УДК 629.7.048.7:681.14; 621.1.016

М.Ю. Федоров, канд. техн. наук

АСПЕКТИ ОДНОВИМІРНОЇ ГАЗОДИНАМІКИ КАНАЛУ З ТЕРТЯМ І ТЕПЛООБМІНОМ

Інститут проблем моделювання в енергетиці Національної академії наук України

Розглянуто другий спосіб аналітичного розв'язування задачі течії одновимірного стаціонарного стисливого газу в каналі постійного перерізу з заданим тепловим потоком і тертям. Проаналізовано можливість одержання аналітичних розв'язків за інших граничних умов. Запропоновано шляхи подальшого дослідження і застосування отриманого аналітичного розв'язку в інженерній практиці.

Вступ

Сучасний стан моделювання й оптимізації стаціонарних режимів теплових систем різного призначення характеризується використанням одновимірних і точкових моделей.

Базовою моделлю є модель каналу з постійною площею перерізу. Існує низка таких моделей.

Зазвичай це аналітичні розв'язки, отримані за різними спрощеннями, які мають прості математичні форми, що є важливим у разі їх використання в інженерній практиці.

Одним з основних спрощень є нестисливість рідини.

На підставі рівняння Бернуллі створена велика кількість моделей для каналів інших форм [1]. Теплові характеристики каналу (температура, ентальпія) за таким припущенням сполучаються зі швидкістю тільки через властивості рідини, наприклад, теплоємність.

Якщо ж властивості рідини постійні, то теплова і гідродинамічна складові незалежні.

Отже, їх розв'язок може проводитися окремо, що суттєво полегшує моделювання на базі систем, які складаються з них.

У разі відсутності теплообміну і тертя маємо ізентропічну модель, яку зазвичай використовують під час аналізу течій із великими швидкостями, коли вже потребується врахування стисливості робочої рідини в коротких каналах складної форми, тобто там, де форма (інерційність) відіграє вирішальну роль. Ураховуючи тертя, приходимо до моделі неізентропічної адіабати, яку застосовують у коротких добре теплоізольованих каналах, наприклад, у системах кондиціювання повітря літаків. У свою чергу, ізотермічну модель каналу використовують під час моделювання стаціонарної гідродинаміки в трубопроводах транспортування природного газу.

Модель, яка отримана за припущенням, що щільність і швидкість вздовж каналу змінюються лінійно [2], використовують під час моделювання теплообмінних апаратів.

Мета створення цієї моделі – впровадити теплообмін (неізотермічний) і стисливість та отримати приблизну модель сполученої течії, тобто коли різниця температур вже впливає безпосередньо на втрати тиску і швидкості у каналі. Інтегрування цієї моделі можливе і відбувається тільки при постійних значеннях властивостей робочої рідини.

Формули для наведених моделей давно стали класикою термодинаміки, гідродинаміки і газодинаміки взагалі та теплових систем, зокрема.

Вважалося, що нових аналітичних розв'язків знайти вже неможливо, однак у працях [3; 4] показано, що існує загальний і частковий розв'язки ще однієї задачі в галузі газодинаміки – задачі течії стисливого ідеального газу в каналі постійного перерізу з заданим значенням тертя і теплового потоку.

Це на сьогодні – єдиний у світі аналітичний розв'язок, який ураховує спільну дію теплообміну і тертя в такій постановці.

Система нелінійних звичайних диференціальних рівнянь має вигляд:

– рівняння неперервності:

$$\frac{d(\rho v)}{dx} = 0\,; \qquad (1)$$

– рівняння імпульсу:

$$\rho\, v\frac{dv}{dx} + \frac{dP}{dx} = -\frac{4\tau_W}{D_h}\,; \qquad (2)$$

– рівняння енергії:

$$\frac{d}{dx}\left(c_P T + \frac{1}{2}v^2\right) = q_x\,, \qquad (3)$$

де ρ – щільність; v – швидкість газу; P – тиск; τ_W – дотична напруга тертя:

$$\tau_W = \frac{1}{2} f \rho v^2\,,$$

де f – коефіцієнт тертя Фаннінга; D_h – гідравлічний діаметр; c_P – теплоємність при постійному тиску; T – температура; q_x - щільність теплового потоку, віднесена до одиниці масової витрати.

Аналітичний розв'язок системи (1)–(3) отримано шляхом заміни змінних за допомогою комплексу

$$z = \frac{T}{P}$$

і має такий вигляд:

$$P = -\frac{1}{gR}\left(\frac{gRG}{F}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{c}}\left\{\frac{a}{\sqrt{a+cz^2}}\left(1-\frac{b}{2c}\right)\times\right.$$

$$\left.\times \ln\left|z+\frac{\sqrt{a+cz^2}}{\sqrt{c}}\right| + \frac{b}{\sqrt{c}}\frac{z}{2}\right\} + \mathrm{const}\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a+cz^2}};$$

$$-\frac{1}{gR}\left(\frac{gRG}{F}\right)^2\left(1-\frac{b}{2c}\right)\frac{a}{c}\frac{z\ln\left(z+\sqrt{\left|z^2+\frac{a}{c}\right|}\right)}{\sqrt{\left|z^2+\frac{a}{c}\right|}}+$$

$$+\mathrm{const}\frac{z}{\sqrt{\left|z^2+\frac{a}{c}\right|}} - \frac{q_x}{c_p}L - C = 0;$$

$$a = q_x;$$

$$b = \left(\frac{gRG}{F}\right)^2 \frac{2f}{D_\mathrm{h}};$$

$$c = c_P\frac{1}{gR}\left(\frac{gRG}{F}\right)^2\frac{2f}{D_h},$$

де g – гравітаційна стала; R – газова стала; G – масова витрата; F – площа каналу.

Мета статті – аналіз можливості отримання інших форм розв'язків задачі (1)–(3) і аналітичних розв'язків за інших граничних умов та визначення кола задач, актуальних для застосування аналітичного розв'язку в інженерній практиці. Необхідність інших форм розв'язків може дозволити полегшити його аналіз або/і розв'язання інших варіантів задач, зумовлених іншим складом змінних.

Друга форма часткового розв'язку

Перепишемо рівняння (1)–(3) у вигляді

$$\rho\, v\frac{dv}{dx} + \frac{dP}{dx} = -\frac{4\tau_W}{D_h}, \tag{4}$$

$$c_p\frac{dT^*}{dx} = q_x, \tag{5}$$

$$T^* = T + \frac{v^2}{2c_p}. \tag{6}$$

З формули (6), яка є визначенням температури гальмування, маємо

$$v^2 = 2c_p\left(T^* - T\right). \tag{7}$$

Вилучаючи з рівняння (4) тиск за допомогою рівняння стану ідеального газу, отримуємо

$$F\frac{d(\rho gRT)}{dx} + G\frac{dv}{dx} = -\frac{2f}{D_h}Gv. \tag{8}$$

Після підстановки до виразу (8) рівняння неперервності (1), маємо

$$gRG\frac{d\left(\frac{T}{v}\right)}{dx} + G\frac{dv}{dx} = -\frac{2f}{D_h}Gv. \tag{9}$$

Після диференціювання і множення на швидкість формула (9) набуває вигляду

$$\frac{dT}{dx} - \frac{1}{2}\frac{T}{v^2}\frac{dv^2}{dx} + \frac{1}{2gR}\frac{dv^2}{dx} = -\frac{1}{gR}\frac{2f}{D_h}v^2. \tag{10}$$

Диференціювання рівняння (7)

$$\frac{dv^2}{dx} = 2c_p\frac{d\left(T^*-T\right)}{dx} \tag{11}$$

дозволяє отримати рівняння (11) у такій формі:

$$\frac{d\left(T^*-T\right)}{dx} - \frac{dT^*}{dx} + \frac{1}{2}\frac{T}{\left(T^*-T\right)}\frac{d\left(T^*-T\right)}{dx} -$$

$$-\frac{c_p}{gR}\frac{d\left(T^*-T\right)}{dx} = \frac{2f}{D_h}\frac{2c_p}{gR}\left(T^*-T\right). \tag{12}$$

Впровадження нової змінної

$$y = \left(T^* - T\right)$$

перетворює рівняння (12) до такого вигляду

$$\frac{dy}{dx} - \frac{dT^*}{dx} + \frac{1}{2}\frac{T^*-y}{y}\frac{dy}{dx} - \frac{c_p}{gR}\frac{dy}{dx} = \frac{2f}{D_h}\frac{2c_p}{gR}y. \tag{13}$$

Після підстановки до рівняння (13) рівняння (5) маємо

$$\left[\left(1-\frac{2c_p}{gR}\right)y + T^*\right]\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{2f}{D_h}\frac{2c_p}{gR}y + \frac{q_x}{c_p}\right)y. \tag{14}$$

Далі почленний поділ рівняння (14) на рівняння (5) призводить, у свою чергу, до такого рівняння

$$\left[\left(1-\frac{2c_p}{gR}\right)y + T^*\right]\frac{dy}{dT^*} = 2\left(\frac{1}{a}y + 1\right)y, \tag{15}$$

де $a = \dfrac{\frac{q_x}{c_p}}{\frac{2f}{D_h}\frac{2c_p}{gR}}$.

Після здійснення нескладних перетворень вочевидь, що диференціальне рівняння (15) є лінійним:

$$\frac{dT^*}{dy}-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{1}{a}y+1\right)y}T^*=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2c_p}{gR}\right)\frac{1}{\left(\frac{1}{a}y+1\right)}.$$

Це дає змогу легко отримати розв'язок рівняння (15)

$$T^*=e^{-\int R(y)gy}\left[\int Q(y)e^{\int R(y)dy}dy+\text{const}\right],$$

де

$$R(y)=-\frac{1}{2}a\frac{1}{(y+a)y},\ Q(y)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2c_p}{gR}\right)a\frac{1}{(y+a)};$$

$$\int R(y)dy=-\frac{1}{2}f\int\frac{dy}{(y+a)y}=\ln\left|\frac{(y+a)}{y}\right|^{\frac{1}{2}};$$

$$e^{-\int R(y)\cdot dy}=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{(y+a)}};$$

$$\int Q(y)e^{\int R(y)dy}du=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2c_p}{gR}\right)a\int\frac{dy}{\sqrt{\left(y+\frac{1}{2}a\right)^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2c_p}{gR}\right)a\ln\left|y+\frac{1}{2}a+\sqrt{\left(y+\frac{1}{2}a\right)^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}\right|.$$

Насамкінець, після ряду простих перетворень розв'язок набуває вигляду

$$\Phi=\frac{\sqrt{(y+a)}}{\sqrt{y}}T^*-\frac{a}{2}\left(1-\frac{2c_p}{gR}\right)\times$$

$$\times\ln\left|y+\frac{1}{2}a+\sqrt{y(y-a)}\right|=\text{const}. \qquad (16)$$

З рівняння (16) помітно, що його складові мають розмір температури. Отже, рівняння (16) визначає певну температуру Φ, яка є постійною вздовж каналу.

Інтеграл рівняння (5)

$$c_p\left(T_2^*-T_1^*\right)=q_xL$$

разом із рівнянням (16) являють собою аналітичний розв'язок системи (1)–(3).

Часткові розв'язки за інших граничних умов

Якщо провести аналогічну заміну змінних і перетворення, які були продемонстровані для задачі з заданим тепловим потоком і тертям, але для течії з тертям і теплообміном, заданим у формі граничної умови третього роду:

– рівняння імпульсу

$$\rho v\frac{dv}{dx}+\frac{dP}{dx}=-\frac{4\tau_W}{D_h}, \qquad (17)$$

– рівняння енергії

$$c_pG\frac{d}{dx}\left(T+\frac{v^2}{2c_p}\right)=\Pi K\left(T_w-T-\frac{v^2}{2c_p}\right), \qquad (18)$$

де Π – периметр канала; K – коефіцієнт теплопередачі; T_w – температура довкілля.

Отримаємо диференціальне рівняння

$$z^3\frac{\left[\frac{\Pi K}{c_p}T_\infty+\left(\frac{2f}{D_h}G-\frac{\Pi K}{c_p}\right)T^*\right]}{\frac{\Pi K}{c_p}\left(T_\infty-T^*\right)}\frac{dT^*}{dz}=-\left(T^*z^2-gR\right). \quad (19)$$

Рівняння (19) може бути приведено до канонічного вигляду за допомогою ряду перетворень, а саме, до загального рівняння Ріккаті, яке в загальному випадку не має аналітичного розв'язку. Отже, можна припустити, що не може бути отримано інших аналітичних розв'язків. Тим самим аналітичний розв'язок, отриманий автором, замикає сторінку аналітичних розв'язків одновимірної газової динаміки каналів.

Висновки

1. Продемонстровано другий спосіб отримання аналітичного розв'язку системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, що описують одновимірну газодинаміку ідеального газу в каналі постійного перерізу з тертям і теплообміном з граничними умовами другого роду.
2. Показано, що при постановці задачі з граничними умовами першого та третього роду неможливо отримати нових аналітичних розв'язків, тобто визначено межу, поза якою розв'язки треба шукати числовими методами.

Актуальним є детальне дослідження аналітичного розв'язку і сфери його застосування для подальшого використання у моделюванні фізичних процесів і об'єктів, не застосовуючи числових методів розв'язування систем диференціальних рівнянь. Це призводить до необхідності проведення досліджень вибору схеми числового інтегрування для досягнення збіжності процесу моделювання, що не завжди є можливим взагалі для певних диференціальних рівнянь, а також зменшення похибки в часі процесу інтегрування, що веде частіше до значного збільшення часових витрат для досягнення його збіжності.

Зменшення кроку інтегрування не завжди призводить взагалі до результату. Якщо ж така вдала схема інтегрування нарешті знайдена, тоді виникає інше питання щодо необхідної кількості часу для моделювання системи, яка складається з сотень таких елементів. Власне, альтернативою може бути аналітичний розв'язок.

Якщо уважно придивитися до рівнянь (3) і (19), можна відзначити першу модель, що поширює область застосування аналітичного розв'язку.

Рівняння балансу енергії відрізняються тільки правими частинами. Між ними є такий зв'язок

$$q_x = \frac{\Pi K}{G}\left(T_w - T - \frac{v^2}{2c_p}\right). \quad (20)$$

Якщо до того ж замінити цілий канал великою кількістю менших каналів і ітераційно узгоджувати праву і ліву частини рівняння (20), тобто граничну умову третього роду через розв'язок задачі з граничною умовою другого роду, тоді отримуємо числово-аналітичний метод розв'язку постановки задачі (17), (18).

Чим менша довжина елементарного каналу, тим точніша апроксимація моделі (17), (18) аналітичним розв'язком.

Впровадження додаткової ітерації, не має нічого спільного з числовою дифузією, яка спостерігається в числових методах.

Крім того, такий поділ на елементарні канали дозволяє також на ітерації враховувати нелінійну залежність і непостійність усіх коефіцієнтів рівнянь (1)–(3), (17)–(18) від змінних моделі.

Рівняння (3) нічого не говорить про спосіб підведення (відведення) тепла. Це означає, що аналітичний розв'язок є незалежним від способу підведення. Він у зв'язку з адитивністю різних форм підведення енергії може служити для апроксимації більш складних фізичних процесів, наприклад, течій з внутрішнім виділенням тепла (фазові переходи, хімічні реакції).

У такому разі напрям досліджень – застосування такого підходу до моделювання теплообмінних апаратів, їх систем та організації процесу моделювання.

Іншим напрямом досліджень може бути підбір існуючих або розробка нових числових ефективних методів інтегрування рівнянь (1)–(3), які містять властивості аналітичного розв'язку. Якщо подібне буде можливе, такий числовий метод може бути поширений на цілий клас більш складних задач одновимірної газодинаміки.

Література

1. *Идельчик И.Е.* Справочник по гидравлическим сопротивлениям. – М.: Машиностроение, 1992. – 672 с.

1. *Кэйс В.М., Лондон А.Л.* Компактные теплообменники. – М.: Энергия, 1967. – 160 с.

2. *Федоров М.Ю.* Сравнительный анализ моделей течения газа в прямом канале с теплообменом // Моделювання та інформційні технології: Зб. наук. пр. ІПМЕ НАН України. – 2003. – № 24. – С. 3–9.

3. *Fedorov M.* Mathematical analysis of modeling stationary compressible flow of perfect gas // Proc. of the NAU. – 2003. – №2(17). – P. 96–99.

Стаття надійшла до редакції 02.03.06.

Рассмотрен второй способ аналитического решения задачи течения одномерного стационарного сжимаемого газа в канале постоянного сечения с заданным тепловым потоком и трением. Проанализирована возможность получения аналитического решения при других граничных условиях. Предложены пути дальнейшего исследования и применения полученного аналитического решения в инженерной практике.

In the paper the second form of analytical solution is obtained for the problem of one-dimensional steady compressible flow of perfect gas with constant heat flux and friction in the constant-area duct. The possibility is analyzed for obtaining analytical solutions under other boundary conditions. The future studies and application of the analytical solution in engineering practice is discussed.