УДК 629.735.083(045)

І.І. Лiннiк

ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ СИСТЕМ ТЕХНІЧНОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ ТРАНСПОРТНИХ ЛІТАКІВ

НАУ, кафедра авіаційних двигунів, e-mail: avia_icao@mail.ru

Розглянуто алгоритми безумовної й умовної оптимізації марковських моделей систем технічного обслуговування транспортних літаків, які можна використовувати при відпрацюванні програм технічної експлуатації

Вступ

Важливий етап при аналізі й синтезі систем технічного обслуговування (ТО) – оптимізація їхніх параметрів.

Однак, незважаючи на просте формулювання задачі безумовної оптимізації, її розв'язання методом простого перебору неможливо.

Цільову функцію $g(X)$ в явному вигляді не вдається виразити внаслідок її громіздкості. Вона, як правило, задається системою рівнянь і є досить багатовимірною (до декількох десятків змінних), часто не має зручної властивості опуклості.

Через свою складність ця функція частіше всього не піддається аналітичному диференціюванню.

В таких умовах застосовують методи оптимізації, які не використовують похідні і враховують багатоступеневість марковського процесу, тому що при цьому розмірність задачі знижується до розмірності розв'язання на кожному кроці [1]. Цим пояснюється, що для розв'язання задачі застосовують один із найбільш ефективних алгоритмів – алгоритм Р. Ховарда [2], який є варіантом динамічного програмування і використовується для оптимізації марковських моделей. Він потребує тільки знання значень самої оптимізованої функції. Ефективність цього алгоритму підтверджена в працях [3; 4].

Постановка завдання – методика оптимізації параметрів систем ТО за даними експлуатації [5].

Підготовка вихідних даних

До вихідних даних для розв'язання задачі належать кількість N можливих станів об'єкта контролю (ОК), кількість k варіантів параметрів системи ТО ОК, матриця A^k інтенсивностей переходів, яка характеризує інтенсивність переходу з i-го стану в j-й стан при виборі k-го варіанта і складається для кожного стану:

$$A^{(k)}=\begin{Vmatrix} a_{i1}^{(1)} & a_{i2}^{(1)} & \dots & a_{iN}^{(1)} \\ a_{i1}^{(2)} & a_{i2}^{(2)} & \dots & a_{iN}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}^{(k)} & a_{i2}^{(k)} & \dots & a_{iN}^{(k)} \end{Vmatrix}; \qquad (1)$$

аналогічна матриця $C^{(k)}$ прибутків:

$$C^{(k)}=\begin{Vmatrix} c_{i1}^{(1)} & c_{i2}^{(1)} & \dots & c_{iN}^{(1)} \\ c_{i1}^{(2)} & c_{i2}^{(2)} & \dots & c_{iN}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1}^{(k)} & c_{i2}^{(k)} & \dots & c_{iN}^{(k)} \end{Vmatrix}.$$

Початкове наближення

За підготовленими вхідними даними знаходяться безпосередньо очікувані прибутки в кожному зі станів і для кожного варіанта:

$$q_i^{(k)}=c_{ii}^{(k)}+\sum_{i\neq j} a_{ij}^{(k)} c_{ij}^{(k)}, \qquad (2)$$

які зображають як вектор-стовпці $\left\| q_i^{(k)} \right\|$. У кожному зі станів треба вибрати варіант k_{mi}, якому відповідає максимальний очікуваний прибуток. Результати вибору записують як вектор-розв'язок:

$$f_0=\begin{Vmatrix} k_{m1}^{(0)} & k_{m2}^{(0)} & \dots & k_{mN}^{(0)} \end{Vmatrix}.$$

Виходячи з вектора-розв'язку f_0, складається нова матриця $A^{(k_{mi})}$ інтенсивностей переходів, в якій її рядки дорівнюють рядкам матриці інтенсивностей переходів $A^{(k)}$, що відповідають варіантам з максимальними прибутками в кожному стані:

$$A^{(k_{mi})}=\begin{Vmatrix} a_{i1}^{(k_{m1})} & a_{i2}^{(k_{m1})} & \dots & a_{iN}^{(k_{m1})} \\ a_{i1}^{(k_{m2})} & a_{i2}^{(k_{m2})} & \dots & a_{iN}^{(k_{m2})} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}^{(k_{mN})} & a_{i2}^{(k_{mN})} & \dots & a_{iN}^{(k_{mN})} \end{Vmatrix}. \qquad (3)$$

Прибутки, які відповідають рядкам отриманої матриці $A^{(k_{mi})}$, складають вектор-стовпець очікуваних прибутків:

$$\left\| q_{i1}^{(k)} \right\| = \begin{Vmatrix} q_{i1}^{(1)} \\ q_{i1}^{(2)} \\ \vdots \\ q_{i1}^{(N)} \end{Vmatrix}. \qquad (4)$$

Визначення відносної ваги

У систему рівнянь підставляємо значення інтенсивностей переходів (3) і вектор-стовпця (4) відповідно для кожного зі станів.

У результаті одержимо систему N лінійних рівнянь з $(N+1)$ невідомими:

$$g = q_1 + \sum_{j=1}^{N} a_{1j}^{(k_{m1})} V_j \ ; \tag{5}$$

$$g = q_2 + \sum_{j=1}^{N} a_{2j}^{(k2)} V_j \ ;$$

. . . .

$$g = q_N + \sum_{j=1}^{N} a_{Nj}^{(k_{mN})} V_j \ .$$

Якщо $V_N = 0$, знаходимо значення інших невідомих $V_1, V_2, \ldots, V_{N-1}$ і g.

Поліпшення розв'язку

У кожному зі станів для кожного варіанта обчислюються критерії:

$$q_{i1}^{(k)} = q_i^{(k)} + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(k)} V_j \ , \tag{6}$$

в яких V_j дорівнюють значенням, отриманим з розв'язку системи рівнянь (5).

Результати обчислень записують як вектор-стовпець $\left\| q_{i1}^{(k)} \right\|$.

За наявними даними у кожному зі станів вибирається варіант, якому відповідає максимальний критерій (6). Оскільки окремі критерії (6) для кожного стану залежать від невеликої кількості компонент вектора X, вибір максимального значення легко здійснюється методом повного перебору, який гарантує знаходження глобальних максимумів і робить непотрібним висувати які-небудь спеціальні вимоги до функцій, які використовуються в задачі (типу опуклості, безперервності, гладкості).

Результати вибору записуються як вектор-розв'язок

$$f_1 = \left\| k_{m1}^{(1)} \quad k_{m2}^{(1)} \quad \ldots \quad k_{mN}^{(1)} \right\|.$$

Якщо елементи вектор-розв'язків f_0 і f_1 збігаються, то розв'язок знайдений, тобто ітераційна процедура поліпшення розв'язку призвела до вибору оптимального варіанта системи ТО. Інакше необхідно продовжувати процедуру поліпшення розв'язку. Наведений алгоритм має три властивості [2]:

– визначення оптимального розв'язку в процесі послідовних розв'язувань зводиться до розв'язку системи лінійних рівнянь з наступним порівнянням;

– кожний наступний розв'язок, який знаходиться за допомогою ітераційного циклу, має більший прибуток, ніж попередній;

– ітераційний цикл має кінець при одержанні розв'язку, який забезпечує найбільший прибуток у задачі.

Доведення другої і третьої властивостей ітераційного циклу у випадку безперервного часу може бути отримано аналогічно випадку дискретного часу [2].

Припустимо, що, знайшли деякий розв'язок X^A і в результаті його поліпшення було отримане розв'язок X^B, відмінний від X^A. Тоді справедлива нерівність для частинних критеріїв (6).

$$q_i^B + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^B V_j^A \geq q_i^A + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^A V_j^A \ .$$

Позначимо

$$C_i = q_i^B + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^B V_j^A - q_i^A - \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^A V_j^A \ , \tag{7}$$

при цьому $C_i \geq 0$, $\forall i \in N$.

Випишемо рівняння визначення ваги (5) для розв'язків X^A і X^B:

$$g^A = q_i^A + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^A V_j^A \ ; \tag{8}$$

$$g^B = q_i^B + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^B V_j^B \ . \tag{9}$$

Віднімемо рівняння (8) із формули (9):

$$g^B - g^A = q_i^B + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^B V_j^B - q_i^A - \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^A V_j^A \ . \tag{10}$$

З врахуванням виразу (7) одержимо

$$g_i^B - g_i^A = C_i - \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^B V_j^A + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^A V_j^A \ . \tag{11}$$

Підставимо різницю (11) в рівняння (10):

$$g^B - g^A = C_i + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^B \left(V_j^B - V_j^A \right).$$

Позначимо

$$\Delta g = g^B - g^A \ ;$$

$$\Delta V_j = V_j^B - V_j^A \ ,$$

тоді

$$\Delta g = C_i + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^B \Delta V_j, \ i = \overline{1, N} \ . \tag{12}$$

Якщо i-те рівняння системи (12) помножити на межову ймовірність P_i^B відповідного стану і потім отримати суму за всіма i, то одержимо:

$$\Delta g \sum_{i=1}^{N} P_i^B = \sum_{i=1}^{N} P_i^B C_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^B \Delta V_j P_i^B \ .$$

Змінивши порядок отримання суми:

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} a_{ij}^{B}\Delta V_j P_i^B =$$
$$= \Delta V_1\left(a_{11}^B P_1^B + a_{21}^B P_2^B + \ldots + a_{N1}^B P_N^B\right) +$$
$$+ \Delta V_2\left(a_{12}^B P_1^B + a_{22}^B P_2^B + \ldots + a_{N2}^B P_N^B\right) + \ldots +$$
$$+ \Delta V_2\left(a_{12}^B P_1^B + a_{22}^B P_2^B + \ldots + a_{N2}^B P_N^B\right) + \ldots +$$
$$+ \Delta V_N\left(a_{1N}^B P_1^B + a_{2N}^B P_2^B + \ldots + a_{NN}^B P_N^B\right), \quad (13)$$

бачимо, що кожний вираз в дужках формули (13) дорівнює нулю.

З погляду на те, що

$$\sum_{i=1}^{N} P_i^B = 1,$$

одержимо

$$\Delta g = \sum_{i=1}^{N} P_i^B C_i \,. \quad (14)$$

Оскільки всі P_i^B і C_i не негативні, $\Delta g \geq 0$. Зокрема, g^B буде більше g^A, якщо хоча б в якому-небудь стані збільшення критерію (6) позитивне.

Отже, неубування (збільшення) критеріїв (6) у процесі ітерацій веде до неубування (збільшення) цільової функції $g(X)$. Якщо при цьому прибутки залишаються обмеженими, то величина g прагне до межі. Якщо кількість варіантів розв'язків X має межу, то вона досягається за обмежену кількість ітерацій, причому є глобальним максимумом цільової функції $g(X)$.

Якщо припустити, що це не так, тобто g^A є глобальним максимумом функції $g(X)$, але послідовне використання процедури поліпшення розв'язку призводить до розв'язку $g^A \geq g^B$, тоді у всіх станах $C_i \leq 0$ (7). Оскільки $P_i^B > 0$ для всіх i, то рівняння (14) показує, що

$\Delta g = g^A - g^B \leq 0$.

Але за припущенням, що g^A – глобальний максимум, повинна виконуватися нерівність $g^A \geq g^B$. Це протиріччя розв'язується лише при $g^A = g^B$. Отже, алгоритм збігається до глобального максимуму цільової функції.

Використання безумовної оптимізації параметрів систем ТО має більшою мірою дослідницький характер ніж практичний. В експлуатації потрібно враховувати велику кількість обмежень, тому на практиці виконується умовна оптимізація параметрів систем ТО. Серйозною перешкодою для застосування ітераційного алгоритму оптимізації марковських моделей Р. Ховарда при розв'язанні задачі умовної оптимізації є наявність у ній обмежень.

Задача умовної оптимізації може бути розв'язана і як задача безумовної оптимізації.

Проте потрібно попереднє визначення множини G^* значень параметра x системи ТО, які забезпечують заданий рівень складової узагальненого показника надійності, для чого необхідно багаторазове розв'язування системи рівнянь.

Розв'язок задачі умовної оптимізації може бути отримано із задачі безумовної оптимізації вигляду:

$$\max : g(X); \ \forall x \in G,$$

де G – множина можливих керованих параметрів системи ТО.

Але для цього при виборі вектор-розв'язків f_i необхідно перевіряти, чи забезпечують інтенсивності переходів, які відповідають цьому розв'язку, необхідному рівню показника надійності, тобто щораз розв'язувати систему рівнянь. Через те, що в обох випадках практично неможливо забезпечити повний перебір параметрів x системи ТО, можна одержати тільки субоптимальний розв'язок.

Усунення цього недоліку можна домогтися зведенням задач на умовний екстремум до задач безумовної оптимізації за допомогою методів узагальнених множників Лагранжа і штрафних функцій [6; 7].

Метод узагальнених множників Лагранжа можна застосовувати для умовної оптимізації марковських моделей у вигляді мінімізації:

$$\Phi(\Lambda, X) = g(X) + \sum_m \lambda_m \left| \min[0, C_m(X)] \right|.$$

Проте в ряді випадків великі значення множників λ_m призводять до труднощів під час розрахунків.

Для забезпечення опуклості цільової функції в околі розв'язку можна використовувати метод штрафних функцій [5], за допомогою якого задача зводиться до задачі максимізації:

$$\Phi(\Lambda, X) = g(X) + \sum_m \lambda_m [C_m(X)]_-^2, \quad (15)$$

$$\text{де} \ [C_m(X)]_- = \min[0, C_m(X)]. \quad (16)$$

Зведемо за допомогою методу штрафних функцій задачу умовної оптимізації до безумовної та застосуємо алгоритм безумовної оптимізації марковських моделей, перероблений з урахуванням нового вигляду цільової функції.

Цільова функція може бути отримана з урахуванням системи рівнянь (5). При цьому функція Лагранжа (15) перетвориться в еквівалентну їй систему рівнянь по одному на кожен стан марковської моделі шляхом підставлення в рівняння (15) виразу для визначення g із системи (5):

$$\Phi = q_i + \sum_{j=1}^{N} a_{ij} V_j + \sum_m \lambda_m [C_m(X)]_-^2, \ i = \overline{1, N} \,. \quad (17)$$

Праві частини системи (17) розглядаються як частинні критерії, що максимізуються незалежно для кожного стану:

$$\Psi_i = q_i + \sum_{j=1}^{N} a_{ij} V_j + \sum_m \lambda_m \left[C_m(X)\right]_-^2, \; i = \overline{1, N}. \qquad (18)$$

Критерії (18) відрізняються від відповідних критеріїв (6) методу Р. Ховарда наявністю штрафних членів $\sum_m \lambda_m \left[C_m(X)\right]^2$, а багатовимірна задача максимізації функції Лагранжа (15) перетворюється в серію задач максимізації частинних критеріїв (18) малої розмірності.

Розв'язання задачі

Цю серію задач розв'язують за таким алгоритмом.

1. Для початкового наближення формують вхідні дані у вигляді матриць $A^{(k)}$ інтенсивностей переходів (1) і прибутків $C^{(k)}$, за якими визначають безпосередньо очікувані прибутки $q_i^{(k)}$ (2).

У кожному стані методом перебору вибирають варіант k_{mi}, якому відповідає максимальний очікуваний прибуток, і формується початковий вектор-розв'язок f_0 (3).

Виходячи з цього розв'язку, складають нові матриці $A^{(k_{m0})}$ і $\left\| q_i^{(k_{mi})} \right\|$ – рівняння (3), (4).

2. Для визначення відносної ваги розв'язують систему рівнянь (5) відносно g і V_j:

$$g = q_i + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(k_{mi})} V_j\,; \; V_N = 0. \qquad (19)$$

3. Для поліпшення розв'язку максимізують частинні критерії Ψ_i:

$$\max_{X_i} : \Psi_i(X); \; X_i \in X. \qquad (20)$$

Значення V_j у виразі (18) для Ψ_i беруть із розв'язку системи рівнянь (19), значення λ_m, доцільно взяти однаковими для всіх i і рівними 10–100, крім станів, на ймовірності яких не накладено обмеження. У цьому разі вони дорівнюють нулю.

У кожному стані методом перебору, оскільки частинні критерії Ψ_i так само, як і $q_i^{(k)}$ (6), залежать від малої кількості параметрів вектора $C^{(k)}$, вибирають варіант, якому відповідає максимальний критерій (20), і формують вектор-розв'язок

$$f_1 = \left\| k_{m1}^{(1)}, k_{m2}^{(1)}, \ldots, k_{mN}^{(1)} \right\|.$$

4. Контроль завершення ітерацій – якщо хоча б один елемент вектор-розв'язків f_0 і f_1 не збігається, то необхідно продовжувати процедуру поліпшення розв'язку, для чого повертаємося до п. 2. Інакше розв'язок задачі отримано.

При повільній збіжності процесу доцільно збільшити відповідні множники λ_m, після чого керування передається на п. 3 алгоритму.

Для вибору порядку величин λ_{im} та їхнього уточнення доцільно використовувати залежність:

$$\lambda_{im} = \left| \frac{g_i^{\max}(X_i) - g_i^{\min}(X_i)}{\left[C_m^{\max}(X_i)\right]_-^2 - \left[C_m^{\min}(X_i)\right]^2} \right|,$$

де $\left[C_m^{\max}(X_i)\right]_-^2$, $\left[C_m^{\min}(X_i)\right]^2$ – відповідно найбільше і найменше значення, за функціями варіювання значень компонентів X_i.

Доведення, що розв'язок безумовної задачі оптимізації з цільовою функцією (16) еквівалентний розв'язку умовної задачі, тобто для розв'язання цієї задачі досить, щоб вектор X мав глобальний максимум функції (15) при фіксованих $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\tau\}$, можна провести так.

Нехай вектор X^A – глобальний максимум функції (15), тобто при будь-якому $X^B \neq X^A$:

$$\begin{aligned} & g(X^A) + \sum_m \lambda_m \left[C_m(X^A)\right]^2 \geq \\ & \geq g(X^B) + \sum_m \lambda_m \left[C_m(X^B)\right]^2. \end{aligned} \qquad (21)$$

При цьому нехай обидва вектори від X^A до X^B задовольняють обмеження задачі, тобто $C_m(X^A) \geq 0$ і $C_m(X^B) \geq 0$.

Тоді на підставі виразу (16)

$$\left[C_m(X^A)\right] = \left[C_m(X^B)\right] = 0.$$

Із виразу (21) випливає, що $g(X^A) \geq g(X^B)$, тобто максимізації функції (15) досить для розв'язання задачі.

Тепер покажемо збіжність запропонованого алгоритму до глобального максимуму. Для цього спочатку покажемо, що ітераційний цикл забезпечує збіжність до деякої межі. Припустимо, є два послідовних розв'язки X^A і X^B, таких, що $\Psi_i^B \geq \Psi_i^A$ для всіх i, тобто

$$\Delta\Psi_i = \Psi_i^B - \Psi_i^A \geq 0. \qquad (22)$$

Підставляючи в рівняння (22) вираз (18), одержимо:

$$\begin{aligned} \Delta\Psi_i = {} & q_i^B + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^B V_j^A + \sum_m \lambda_m \left[C_m^B(X)\right]^2 - \\ & - q_i^A - \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^A V_j^A - \sum_m \lambda_m \left[C_m^A(X)\right]^2. \end{aligned} \qquad (23)$$

Використовуючи вираз (17), знайдемо, $\Delta\Psi$ для розв'язків X^A і X^B:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi = {} & \Phi^B - \Phi^A = \\ = {} & q_i^B + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^B V_j^A + \sum_m \lambda_m \left[C_m^B(X)\right]^2 - \\ & - q_i^A - \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^A V_j^A - \sum_m \lambda_m \left[C_m^A(X)\right]^2. \end{aligned}$$

З погляду на рівняння (23) одержимо:

$$\Delta\Phi = \Delta\Psi_i + \sum_{j=1}^{N}\left(V_j^B - V_j^A\right)a_{ij}^B \,. \qquad (24)$$

Рівняння (24) має вигляд ідентичний виразу (12), отриманому під час доведення збіжності алгоритму безумовної оптимізації. Отже, подальше доведення аналогічне. Показавши, що $\Delta\Phi > 0$, можна зробити висновок, що з неубування частинних критеріїв Ψ_i (18) випливає неубування функції Лагранжа (17). У ході ітерацій функція збільшується і прагне до межі, якщо прибутки обмежені.

Доведення, що ця межа є глобальним максимумом, аналогічно наведеному для алгоритму безумовної оптимізації марковських моделей. Цим завершується обґрунтування алгоритму умовної оптимізації марковських моделей.

Для зведення задач умовної оптимізації до безумовної можна використовувати метод модифікованих функцій Лагранжа [4; 5; 8] і розв'язувати задачі для умовної оптимізації марковських моделей. Проте наявність у модифікованої функції Лаграгжа параметра зсуву θ хоча і призводить до зменшення величини множників λ_m, але ускладнює алгоритм і його машинну реалізацію.

Висновок

Розглянуті алгоритми безумовної та умовної оптимізації марковських моделей систем ТО мають недолік – вибір оптимальних параметрів системи ТО можливий, якщо в моделях систем ТО немає інтенсивностей переходів, які обчислюються через ті ж самі параметри. Цей недолік був відзначений у праці [1], де для його усунення такі параметри оптимізувалися тільки в складі одного (кожного) підвектора X_i, а інші підвектори оптимізації не піддавалися. Проте такий підхід трохи спотворює результати оптимізації.

Аналіз розглянутих типових моделей систем ТО показує, що поява залежних інтенсивностей пов'язаний з наявністю в моделях станів прихованих відмов і пошкоджень. Для одержання максимальних прибутків від експлуатації ОК (безумовна оптимізація) або необхідного значення ймовірності перебування ОК в працездатному стані при максимальних прибутках (умовна оптимізація) необхідно, з одного боку, збільшувати періодичність проведення РТО (зменшуються витрати на проведення РТО і втрати від планових знижень готовності ОК на РТО), а з іншого боку, – зменшувати її (зменшуються втрати від непрацездатності через перебування ОК в стані прихованих відмов).

З цього випливає, що закріплення оптимізованого параметра – періодичності проведення РТО – призведе до одержання розв'язку, відмінного від оптимального. Для усунення цього недоліку необхідно застосувати еквівалентне перетворення марковських моделей.

З графа станів розглядуваної моделі виключаються всі, крім одного, переходи, що описуються залежними інтенсивностями стану, з яких виходять ці інтенсивності, а також переходи, пов'язані з цими станами.

Для збереження фізичного змісту моделі необхідно, щоб прибутки, принесені при здійсненні виключених переходів і перебування у виключених станах, були враховані в інших переходах або станах моделі. Процедуру еквівалентного перетворення марковських моделей уведемо в блок формування матриць алгоритмів безумовної та умовної оптимізації систем ТО.

Література

1. *Блаженков В.В.* Введение в прикладную теорию полумарковских моделей эксплуатации сложных систем. – М.: МО СССР, 1979. – 67 с.

2. *Ховард Р.А.* Динамическое программирование и марковские процессы. – М.: Сов.радио, 1964. – 192 с.

3. *Герцбах И.Б.* Модели профилактики (теоретические основы планирования профилактических работ). – М.: Сов. радио, 1969. – 214 с.

4. *Шишонок Н.А., Репкин В.Ф. Барвинский Л.Л.* Основы теории надежности и эксплуатации радиоэлектронной техники. – М.: Сов. радио, 1964. – 551 с.

5. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. – М.: Наука, 1978. – 487 с.

6. *Фиакко А., Мак-Кормик Г.* Нелинейное программирование. – М.: Мир, 1972. – 240 с.

7. *Эверетт Х.* Решение задач оптимального распределения ресурсов с помощью обобщенного метода множителей Лагранжа // Оптимальные задачи надежности / Под ред. И.А. Ушакова. – М.: Изд-во стандартов, 1966. – 21 с.

8. *Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.К.* Модифицированные функции Лагранжа // Экономика и математические методы. – 1974. – № 3. – С. 18–27.

Стаття надійшла до редакції 12.01.06.

Рассмотрен алгоритм безусловной и условной оптимизации марковских моделей систем технического обслуживания транспортных самолетов, используемых при отработке программ технической эксплуатации.

The algorithm of unconditional and conditional optimization Markov models of maintenance systems of transport airplanes of their programs of technical operation used at improvement is considered.