством каналов и более сложный математический аппарат обработки результатов измерений.

При исследовании многоканальных измерительных систем на основе фазовых светодальномеров и их возможностей при восстановлении формы поверхностей крупногабаритных объектов рассматривались объекты более сложной формы, чем объекты, проанализированные в работах [1–3]. К таким объектам относятся объекты, форма поверхности которых имеет сферический или цилиндрический вид. При рассмотрении таких поверхностей возникают новые задачи, связанные, например, с определением радиуса сферы и положения ее центра, радиуса цилиндра и положения его оси. Несмотря на то, что и сфера, и цилиндр являются строго модельными и идеализированными поверхностями, результаты проводимого исследования могут быть распространены и на произвольные поверхности с той лишь разницей, что для произвольных поверхностей будут определяться уже локальные характеристики, когда для анализируемого участка поверхности характерным является сферическое или цилиндрическое асимптотическое поведение.

Это, в первую очередь, относится к дефектам, представляющим собой прогибы, возникающие вследствие контактного взаимодействия объектов с различными телами.

Такие прогибы могут быть изотропными, а значит, близкими к сферической поверхности, или вытянутыми, и тогда их форма будет близка к цилиндрической форме.

Рассмотрение сферических и цилиндрических поверхностей является частной задачей и не исключает всех возможных вариантов формы поверхностей крупногабаритных объектов и тем более образующихся на них дефектов.

Однако? когда поверхность имеет вид седловой точки, приближение к сферичности поверхности недопустимо. Но приближение к цилиндрическому характеру поведения поверхности возможно, если ось цилиндра изгибается.

Целью исследований было изучение работы четырехканальных и пятиканальных фазовых измерительных светодальномеров для восстановления формы поверхности сложной формы.

Для определения параметров сферической поверхности измерительная система должна иметь не меньше четырех каналов, а для определения параметров цилиндрической поверхности – не менее пяти.

### Четырехканальный фазовый светодальномер

Четырехканальная измерительная система на основе фазовых дальномеров позволяет определять координаты четырех точек исследуемой поверхности.

Измерение координат осуществляют регистрацией световой волны, отраженной от поверхности, с помощью четырех фотоприемников измерительной системы. Для этого поверхность предварительно освещают, например, двухмодовым лазером.

Каждый из фотоприемников регистрирует достаточно узкие пучки света, относящиеся к малым участкам исследуемой поверхности – точкам.

Расстояния от фотоприемников до исследуемых точек, расположенных на поверхности, определяются по разности фаз принятой и излучаемой световых волн, причем разность фаз – по низкочастотной моде лазерного излучения.

Схема четырехканальной измерительной системы (рис. 1) является модификацией трехканальной измерительной системы [3].

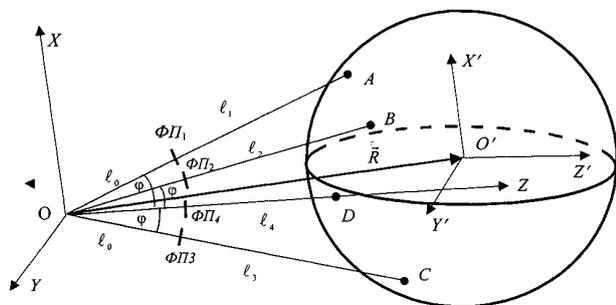


Рис. 1. Схема измерений четырехканального фазового светодальномера

Три направления измерения расстояний к точкам поверхности, задаваемые ориентациями фотоприемников ФП1, ФП2, ФП3 лежат на ребрах трехгранной пирамиды с вершиной в точке O. Фотоприемники равноудалены от вершины на расстояние  $\ell_0$ . Кроме того, одинаковыми являются и расстояния между фотоприемниками, поэтому углы в вершине рассматриваемой пирамиды также одинаковые.

С помощью фотоприемников ФП1, ФП2, ФП3 измеряются расстояния  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  до трех точек поверхности A, B, C.

Фотоприемник ФП4 ориентирован на точку D поверхности и измеряет расстояние  $\ell_4$  до этой точки. Направление, вдоль которого производится измерение этим фотоприемником, отвечает высоте пирамиды, образованной точкой O и первыми тремя фотоприемниками.

Кроме этого, фотоприемник ФП4 расположен на расстоянии  $\ell_0$  от точки O.

Для определения положения исследуемых точек поверхности введем систему координат, оси которой свяжем с измерительной системой. Начало системы координат разместим в точке O.

Фотоприемник ФП4 будет лежать на оси Z, которую направим вдоль высоты рассмотренной пирамиды.

Ось X лежит в плоскости, образованной направлениями, вдоль которых проводятся измерения фотоприемниками ФП1 и ФП4, а ось Y перпендикулярна осям X и Z. Углы  $\varphi$ , которые образуют направления измерения расстояний фотоприемников ФП1, ФП2, ФП3 (ребра трехгранной пирамиды) с направлением измерения ФП4 или осью Z, равны между собой.

После измерения расстояний к исследуемым точкам поверхности координаты точек A, B, C, D в системе координат будут иметь вид:

$$A = (\ell_0 + \ell_1) \sin \varphi, 0, (\ell_0 + \ell_1) \cos \varphi ; \tag{1}$$

$$B = -\frac{1}{2}(\ell_0 + \ell_2) \sin \varphi, \frac{\sqrt{3}}{2}(\ell_0 + \ell_2) \sin \varphi, (\ell_0 + \ell_2) \cos \varphi ; \tag{2}$$

$$C = -\frac{1}{2}(\ell_0 + \ell_3) \sin \varphi, -\frac{\sqrt{3}}{2}(\ell_0 + \ell_3) \sin \varphi, (\ell_0 + \ell_3) \cos \varphi ; \tag{3}$$

$$D = 0, 0, \ell_0 + \ell_4 . \tag{4}$$

В системе координат, совмещенной с центром сферы, уравнение, описывающее сферу, запишем в виде

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = r^2 ,$$

где  $x', y', z'$  – координаты точек сферы в системе  $X'Y'Z'$ ;  $r$  – радиус сферы.

Координаты  $x_0, y_0, z_0$  центра сферы в собственной системе координат, связанной с измерительной системой, отвечают вектору  $\vec{R}$  перемещения точки O собственной системы координат XYZ к точке O' системы X'Y'Z'.

С учетом такой связи координатных систем уравнение сферы в собственной системе координат измерительной системы XYZ запишем в виде

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 . \tag{5}$$

Четыре неизвестных (три координаты  $x_0, y_0, z_0$  и радиус  $r$ ) выражения (5) определим, подставляя координаты точек A, B, C, D в соответствии с формулами (1)–(4) в уравнение (5). Получим систему, которая содержит четыре уравнения:

$$\begin{aligned} & ((\ell_0 + \ell_1) \sin \varphi - x_0)^2 + (y_0)^2 + \\ & + ((\ell_0 + \ell_1) \cos \varphi - z_0)^2 = r^2 ; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2}(\ell_0 + \ell_2) \sin \varphi + x_0 \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2}(\ell_0 + \ell_2) \sin \varphi - y_0 \right)^2 + \\ & + ((\ell_0 + \ell_2) \cos \varphi - z_0)^2 = r^2 ; \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2}(\ell_0 + \ell_3) \sin \varphi + x_0 \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2}(\ell_0 + \ell_3) \sin \varphi + y_0 \right)^2 + \\ & + ((\ell_0 + \ell_3) \cos \varphi - z_0)^2 = r^2 ; \end{aligned} \tag{8}$$

$$(x_0)^2 + (y_0)^2 + (\ell_0 + \ell_4 - z_0)^2 = r^2 . \tag{9}$$

Системы уравнений (6)–(9) решим следующим образом.

Из уравнений (6)–(8) вычтем уравнение (9). При этом вместо нелинейной системы уравнений (6)–(9) получим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными, которая имеет вид

$$2(l_0 + l_1) \sin \varphi x_0 + 2((l_0 + l_1) \cos \varphi - (l_0 + l_4))z_0 = (2l_0 + l_1 + l_4)(l_1 - l_4); \tag{10}$$

$$(l_0 + l_2) \sin \varphi x_0 - \sqrt{3}(l_0 + l_2) \sin \varphi y_0 + 2(l_0 + l_4 - (l_0 + l_2) \cos \varphi)z_0 = (2l_0 + l_2 + l_4)(l_4 - l_2); \tag{11}$$

$$(l_0 + l_4) \sin \varphi x_0 + \sqrt{3}(l_0 + l_3) \sin \varphi y_0 + 2(l_0 + l_4 - (l_0 + l_3) \cos \varphi)z_0 = (2l_0 + l_3 + l_4)(l_4 - l_3). \tag{12}$$

Для нахождения корней системы уравнений (10)–(12) рассмотрим определители, построенные с помощью коэффициентов при неизвестных в рассматриваемой системе:

$$\Delta = 2\sqrt{3} \sin^2 \varphi \begin{vmatrix} 2(l_0 + l_1) & 0 & -(l_0 + l_4 - (l_0 + l_1) \cos \varphi) \\ l_0 + l_2 & -(l_0 + l_2) & l_0 + l_4 - (l_0 + l_2) \cos \varphi \\ l_0 + l_3 & l_0 + l_3 & l_0 + l_4 - (l_0 + l_3) \cos \varphi \end{vmatrix};$$

$$\Delta_1 = 2\sqrt{3} \sin \varphi \begin{vmatrix} -(2l_0 + l_1 + l_4)(l_4 - l_1) & 0 & -(l_0 + l_4 - (l_0 + l_1) \cos \varphi) \\ (2l_0 + l_2 + l_4)(l_4 - l_2) & -(l_0 + l_2) & l_0 + l_4 - (l_0 + l_2) \cos \varphi \\ (2l_0 + l_3 + l_4)(l_4 - l_3) & l_0 + l_3 & l_0 + l_4 - (l_0 + l_3) \cos \varphi \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = 2 \sin \varphi \begin{vmatrix} 2(l_0 + l_1) & -(2l_0 + l_1 + l_4)(l_4 - l_1) & -(l_0 + l_4 - (l_0 + l_1) \cos \varphi) \\ l_0 + l_2 & (2l_0 + l_2 + l_4)(l_4 - l_2) & l_0 + l_4 - (l_0 + l_2) \cos \varphi \\ l_0 + l_3 & (2l_0 + l_3 + l_4)(l_4 - l_3) & l_0 + l_4 - (l_0 + l_3) \cos \varphi \end{vmatrix};$$

$$\Delta_3 = \sqrt{3} \sin^2 \varphi \begin{vmatrix} 2(l_0 + l_1) & 0 & -(2l_0 + l_1 + l_4)(l_4 - l_1) \\ l_0 + l_2 & -(l_0 + l_2) & (2l_0 + l_2 + l_4)(l_4 - l_2) \\ l_0 + l_3 & l_0 + l_3 & (2l_0 + l_3 + l_4)(l_4 - l_3) \end{vmatrix}.$$

В соответствии с полученными выражениями для определителей, записанных с использованием коэффициентов уравнений (10)–(12), решения этих уравнений имеют вид:

$$x_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad y_0 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad z_0 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Из уравнения (9) получим радиус сферической поверхности:

$$r = \frac{1}{\Delta} \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + ((l_0 + l_4)\Delta - \Delta_3)^2}.$$

Таким образом, использование четырехканальной измерительной системы для определения четырех координат точек сферической поверхности является достаточным для восстановления этой поверхности и нахождения ее геометрических характеристик.

### Пятиканальный фазовый светодальномер

Если форма поверхности близка к цилиндрической, то для ее изучения нужно использовать пятиканальную измерительную систему.

С точки зрения геометрического анализа для таких поверхностей необходимо рассмотреть два сечения, осуществляемые взаимно перпендикулярными плоскостями.

Сечение каждой плоскости с поверхностью даст некоторую кривую в пространстве, принадлежащую плоскости сечения, т. е. является плоской кривой.

Для каждой такой кривой при известных координатах нескольких точек можно определить радиус ее кривизны. Для нахождения радиуса кривизны достаточно взять координаты трех точек, лежащих на этой кривой. Поскольку будет рассмотрено два плоских сечения поверхности, то будут определены два радиуса кривизны двух сечений поверхности взаимно перпендикулярными плоскостями. Для этого с помощью измерительной системы необходимо определить координаты пяти точек на поверхности, так как одна точка может быть общей для обоих сечений. Таким образом, измерительная система должна содержать пять фотоприемников.

Схема пятиканальной измерительной системы, содержащей пять фотоприемников, изображена на рис. 2.

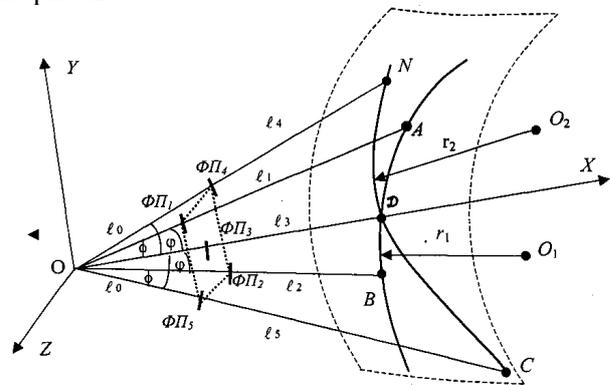


Рис. 2. Схема измерений пятиканального фазового светодальномера

Как и в предыдущем случае, считаем, что направления, вдоль которых измеряют расстояния до точек поверхности, задаваемых ориентацией фотоприемников, пересекаются в точке O. Все пять фотоприемников равноудалены от точки O на одинаковое расстояние  $l_0$ .

Четыре фотоприемника измерительной системы ФП1, ФП2, ФП3, ФП4, ФП5 являются основанием четырехгранной пирамиды, вершина которой совпадает с точкой O, а основанием которой является ромб (рис. 2, пунктир).

При определении системы координат точку  $O$  совместим с точкой начала системы координат. Координатную ось  $X$  направим через центр ромба, образованного фотоприемниками ФП1, ФП2, ФП3, ФП4, ФП5. Фотоприемник ФП3 будет расположен на оси  $X$ . Поскольку с помощью данной измерительной системы предполагается изучение кривых сечений поверхности в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, то фотоприемники ФП1, ФП2 будут ориентированы на измерения расстояний вдоль направлений, лежащих в координатной плоскости  $YX$  и составляющих одинаковые углы  $\varphi$  с координатной осью  $X$ .

Фотоприемники ФП4, ФП5 ориентированы на измерение расстояний вдоль направлений, лежащих в координатной плоскости  $XZ$  и составляющих одинаковые углы  $\Phi$  с координатной осью  $X$ . При таких условиях конструкция системы позволяет измерять расстояния до точек, которые лежат на сечениях поверхности, образованных двумя взаимно перпендикулярными плоскостями.

При использовании этой измерительной системы будут получены расстояния  $l_1 - l_5$  от фотоприемников до пяти точек исследуемой поверхности  $A, B, C, D, N$ . При этом точка  $D$  является общей точкой для обеих плоскостей сечений поверхности.

Определяя расстояния до точек поверхности, запишем их координаты в принятой координатной системе

$$A = (l_0 + l_1) \cos \varphi, (l_0 + l_1) \sin \varphi, 0; \quad (13)$$

$$B = (l_0 + l_2) \cos \varphi, -(l_0 + l_2) \sin \varphi, 0; \quad (14)$$

$$D = l_0 + l_3, 0, 0; \quad (15)$$

$$C = (l_0 + l_4) \cos \varphi, 0, (l_0 + l_4) \sin \varphi;$$

$$N = (l_0 + l_5) \cos \varphi, 0, -(l_0 + l_5) \sin \varphi.$$

По координатам точек  $A, B, C$  определим радиус кривизны плоской кривой, лежащей в этой плоскости, образованной на поверхности при ее сечении плоскостью  $XY$ . При этом точка центра этой окружности также лежит в этой плоскости. Уравнение окружности запишем в виде

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2, \quad (16)$$

где  $x_1, y_1$  – координаты центра окружности  $O_1$ , восстанавливаемой по координатам точек  $A, B, D$ ;  $r_1$  – радиус кривизны.

Для определения неизвестных  $r_1, x_1, y_1$  подставим в уравнение (16) координаты точек  $A, B, D$ . При этом получим систему уравнений, подобную системе уравнений (6)–(9).

Решение этой системы проведем аналогично выполненному.

В результате проведенных вычислений получим координаты точки  $O_1$  и радиус  $r_1$ :

$$x_1 = \frac{(2l_0 + l_1 + l_3)(l_1 - l_3)(l_0 + l_2) + (2l_0 + l_2 + l_3)(l_2 - l_3)(l_0 + l_1)}{2[(l_0 + l_3)(2l_0 + l_1 + l_2) - 2(l_0 + l_1)(l_0 + l_2) \cos \varphi]},$$

$$y_1 = \frac{(2l_0 + l_1 + l_3)(l_3 - l_1)((l_0 + l_2) \cos \varphi - (l_0 + l_3))}{2 \sin \varphi [(l_0 + l_3)(2l_0 + l_1 + l_2) - 2(l_0 + l_1)(l_0 + l_2) \cos \varphi]} + \frac{(2l_0 + l_2 + l_3)(l_2 - l_3)((l_0 + l_1) \cos \varphi - (l_0 + l_3))}{2 \sin \varphi [(l_0 + l_3)(2l_0 + l_1 + l_2) - 2(l_0 + l_1)(l_0 + l_2) \cos \varphi]},$$

$$r_1 = \sqrt{(l_0 + l_3 - x_1)^2 + y_1^2}.$$

По координатам другой тройки точек  $C, D, N$  поверхности определим параметры кривой, образованной при сечении поверхности координатной плоскостью  $XZ$ .

Для этой кривой, лежащей в плоскости, ориентированной перпендикулярно относительно первой кривой, радиус кривизны  $r_2$  и положение центра окружности,  $O_2$ , который лежит в плоскости  $XZ$ , будут иными. Координаты точки  $O_2$ , которые обозначим  $x_2, z_2$ , определим из выражений

$$x_2 = \frac{(2l_0 + l_3 + l_4)(l_4 - l_3)(l_0 - l_5) + (2l_0 + l_3 + l_5)(l_5 - l_3)(l_0 - l_4)}{2[(l_0 + l_3)(2l_0 + l_4 + l_5) - 2(l_0 + l_4)(l_0 + l_5) \cos \varphi]},$$

$$z_2 = \frac{(2l_0 + l_3 + l_4)(l_3 - l_4)((l_0 + l_5) \cos \varphi - (l_0 + l_3))}{2 \sin \varphi [(l_0 + l_3)(2l_0 + l_3 + l_4) - 2(l_0 + l_4)(l_0 + l_5) \cos \varphi]} +$$

$$+ \frac{(2l_0 + l_3 + l_5)(l_5 - l_3)((l_0 + l_4) \cos \varphi - (l_0 + l_3))}{2 \sin \varphi [(l_0 + l_3)(2l_0 + l_4 + l_5) - 2(l_0 + l_4)(l_0 + l_5) \cos \varphi]},$$

$$r_2 = \sqrt{(l_0 + l_3 - x_2)^2 + z_2^2}.$$

Если поверхность цилиндрическая, а ось  $Y$  параллельна оси цилиндра, то радиус кривизны, определяемый по точкам  $A, B, C$ , будет стремиться к бесконечности:  $r_1 \rightarrow \infty$ . При этом точки  $A, B, C$  будут лежать на прямой. Уравнение прямой, лежащей в плоскости  $XY$ , построим, используя координаты точек  $A$  и  $B$ :

$$y = ((l_0 + l_1) \cos \varphi - x) \frac{(2l_0 + l_1 + l_2)}{(l_2 - l_1)} \operatorname{tg} \varphi + (l_0 + l_1) \sin \varphi. \quad (17)$$

Соответственно точка  $D$  также будет лежать на этой прямой, и ее координаты будут удовлетворять уравнению (17).

Когда плоскость  $XY$  параллельна оси цилиндра, а плоскость  $XZ$  перпендикулярна, радиус кривизны сечения, получаемый с использованием координат точек  $C, D, N$ , равен радиусу цилиндра.

Таким образом, с помощью измерительной системы с пятью фазовыми светодальномерами возможно определение радиусов кривизны кривых сечений поверхности двумя взаимно перпендикулярными плоскостями.

С помощью такой системы можно определять радиус цилиндрической поверхности.

Однако при определении радиуса цилиндрической поверхности возникает проблема ориентации собственных осей измерительной системы согласовано с ориентацией самого цилиндра и выполнении условия параллельности оси цилиндра и координатной оси  $Y$ .

Плоскость  $XY$  должна быть параллельной оси цилиндра, а ось  $X$  – перпендикулярной оси цилиндра.

Удовлетворить этим условиям весьма трудно. Из них следует, что должно выполняться равенство расстояний отрезков между точками  $A, D$  и  $D, B$ , т. е.  $|AD| = |DB|$ .

Однако экспериментально с учетом ошибок измерений удовлетворить этому равенству сложно даже при идеальной цилиндрической поверхности и хорошо подобранной ориентации измерительной системы, поэтому необходимо добиваться минимального значения для квадрата разности расстояний  $\delta = \{|AD| - |DB|\}^2$ .

Разность  $\delta$  с учетом определения координат точек в соответствии с выражениями (13)–(15) имеет вид

$$\delta = \left\{ \sqrt{[l_0 + l_3 - (l_0 + l_1) \cos \varphi]^2 + [(l_0 + l_1) \sin \varphi]^2} - \sqrt{[l_0 + l_3 - (l_0 + l_2) \cos \varphi]^2 + [(l_0 + l_2) \sin \varphi]^2} \right\}^2. \quad (18)$$

Выражение (18) является одним из условий для проверки согласованности ориентации цилиндрической поверхности и измерительной системы при определении радиуса кривизны цилиндрической поверхности.

Розглянуто роботу чотириканальних та п'ятиканальних фазових світлодалекомірів. Показано, що за допомогою таких вимірювальних систем можливо відтворення форми великогабаритних об'єктів сферичної та циліндричної форм.

The operation of four-channel and five-channel phase light distance measurement devices surveyed. It is shown, that with the help of such measuring systems restoring the shape a large-sized plants of the spherical and cylindrical shape is possible.

## Вывод

Из результатов проведенных исследований следует, что с помощью четырехканальных и пятиканальных измерительных систем на основе фазовых светодальномеров возможно определение геометрических характеристик сферических и цилиндрических поверхностей крупногабаритных объектов. Это означает, что увеличение количества измерительных каналов расширяет возможности метода при исследовании более сложных поверхностей, что значительно расширяет информативность применяемого метода фазовой светодальнометрии.

Геометрические характеристики крупногабаритных объектов сферической и цилиндрической формы важно определять при восстановлении их формы, т.е. решении уравнения поверхности. Знание характеристик крупномасштабных дефектов формы крупногабаритных объектов в значительной степени расширяет возможности измерительных систем при диагностике состояния таких изделий.

Предлагаемый метод не требует определения ориентации поверхности в пространстве, это указывает на возможность создания мобильных измерительных систем, эксплуатируемых в производственных условиях.

## Литература

1. *Бабак В.П., Шмаров В.М.* Вплив геометричного фактора на відновлення поверхні великогабаритних виробів з використанням світлодалекомірів // Вісн. НАУ. – 2004. – № 1. – С. 60–67.
2. *Бабак В.П., Шмаров В.Н., Калита В.М.* Восстановление формы поверхностей крупногабаритных объектов лазерными светодальномерами // Технологические системы. – 2004. – № 3. С. 83–88.
3. *Бабак В.П., Шмаров В.М., Калита В.М.* Дослідження геометричних особливостей поверхонь великогабаритних об'єктів триканальною вимірювальною системою з фазовими світлодалекомірами // Вісн. НАУ. – 2004. – № 2. – С. 36–42.

Стаття надійшла до редакції 10.04.06.