АЕРОПОРТИ ТА ЇХ ІНФРАСТРУКТУРА

УДК 539.3

В.К. Циховський, д-р техн. наук
Н.О. Костира

АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ГНУЧКИХ ОБОЛОНОК СКЛАДНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ

НАУ, кафедра комп'ютерних технологій будівництва

Розглянуто напружено-деформований стан комбінованих конструкцій, основним елементом яких є гнучкі оболонки з ребрами і вставками: криволінійні тонкостінні труби, компенсатори, тороподібні оболонки з ребрами. Досліджено втрати локальної стійкості гнучких оболонок за межами пружності.

Вступ

Одним із найпоширеніших і ефективних числових методів, який використовується в інженерних розрахунках, є метод скінченних елементів (МСЕ).

Цей метод дозволяє врахувати різні граничні умови, зовнішні статичні й динамічні впливи на досліджувану конструкцію.

У запропонованій методиці під час дискретизації оболонкових систем використовуються скінченні елементи (СЕ) тонких, середньої товщини і товстих оболонок.

Метод СЕ належить до варіаційних методів і є одним з найбільш розповсюджених способів побудови наближених розв'язків нелінійних задач математичної фізики. При цьому сформульована варіаційна задача зводиться до систем нелінійних рівнянь великого порядку.

Вихідні співвідношення МСЕ побудовано на підставі варіаційних принципів з урахуванням геометричної і фізичної нелінійності в постановці задачі деформування і формозміни гнучких оболонкових систем.

Вихідні варіаційні рівняння руху подано в загальних криволінійних координатах у вигляді рівнянь у приростах з використанням співвідношень нелінійної теорії пружності та пластичності. Припускається, що в заданий момент часу t тверде тіло знаходиться в стані статичної рівноваги, а напружений стан і його передісторія відомі в кожній точці тіла.

На цей стан твердого тіла впливають прирости зовнішніх сил, що задаються в області S_1, або прирости переміщень (вимушених), що задаються в області S_2.

Завдання полягає у визначенні приростів переміщень, деформацій і напружень, що виникають у тілі, припускаючи, що прирости деформацій порівняно малі, але скінченні.

Аналіз досліджень і публікацій

Під час формулювання рівнянь стану пружність розглядається за Гріном, тобто вихідним визначальним рівнянням є співвідношення для питомої енергії деформації, що в найбільш загальному випадку використовується на підставі форми Фінгера [1].

Якщо зобразити функцію питомої енергії деформації поліномом (розкласти у ряд Тейлора) щодо тензора скінченних деформацій $U(\gamma'_{ij})$ у рівноважній конфігурації $C^t(\tau = t)$, то в збуреній (довільно близькій) конфігурації $C^{t+\Delta t}$, вона буде мати вигляд (отримаємо три члени ряду):

$$U(\gamma'_{ij} + \gamma_{ij}) = U(\gamma'_{ij}) + \frac{\partial U}{\partial \gamma'_{ij}}\gamma_{ij} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 U}{\partial \gamma'_{ij}\partial \gamma'_{mn}}\gamma_{ij}\gamma_{mn}, \quad (1)$$

де γ'_{ij} – компоненти тензора скінченних деформацій у C^t; γ_{ij} – компоненти приростів тензора скінченних деформацій Коші–Гріна, що зумовлені приростами вектора переміщень:

$$u^i = u^{*i} - u^{0i}. \quad (2)$$

Тензор напружень (другий симетричний Піола–Кірхгофа) у конфігурації C^t буде мати вигляд:

$$\sigma^{ij} = \frac{\partial U}{\partial \gamma^0_{ij}} + \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma^0_{ij}\gamma^0_{mn}},\ \gamma^0_{ij} \equiv \gamma'_{ij}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \gamma^0_{ij}} \equiv \sigma'^{ij};\ \sigma^{*ij} = \sigma'^{ij} + C^{ijmn}\gamma_{mn}, \quad (4)$$

де C^{ijmn} – компоненти тензора пружностей четвертого рангу:

$$C^{ijmn} = \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma'_{ij}\partial \gamma'_{mn}}.$$

Варіаційне рівняння руху в довільний момент t у приростах з урахуванням співвідношень (1)–(4) на підставі виразу (1) принципу віртуальної роботи і теорії пластичної течії з використанням критерію Треска–Мізеса має вигляд [2; 3]:

$$\int_{v}\left(\sigma' + \overset{(e,p)}{C_4}\cdot\cdot\,\gamma\right)\cdot\cdot\,\delta\gamma dv + ,$$

$$+\int_{v}\rho\ddot{\vec{u}}\,\delta\vec{u}dv - \int_{v}\vec{\rho}\,\delta\vec{u}dv - \int_{s}\vec{q}\,\delta\vec{u}ds = 0,$$

$$\overset{(e,p)}{C_4} = \overset{(e)}{C_4} - \beta nn;$$

$$n = \overset{\wedge}{\overset{(e)}{C_4}}\cdot\cdot\,\hat{f}_{,\tau} = 2\mu\left(\xi\hat{S} + \psi\hat{S}^2\right);$$

$$f(S,\alpha) = \frac{3}{2}\mathrm{I}_1\left(S^2\right)\cos^2\alpha;$$

$$\hat{f}_{\hat{S}} = \xi\hat{S} + \psi\hat{S}^2;$$

$$\alpha = \frac{1}{3}\arcsin\left(-\sqrt{6}\,\frac{\mathrm{I}_1\left(\hat{S}^3\right)}{\mathrm{I}_1^{3/2}\left(\hat{S}^2\right)}\right);$$

$$\xi = 3\left[\cos^2\alpha - \frac{\sqrt{3}\sin\alpha\,\mathrm{I}_1\left(\hat{S}^3\right)}{4\sqrt{2}\,\mathrm{I}_1^{3/2}\left(\hat{S}^2\right)\left(4\sin^2\alpha+1\right)}\right];$$

$$\psi = \frac{3\sqrt{3}\sin\alpha}{4\sqrt{2}\,\mathrm{I}_1^{1/2}\left(\hat{S}^2\right)\left(4\sin^2\alpha+1\right)};$$

де σ' – другий тензор початкових напружень Піола–Кірхгоффа; γ – тензор приростів скінченних деформацій Коші–Гріна, зумовлений збурюванням рівноважної конфігурації C^t і переходом її в конфігурацію $C^{t+\Delta t}$; $\vec{u}, \ddot{\vec{u}}$ – вектори приростів переміщень і прискорень; $\vec{\rho}, \vec{q}$ – узагальнені вектори об'ємних і поверхневих сил, що діють на тіло і належать до конфігурації C^t:

$\beta = \left(h + \hat{n}\cdot\cdot\,\hat{f}_{\hat{S}}\right)^{-1}$; $\mu, h, \hat{S}, \hat{S}^2$ – модуль зсуву, функція зміцнення матеріалу, тензор-девіатор напружень і квадрат тензор-девіатора напружень відповідно.

Використання рівняння у приростах переміщень, деформацій, напружень, а також тензорних рядів для цих об'єктів під час виведення співвідношень МСЕ дає можливість враховувати механічні ефекти, що пов'язані з нелінійним деформуванням і формозміною механічних систем.

При формуванні відповідних лінеаризованих систем рівнянь застосовують матриці приростів, що діють лінійно на прирости переміщень на окремо взятій ітерації загального нелінійного процесу деформування конструкцій. Кількість отриманих членів тензорних рядів залежить від ступеня використовуваних апроскимуючих функцій і може змінюватися від одного до трьох СЕ.

У процесі побудови різних скінченноелементних моделей, як правило, потрібно, щоб окремі СЕ мали досить просту геометричну форму, а інтерполяційні функції (функції форми) були достатньо простими, звичайно поліномами Лагранжа, Ерміта або Лежандра [3; 4].

Водночас вибір функції форми повинний забезпечувати безперервність апроксимуючої функції [3] на межах елементних границь і збіжність цієї дискретної функції до точного значення при зменшенні розмірів елементів. У зв'язку з цим на форму СЕ і на вигляд функцій форми накладаються суттєві обмеження. Якщо подати тензор-функції приростів скінченних деформацій і приростів напружень у тензорний ряд Маклорена в області $r_{(e)}$ з отриманням трьох членів ряду, маємо:

$$\hat{\gamma}_{(x_{(e)})} = \hat{\gamma}_{(0)} + \vec{r}_{(e)}\nabla\hat{\gamma}_{(0)} + \frac{1}{2}\vec{r}_{(e)}\nabla\nabla\hat{\gamma}^T_{(0)}\vec{r}_{(e)}; \qquad (5)$$

$$\hat{\sigma}_{(x_{(e)})} = \hat{\sigma}_{(0)} + \vec{r}_{(e)}\nabla\hat{\sigma}_{(0)} + \frac{1}{2}\vec{r}_{(e)}\nabla\nabla\hat{\sigma}^T_{(0)}\vec{r}_{(e)}, \qquad (6)$$

де $\hat{\gamma}_{(0)}$, $\hat{\sigma}_{(0)}$ – тензори скінченної деформації Коші–Гріна і напружень Піола–Кірхгоффа (другий симетричний) у центрі СЕ при $x^1 = x^2 = x^3 = 0$.

Під час наведення варіації енергії деформації СЕ з використанням рівняння стану узагальненого закону Гука, розповсюдженого на область скінченних деформацій, а також з урахуванням згорток тензора із симетричними тензорами переднапружень $\hat{\sigma}'$ і пружностей $\overset{\wedge}{C_4}$ (тензор четвертого рангу)

$$\overset{\wedge}{C_4}\cdot\cdot\,\hat{\gamma} = \overset{\wedge}{C_4}\cdot\cdot\left(\hat{\mathrm{E}} + \frac{1}{2}\nabla\vec{u}^T\right)\nabla\vec{u},$$

$$\hat{\sigma}'\cdot\cdot\,\delta\hat{\gamma} = \hat{\sigma}'\cdot\cdot\left(\hat{\mathrm{E}} + \nabla\vec{u}^T\right)\delta\nabla\vec{u}$$

вирази тензорних рядів (5),(6) можна зобразити через градієнти вектора переміщень вищих порядків:

$$\hat{\gamma}\left(x_{(e)}\right) = \nabla\overset{\rightarrow}{\overset{**}{u}}_{(0)} + \vec{r}_{(e)}\nabla\nabla\overset{\rightarrow}{\overset{**}{u}}_{(0)} + \frac{1}{2}\vec{r}_{(e)}\nabla\nabla\nabla\overset{\rightarrow T}{\overset{**}{u}}_{(0)}\vec{r}_{(e)},$$

$$\nabla\overset{\rightarrow}{\overset{**}{u}} \equiv \left(\hat{\mathrm{E}} + \frac{1}{2}\nabla\vec{u}^T\right)\nabla\vec{u}; \quad \nabla\overset{\rightarrow}{\overset{*}{u}} \equiv \left(\hat{\mathrm{E}} + \nabla\vec{u}^T\right)\nabla\vec{u},$$

де $\hat{\mathrm{E}}$ – одиничний метричний тензор для вихідної конфігурації C^t з використанням поточного формулювання Лагранжа.

Розглянемо варіацію енергії деформації для СЕ області $r_{(e)}$ щодо довільно деформованої конфігурації $C^t_{(e)}$, зумовленої приростами деформації Коші–Гріна γ_{ij} в довільно близькій конфігурації $C^{t+\nabla t}_{(e)}$, з урахуванням зображень еволюції деформування суцільного середовища:

$$\delta U\left(r_{(e)}\right) = \int_{\eta_{(e)}}\sigma^{*ij}\delta\gamma_{ij}\,d\upsilon_{(e)};$$

$$\sigma^{*ij} = \sigma'^{ij} + \sigma^{ij},$$

де σ^{*ij} – повний другий симетричний тензор напружень відносно конфігурації $C^{t=0}$.

Виконаємо інтегрування в криволінійному СЕ, коли переміщення напрямлені до прямолінійних косокутних координат, що збігаються із криволінійною місцевою системою координат у центрі СЕ. Отже, скористаємося отриманими виразами розкладань функцій деформацій і напружень у ряд Маклорена в області $r_{(e)}$ [4]. Відповідно до введених природних координат інтегрування в межах СЕ здійснюється від $x^i = -1/2$ до $x^i = +1/2$:

$$\delta U\left(r_{(e)}\right) = \int_{x^1=-1/2}^{x^1=+1/2} \int_{x^2=-1/2}^{x^2=+1/2} \int_{x^3=-1/2}^{x^3=+1/2} \sigma^{ij} \delta\gamma_{ij} \sqrt{G}\, dx^1 dx^2 dx^3 .$$

З урахуванням тензорних рядів після інтегрування одержимо:

$$\delta U\left(r_{(e)}\right) = \sqrt{G}\left(\overset{*}{N}{}^{ij}\, \delta \overset{*}{\xi}_{ij} + \frac{1}{12} \overset{*}{M}{}^{ij}_{k}\, \delta \overset{*}{\varphi}_{ij.k}\, \omega^{(kk)}_{(ij)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{144} \overset{*}{M}{}^{ij}_{ks}\, \delta^i_j \delta\psi_{ij.ks}\, \omega^{(kksks)}_{(siijj)} \right).$$

Постановка завдання

Криволінійні й циліндричні (кругові, еліптичні, прямокутні та ін.) труби, які навантажені на кінцях і зазнають впливу рівномірного нормального тиску, розраховуються на міцність, жорсткість і стійкість.

Головна увага приділяється деформаціям поперечного згину. У цьому разі найбільш повно виявляються властивості криволінійної труби (або циліндричної оболонки при великих переміщеннях згину) як гнучкої циліндричної або торової оболонки.

Під дією нормальних напружень, прикладених у поперечному перерізі, розтягнуті волокна труби зміщаються до центра, а стиснуті – від центра кривизни (рис. 1).

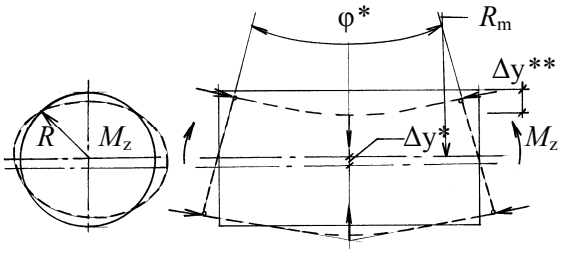

Рис. 1. Деформація в середньому перерізі при чистому згинанні труби

У разі застосування теорії гнучких оболонок результати розрахунку порівняно з результатами розрахунку за технічною теорією згину при тому самому куті вигину $\left(\varphi^*_1 - \varphi_1\right)$ у брусі суттєво відрізняються, тобто виникають значні напруження вигину стінки труби в поперечному напрямку. Це явище називають ефектом Кармана.

Розв'язок цієї задачі було отримано Т. Карманом шляхом використання тригонометричних функцій (рядів Фур'є) і апроксимацією переміщень за методом Рітца.

Під час великих переміщень виникає геометрична нелінійність, це впливає на залежність згинаючого моменту від змін кривизни. Ця зміна кривизни впливає на розподіл напружень. Крім того, волокна зміщаються до нейтральної лінії перерізу, як показано на рис. 1.

Отже, при поперечному згинанні, що збільшує кривизну труби, її жорсткість зменшується. Якщо згинаючий момент залежно від зміни кривизни осі досягає екстремуме, то при максимальному моменті різко збільшуються напруження і виникає втрата стійкості. Цей ефект вперше був описаний Л. Бразьє з використанням енергетичного методу [5].

Під час дослідження стійкості труби при згинанні в праці [5] розв'язувалася лінеаризована задача з припущеннями, що всі поперечні перерізи труби при її згинанні деформуються однаково. Прикладені на кінцях труби згинальні моменти викликають деформацію її поперечних перерізів.

У теорії стійкості труб при поперечному чистому згинанні наявні два напрямку:

– вивчення місцевої стійкості кругової циліндричної оболонки при неоднорідному стисканні, але без врахування переміщень згину;

– вивчення великих переміщень пружної труби при згинанні, але без врахування можливої місцевої втрати стійкості стінки труби.

Схема методу скінченних елементів для дослідження нелінійних оболонкових систем

За розглянутою моментною схемою МСЕ для розв'язання задачі використовують регулярну топологічну структуру з одним універсальним оболонковим СЕ за товщиною, коли узагальнені переміщення належать до серединної поверхні оболонки з використанням криволінійної лагранжевої системи координат в евклідовому просторі:

$$x^i = x^i\left(z^{1'}, z^{2'}, z^{3'}\right).$$

Координатні лінії цієї поверхні дають регулярну топологічну сітку з координатами сіткової області S_1, S_2, S_3 з початком у точці N=1 і закінченням у точці K.

Маємо праву систему координат. При цьому області S_i спрямовані вздовж x_i, тобто область S_1 спрямована за товщиною оболонки, область S_2 – за шириною розрахункової моделі оболонки, а область S_3 – за довжиною розрахункової моделі оболонки:

S_1=1, 2; S_2= 1, M2; S_3 = 1, M3.

За товщиною оболонки апроксимація виконується одним СЕ, тому $M1=2$. Зобразимо координатну криволінійну сітку S_i на обмежувальних поверхнях оболонки в регулярну топологічну структуру скінченноелементної моделі (рис. 2).

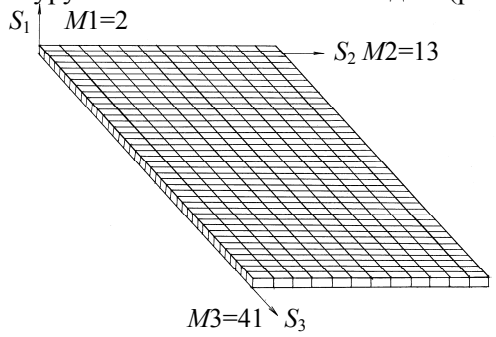

Рис. 2. Регулярна топологічна структура

Тоді нумерація сіткових координат вздовж S_1 виконується від 1 до $M1$, вздовж S_2 від 1 до $M2$, вздовж S_3 від 1 до $M3$, де $M1$, $M2$, $M3$ – кількість вузлів сіткової області вздовж S_1, S_2, S_3 .

Довільний вузол регулярної сіткової області G визначається трьома сітковими координатами $G_{S1\,S2\,S3}$. Отже, точковий нескінченний евклідів простір відображається регулярним скінченним сітковим простором $\Pi:\varepsilon^3 \to S_3$. У регулярній сітковій області можна визначити довільний номер вузла скінченноелементної моделі:

$$G = S_1 + M1\times[S_2 - 1] + HSL\times(S_3 - 1).$$

Напрямок сіткових координат подано таким чином, що вони задовольняють обмеженням $M2 \le M3$ і збігаються не лише з напрямками лагранжевої системи координат в області $\overline{R}$ евклідового простору ε^3, а й з напрямками місцевої системи координат $x^i_{(e)}$ у підобласті $r_{(e)}$.

Розглянемо розв'язання задачі Кармана на підставі моментної схеми МСЕ як тестову задачу згинання циліндричної оболонки (труби) при великих переміщеннях згинання (більше товщини труби), як гнучкої оболонки.

Наведемо таку конструктивну балкову розрахункову схему для кругового тонкостінного стрижня (труби) закритого профілю (рис. 3).

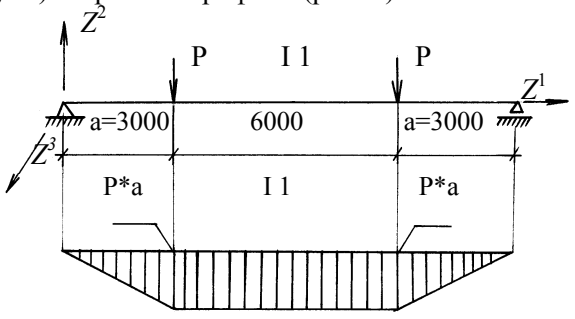

Рис. 3. Конструктивна балкова схема для кругового тонкостінного стрижня закритого профілю

Розрахунок труби здійснюємо за деформованою схемою, тобто стрижень (труба) має криволінійну форму і в перетині *1–1* для елементарної ділянки розподіл внутрішніх і зовнішніх зусиль буде таким, що відповідає схемі деформування розрахункового перерізу при чистому згинання криволінійної труби [5].

Мета розв'язання тестової задачі – показати, що крива труба має значно меншу жорсткість на згин порівняно з формулами опору матеріалів:

$$\Delta \overset{*}{y} > \Delta y_1 = \frac{Pl^3}{24EI}\left(3\frac{a}{l} - 4\frac{a^3}{l^3}\right), \qquad \Delta \overset{**}{y} > \Delta \overset{*}{y} \ .$$

Геометричні параметри оболонки та фізико-механічні характеристики матеріалу для задачі Кармана такі:

– радіус труби R = 500 мм;
– довжина труби L = 12000 мм;
– товщина труби h = 3 мм;
– модуль пружності $E = 2{,}1\cdot 10^5$ МПа;
– коефіцієнт Пуассона ν = 0,3;
– момент інерції $I = \pi R^3 h = 1177{,}5\cdot 10^6$ мм^4;
– зовнішнє навантаження P = 165 кН;
– допустиме напруження $|\sigma|$ = 210 МПа.

Геометричні і топологічні параметри скінченноелементної моделі визначають, виходячи з умов:

$x^2_{ce}=\pi r_{тр}/12=13{,}1$ см;
$x^3_{ce}=1200/24=50$ см;
$x^3_{ce}/x^2_{ce}=50/13{,}1=3{,}8<5$.

Беремо

$x^3_{ке}=1200/40=30$ см;
$x^3_{ce}/x^2_{ce}=30/13{,}1=2{,}3$.

Регулярна топологічна структура (рис. 2) має 1066 вузлів HMS, 480 СЕ, 2 вузла в напрямку M1, 13 вузлів в напрямку M2, 41 вузол в напрямку M3.

Деформування розрахункового поперечного перерізу (рис. 4, 5, табл. 1) узгоджується з аналітичним розв'язком оболонки [5]:

$\Delta y^*=1{,}0414>\Delta y^1=0{,}866$ см.

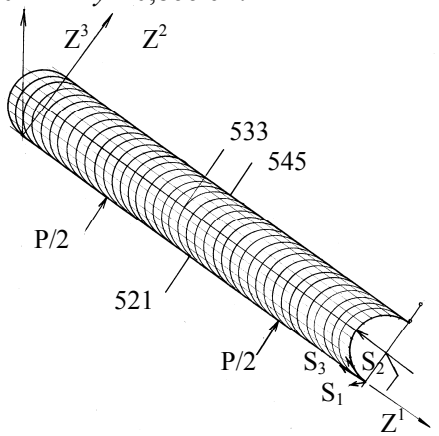

Рис. 4. Розрахункова схема довгої циліндричної оболонки

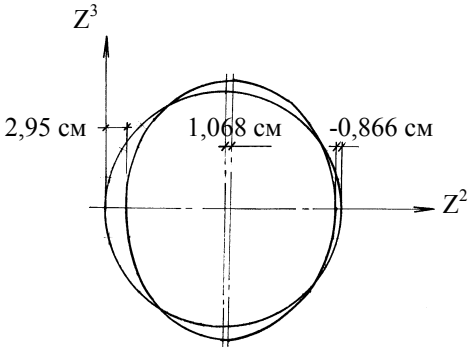

Рис. 5. Характер деформації при великих переміщеннях згинання

Таблиця 1

Контрольний розрахунковий переріз *M*3=21

Номер вузла	Вузлові координати на серединній поверхні			
	$Z^{2'}$	$Z^{3'}$	u^2	u^3
521	0,15	0	2,9489	0
523	1,85	12,979	2,76427	0,0243
525	6,86	25,075	2,289	0,211
527	14,8386	35,46	1,727	0,62
529	25,225	43,4312	1,294	1,1569
531	37,32	48,44	1,0936	1,6175
533	50,3	50,15	1,068	1,80
535	63,279	48,44	1,044	1,63
537	75,375	43,4312	0,8446	1,175
537	85,76	35,46	0,405	0,634
541	93,73	25,075	-0,1734	0,21
543	98,74	12,979	-0,67	0,023
545	100,45	0	-0,866	0

Розглянемо тестову задачу Бразьє на прикладі прямої труби кругового перетину діаметром 1000 мм і товщиною h = 6 мм за розрахунковою схемою попереднього прикладу, але з урахуванням поперечної симетрії.

Геометричні параметри оболонки та фізико-механічні характеристики матеріалу такі:

– радіус труби R = 500 мм;

– довжина труби L = 1200 мм;

– товщина труби h = 6 мм;

– модуль пружності $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ МПа;

– коефіцієнт Пуассона ν = 0,3;

– момент інерції $I = \pi R^3$, $h = 2355 \cdot 10^6$ мм^4;

– допустиме напруження /σ/= 340 МПа.

Труба навантажена двома зосередженими силами P = 534 кН, які перерозподіляються за круговою місцевою координатою x^2 з введенням ребра-вставки (флянці).

Для задачі Бразье взяті 1050 вузлів HMS, 480 CE, 2 вузла в напрямку M1, 21 вузол в напрямку M2, 25 вузлів в напрямку M3, вузлова інтенсивність навантаження (у вузлах IS 2=1,21; IS 3=13):

$Q_{вузл}$=ΔSq=(πr/M2–1) P/2πr = 534/40 = 13,35 Кн.

Критичне напруження за Бразьє:

σ*=0,33Eh/R=0,33·2,1·10^5·0,006/0,5=831,6МПа;

M_{33}= 831,6·0,7853·0,006=3918,33 кНм.

Найбільший прогин визначаємо за формулою опору матеріалів:

$$u_{\max} = \frac{Pl^3}{24EI}\left(3\frac{a}{l} - 4\frac{a^3}{l^3}\right) = 5{,}34 \text{ см};$$

σ=534·10^3·3/0,7853·1^2·0,006=340 МПа;

M_{33}=534·3 =1602 кН·і .

Навантаження за числовими розрахунками призводило до виникнення (локально) пластичних деформацій, тобто відбувалася місцева втрата стійкості від стискаючих напружень уздовж твірних циліндричної оболонки. Верхнє критичне навантаження узгоджується з загальною втратою стійкості циліндричної оболонки.

Нелінійні розв'язки призводять до деякого зниження критичного моменту за лінеаризованою теорією втрати стійкості та відповідають зближенню його з даними експерименту.

Обчислення докритичних геометрично нелінійних деформацій є важливим шляхом уточнення розрахунку критичного навантаження на оболонку.

Будемо вважати, що виникнення місцевих напружень порядку |σ|*=(2,5~3)|σ| відповідає локальній втраті стійкості.

Для аналізу критичних згинальних моментів і напружень за наявності нормального тиску q і його відсутності скористаємося аналітичними розв'язками (табл. 2, 3) [5].

Таблиця 2

Згинальний момент M_{33}, кН·і

Тиск q, кН/см^2	M^0= 0,9	M^0= 1,08
q = 0	3234,0	3591,78
q = 0,2	14920	16520

Таблиця 2

Вузлове навантаження $Q_{вузл}$, кН

Тиск q, кН/см^2	M^0= 0,9	M^0= 1,08	МСЕ
q = 0	26,95	29,93	25,0
q = 0,2	124,00	137,678	71,60

За відсутності нормального тиску [7]

$$M^0 = \frac{M_z^*}{\pi E h h_0 R^2};$$

$$h_0 = \frac{h}{R\sqrt{12\left(1-\nu^2\right)}}.$$

Згідно з рис. 6 критичне навантаження (початок біфуркації) спостерігається при M^0=0,9–1,0. За наявності внутрішнього тиску

$$M' = \sqrt{1+q^0/3}\left(M^0\right)_{q=0}.$$

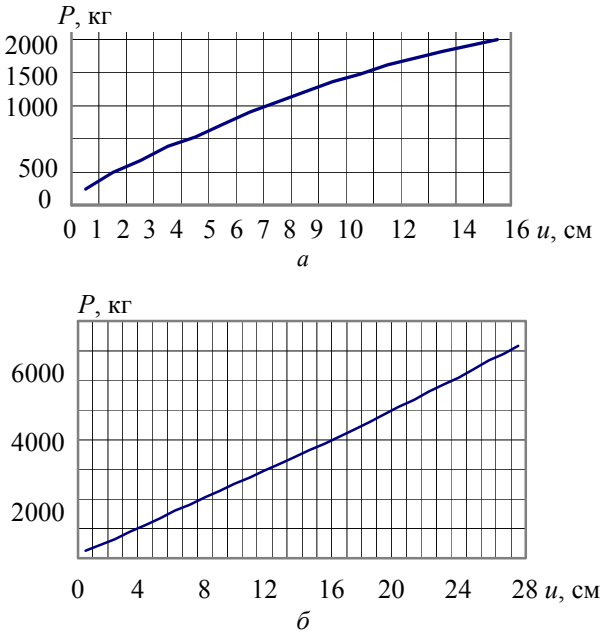

Рис. 6. Переміщення контрольного вузла $u^{1'}_{n=1}$:
а – навантаження без внутрішнього тиску;
б – навантаження з внутрішнім тиском q= 0,20 кН/см^2

Розглянемо приклад задачі Кармана–Бразьє для балки з перерізом коробчастої форми. Зобразимо розрахункову схему балки відповідно до рис. 2 з загальною довжиною L=4000 мм, a=1000 мм. Навантаження P визначаємо, виходячи із заданого згинального максимального моменту

$M_z = 4{,}5\cdot 10^2$ кН·ì ;

$P = 4{,}5\cdot 10^6/100 = 4{,}5\cdot 10^2$ кН.

Розрахункову схему коробчастої конструкції як дискретну модель пластинчато-циліндричної тонкої оболонки замкнутого профілю показано на рис. 7, а форму профілю в поперечному перерізі – на рис. 8.

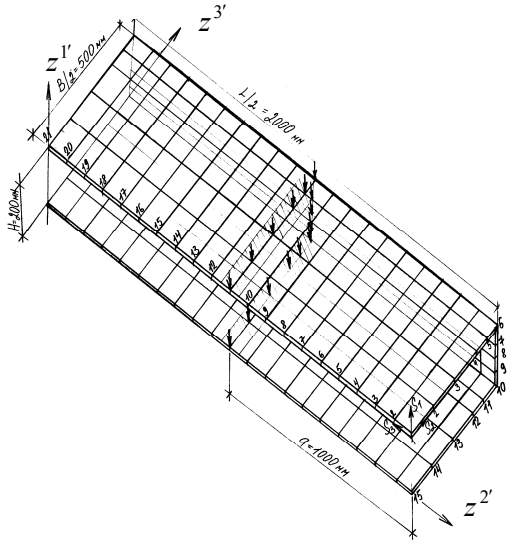

Рис. 7. Розрахункова балкова схема тонкої оболонки замкнутого профілю

Момент інерції наведеного перерізу конструкції визначають за формулою [5]

$$I_x = \frac{hH^3}{6} + \frac{Bh^3}{6} + \frac{BH^2h}{2} = 1{,}4939\cdot 10^4 \text{ см}^4,$$

а геометричні параметри зображено на рис. 8.

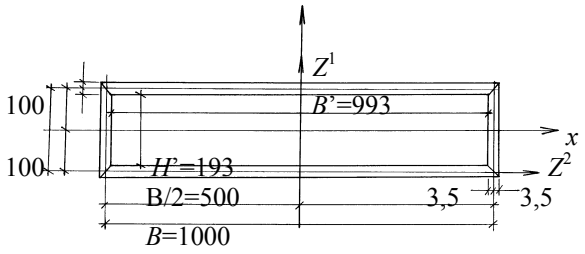

Рис. 8. Форма профілю у поперечному перерізі

Геометричні параметри та фізико-механічні характеристики матеріалу для балки з перерізом коробчастої форми такі:
– B = 1000 мм; H = 200 мм;
– товщина труби h = 7 мм;
– модуль пружності $E = 2\cdot 10^5$ МПа;
– коефіцієнт Пуассона ν = 0,25;
– момент інерції $I = \pi R^3 h = 1{,}4939\cdot 10^4$ см^4;
– зовнішнє навантаження $M_z = 4{,}5\cdot 10^2$ кН·ì .

Для уникнення локальних концентрацій напружень у полицях пластинчатої тонкої оболонки рівнодіюче навантаження $P = 6\cdot 10^2$ моделюємо рівномірно-розподіленим навантаженням по периметру перерізу вздовж сіткової координати S_2 за фіксованою сітковою координатою S_3=11 на відстані a=1000 мм (рис. 7).

Інтенсивність цього навантаження можна визначити за формулою: $q_{S_3=12} = P/b_p p_p$.

Відповідно до наведеної інтенсивності поверхневого навантаження $q_{S_3=12}$=1,875 МПа визначається вузлове навантаження вздовж координатної лінії S_2=1–15 при S_3=11. Якщо використати формулу теорії опору матеріалів, то максимальне напруження в нижній полиці (мембранне) визначиться за формулою

$$\sigma^{\max} = \frac{M_u^{\max} H}{2I_x}; \qquad (7)$$

$\sigma^{\max} = 4{,}5\cdot 10^6 \cdot 20/2\cdot 1{,}4939\cdot 10^4 = 30{,}225$ МПа,

а максимальне вертикальне переміщення в середньому перерізі за формулою:

$$u_{\max} = \frac{Pl^3}{24EI}\left(3\frac{a}{l} - 4\frac{a^3}{l^3}\right);\ u_{\max} = 2{,}63 \text{ см}.$$

Розрахунок виконувався за алгоритмом нелінійного деформування оболонкової дискретної моделі з урахуванням геометричної та фізичної нелінійності на підставі методу подовження за параметром збудження 70 кроків за інтенсивністю навантаження $q_{S_3=12}$=0,268–18,75 кг/см^2.

На останніх двох кроках виникають локальні зони розвитку пластичних деформацій, тобто зазначене навантаження є критичним, що узгоджується з розв'язком задачі Бразьє [5].

За результатами числового розрахунку за МСЕ спостерігаються максимальні напруження в крайньому СЕ нижньої полиці в середньому перерізі $\sigma^{33}_{\max} = \sigma^{33}_{647} + \sigma^{33}_{649}$; $\sigma^{33}_{\max}$ =313,87+291,0=604,87 МПа, що перевищує значення максимального напруження за формулою (7) і узгоджується з результатом, наведеним у праці [7]: $\sigma_{1\max}$ =679 МПа.

Ця величина дещо перевищує межу текучості матеріалу, що закладена в числовий розрахунок: σ_T =350 МПа, тобто у цьому прикладі також спостерігається ефект Кармана, завдяки великим переміщенням при поперечному згинанні.

Найбільше переміщення спостерігається в середньому перерізі верхньої полиці $u^{1''}_{661}$= –2,89 см, що перевищує значення $u_{\max}$ за теорією опору матеріалів та свідчить про ефект Кармана і нелінійність поведінки конструкції під час згинання (рис. 9).

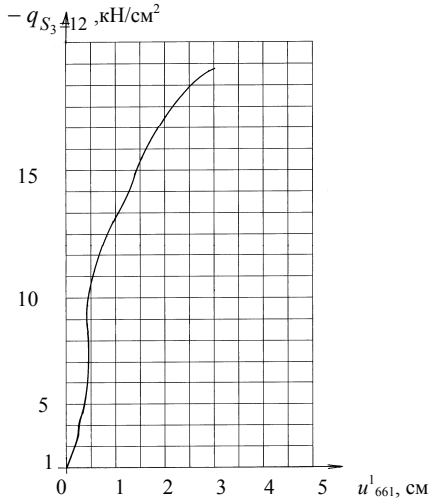

Рис. 9. Переміщення контрольного вузла $u^{1''}_{661}$

Висновок

Аналіз результатів розв'язку тестових задач на деформування криволінійних ділянок труб великого діаметру (циліндричних оболонок) показує, що методика узгоджується з аналітичними розв'язками теорії оболонок Новожилова [6] і дає збіг результатів.

Методика може бути використана для розрахунків криволінійних ділянок газо- і нафтопроводів з високим тиском.

Наведені нелінійні розрахунки статичного навантаження за граничним станом з урахуванням критерію стійкості Треска–Мізеса добре узгоджуються з аналітичними розв'язками загальної теорії стійкості, що свідчить про достовірність запропонованої числової методики на підставі моментної схеми СЕ.

Література

1. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. – М.: Мир, 1985. – 455 с.

2. *Теллес Д.К.Ф.* Применение метода граничных элементов для решения неупругих задач. – М.: Стройиздат, 1987. – 160 с.

3. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.

4. *Шимановский А.В., Цыхановский В.К.* Теория и расчет сильнонелинейных конструкций. – К.: Сталь, 2005. – 432 с.

5. *Аксельрад Э.Л.* Гибкие оболочки. – М.: Наука, 1976. – 376 с.

6. *Новожилов В.В.* Теория оболочек. – Л.: ГСИСП, 1962. – 431 с.

Стаття надійшла до редакції 12.01.06.

Рассмотрено напряженно-деформированное состояние комбинированных конструкций, основным элементом которых являются гибкие оболочки с ребрами и вставками: криволинейные тонкостенные трубы, компенсаторы, торообразные оболочки с ребрами. Исследованы потери локальной устойчивости гибких оболочек за пределами упругости.

The strained-deformed state of the thin-walled combined structures was searched. The basic element of such structures is the flexible thin shells with ribs and inserts: curvilinear thin-walled pipes, equalizers, shell with edges. Researches of loss of local stability outside elasticity are executed.