

УДК 519.876.5:620.178.16(045)

О.А. Вишневський

УЗАГАЛЬНЕНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ АБРАЗИВНОГО ЗНОСУ ПОВЕРХОНЬ МАТЕРІАЛІВ

НАУ, кафедра вищої математики, e-mail: eco@nau.edu.ua; www.nau.edu.ua

Наведено математичну модель середнього навантаження, розподіленого вздовж дуги прилягання ролика та зразка. Визначено середню площу стику ролика та зразка і середнє навантаження за час проведення випробування. Побудовано узагальнену модель абразивного зносу поверхонь матеріалів при нежорстко закріплених абразивних частинках.

Вступ

Питанням побудови моделей абразивного зносу завжди приділялося багато уваги через важливість поставленого завдання й водночас складність його вирішення.

Важливість завдання випливає з можливості передбачення результатів зносу за наперед заданими параметрами, що фактично визначає можливість конструювання матеріалів та їх покриттів з наперед заданими властивостями.

Складність завдання виявляється в тому, що моделі, яка охоплює все різноманіття параметрів, що впливають на знос, не існує.

Огляд публікацій

Проблемам побудови моделей абразивного зносу приділялося багато уваги в наукових публікаціях.

Основою одних існуючих моделей є ймовірностно-статистичний підхід [1], в інших моделях абразивного зносу не відбито всі складні фізичні процеси, що відбуваються при абразивному зносі з нежорстко закріпленим абразивом [2].

Недоліком цих моделей є громіздкість і незручність у використанні в поєднанні з обмеженістю набору параметрів, які впливають на зносостійкість.

У побудові цих моделей немає універсалізму для різних матеріалів і умов використання.

У праці [3] виявлено зв'язок величини абразивного зносу за масою з розмірами робочого ролика, лінійним зносом, площею поверхні прилягання гумового ролика та зразка.

У праці [4] до перерахованих параметрів додано зернистість абразиву та навантаження, але середнє навантаження розглянуто в певний момент часу, тобто при даному значенні лінійного зносу h . Величину деформації розглянуто в працях [5; 6].

Мета дослідження

У процесі експлуатації деталей різного профілю важливе значення має передбачення величини зносу при взаємодії зразка з абразивними частинками різної твердості і величини.

За наявності моделі зносу через нежорстко закріплені абразивні частинки можна передбачити величину зносу за масою залежно від параметрів, які впливають на зносостійкість лінійного зносу, площі поверхні стикування гумового ролика зі зразком, навантаження P_0 , твердості абразиву та зразка, розмірів гумового ролика, що використовується в дослідницькому обладнанні для випробування матеріалів на абразивну зносостійкість.

Результати досліджень

Визначимо середнє значення навантаження вздовж лінії перетину нормальної площини до осі ролика і поверхні прилягання ролика та зразка.

На рис. 1 схематично показаний процес проникнення ролика в зразок у разі тертя о нежорстко закріплені абразивні частинки.

Кут між навантаженням \vec{P} та його нормальною складовою P_n становить α :

$$\alpha = \arccos\left(1 - \frac{h}{R}\right),$$

де h – максимальна глибина лунки; R – радіус гумового ролика, який створює середнє навантаження P_{cp} по всій поверхні зіткнення гумового ролика зі зразком.

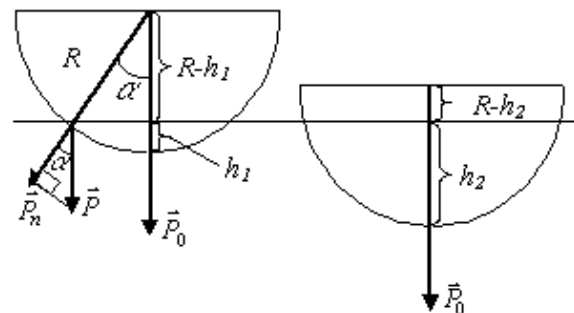


Рис. 1. Знос поверхні зразка в разі тертя о нежорстко закріплені абразивні частинки:

\vec{P}_n – нормальна складова навантаження \vec{P} ; α – кут між векторами \vec{P} та \vec{P}_n ; \vec{P}_0 – початкове вертикальне навантаження

На рис. 2 показано схематичне зображення ролика, яке прив'язане до прямокутної системи координат.

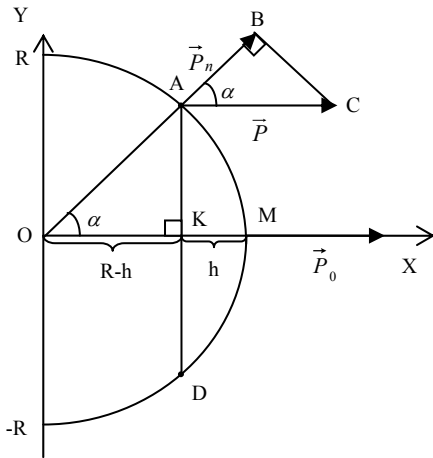


Рис. 2. Прив'язка ролика експериментальної установки на абразивний знос і поверхні зразка до декартової системи координат: пряма AD – рівень поверхні зразка; точка O – проекція осі ролика на площину XOY

Навантаження \vec{P} знайдемо з умови рівності моментів сил для тіл, що взаємодіють:

$$|\vec{P}|R = |\vec{P}_0|(R - y). \tag{1}$$

З рівняння (1) отримаємо значення навантаження $|\vec{P}|$ у точці A:

$$P = P_0 \frac{R - y}{R}.$$

При взаємодії ролика та зразка суми проекцій функції розподіленого вздовж осі Oy навантаження $\vec{P}(y)$ повинно дорівнювати $|\vec{P}_0|$.

Якщо записати функцію розподіленого вздовж осі Oy навантаження $\vec{P}(y)$ у вигляді

$$\vec{P} = \vec{P}_0 \frac{R - y}{R^2},$$

то сума проекцій на вісь Ox при $0 \leq y \leq R$ дорівнює

$$\int_0^R \frac{P_0(R - y)}{R^2} dy = \frac{P_0}{R^2} \left(R \int_0^R dy - \int_0^R y dy \right) = \frac{P_0}{R^2} \left(R^2 - \frac{R^2}{2} \right) = \frac{P_0}{2}.$$

Звідси випливає, що сума всіх проекцій розподіленого навантаження на вісь Ox дорівнює P_0 . Якщо ролик занурюється в зразок на глибину h , то з прямокутного $\triangle AOB$, зображеного на рис. 2:

$$AB = \sqrt{AO^2 - OB^2} = \sqrt{R^2 - (R - h)^2} = \sqrt{2Rh - h^2}.$$

У цьому випадку сума проекцій розподіленого навантаження дорівнює

$$\begin{aligned} & \int_0^{\sqrt{2Rh-h^2}} P_0 \frac{\sqrt{2Rh-h^2} - y}{2Rh-h^2} dy = \\ & = \frac{P_0}{2Rh-h^2} \left(2Rh-h^2 - \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{2Rh-h^2}} \right) = \\ & = \frac{P_0}{2Rh-h^2} \left(2Rh-h^2 - \frac{2Rh-h^2}{2} \right) = \frac{P_0}{2}. \end{aligned}$$

Сума всіх проекцій розподіленого навантаження $\vec{P}(y)$ на вісь Ox при

$$-\sqrt{2Rh-h^2} \leq y \leq \sqrt{2Rh-h^2}$$

дорівнює P_0 .

Функцію навантаження вздовж дуги перерізу нормальної до осі ролика площини і поверхні прилягання ролика та зразка $\vec{P}(y)$ запишемо у вигляді $\vec{P}(\alpha)$:

$$\begin{aligned} \vec{P}(y) &= \vec{P}_0 \frac{\sqrt{2Rh-h^2} - y}{\sqrt{2Rh-h^2}} = \\ &= \vec{P}_0 \frac{\sqrt{2\frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2} - \frac{y}{R}}{\sqrt{2\frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2}} = \\ &= \vec{P}_0 \frac{\sqrt{2\frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2} - \sin \alpha}{\sqrt{2\frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2}} = \vec{P}(\alpha). \end{aligned}$$

Нормальну складову навантаження $P_n(\alpha)$ знайдемо з прямокутного $\triangle ABC$, зображеного на рис. 2:

$$P_n(\alpha) = P \cos \alpha = P_0 \frac{\sqrt{2\frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2} - \sin \alpha}{\sqrt{2\frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2}} \cos \alpha. \tag{2}$$

Величину середнього навантаження знайдемо, враховуючи працю [3], за формулою

$$P_{\text{сер}} = \frac{\int P_n(l) dl}{l}, \tag{3}$$

де l – довжина дуги AD.

Для обчислення середнього навантаження зробимо заміни:

$$\begin{aligned}x &= R - h = R \cos \alpha; \\ y &= R \sin \alpha,\end{aligned}\quad (4)$$

де x, y – координати точки A .

Підставивши вираз (2) і заміну (4) у формулу (3), одержимо на підставі праці [3] рівняння

$$P_{\text{cep}} = \frac{\int_0^{\arccos\left(1-\frac{h}{R}\right)} P_0 \frac{\sqrt{2\frac{h}{R}-\left(\frac{h}{R}\right)^2} - \sin \alpha}{\sqrt{2\frac{h}{R}-\left(\frac{h}{R}\right)^2}} \cos \alpha R d\alpha}{\alpha R}.$$

Виконуючи алгебричні перетворення, отримаємо формулу

$$P_{\text{cep}} = \frac{P_0 \sqrt{2\frac{h}{R}-\left(\frac{h}{R}\right)^2}}{2 \arccos\left(1-\frac{h}{R}\right)}.$$

Середнє навантаження на поверхню всієї лунки дорівнює

$$P_c = 2P_{\text{cep}} = \frac{P_0 \sqrt{2\frac{h}{R}-\left(\frac{h}{R}\right)^2}}{\arccos\left(1-\frac{h}{R}\right)}.\quad (5)$$

Перевіримо роботу моделі в граничних умовах:

- 1) якщо $h \rightarrow 0$ (початковий момент зносу);
- 2) якщо $h \rightarrow R$ (половина гумового ролика стикається з поверхнею зразка).

Для першого випадку отримуємо

$$\lim_{h \rightarrow 0} P = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_0 \sqrt{2\frac{h}{R}-\left(\frac{h}{R}\right)^2}}{\arccos\left(1-\frac{h}{R}\right)} = P_0,$$

що є цілком логічно, бо початковий момент зносу навантаження P_0 прикладається до точки дотику ролика та зразка і дорівнює P_0 .

Для другого випадку одержуємо

$$\lim_{h \rightarrow R} P = \lim_{h \rightarrow R} \frac{P_0 \sqrt{2\frac{h}{R}-\left(\frac{h}{R}\right)^2}}{\arccos\left(1-\frac{h}{R}\right)} = \frac{2P_0}{\pi}.$$

Визначимо середні навантаження та площу вздовж напрямку лінійного зносу.

Середнє розподільне навантаження вздовж кола, по якому рухаються абразивні частинки $P_{\text{cep}}(l)$ і яке визначається залежністю (5), можна розподілити вздовж напрямку лінійного зносу h :

$$\begin{aligned}P_{\text{cep}}(l, h) &= \frac{P_0 \int_0^h \sqrt{2\frac{z}{R}-\left(\frac{z}{R}\right)^2} dz}{h \arccos\left(1-\frac{z}{R}\right)} = \\ &= \frac{P_0 R}{h} \int_0^{\frac{h}{R}} \frac{\sqrt{2u-u^2}}{\arccos(1-u)} du = \\ &= \frac{P_0 R}{h} \int_0^{\arccos\left(1-\frac{h}{R}\right)} \frac{\sin^2 t}{t} dt.\end{aligned}$$

Середнє розподільне навантаження $P_{\text{cep}}(l, h)$ можна подати у вигляді:

$$P_{\text{cep}}(l, h) = \frac{P_0 R}{h} \int_0^{\arccos\left(1-\frac{h}{R}\right)} \frac{\sin^2 t}{t} dt.$$

Під час проведення експерименту середнє значення площі відносно лінійного зносу R можна подати як

$$\begin{aligned}Q_{\text{cep}}(h) &= \frac{\int_0^h 2bR \arcsin \sqrt{2\frac{z}{R}-\left(\frac{z}{R}\right)^2} dz}{h} = \\ &= \frac{2bR}{h} \int_0^h \arcsin \sqrt{2\frac{z}{R}-\left(\frac{z}{R}\right)^2} dz = \\ &= \frac{2bR^2}{h} \left(\frac{h}{R} \arcsin \sqrt{2\frac{h}{R}-\left(\frac{h}{R}\right)^2} + \frac{1}{2} \arcsin\left(1-\frac{h}{R}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left(3-\frac{h}{R}\right) \sqrt{2\frac{h}{R}-\left(\frac{h}{R}\right)^2} \right).\end{aligned}\quad (6)$$

Отримана залежність середньої площі поверхні прилягання ролика та зразка (6) має вигляд

$$\begin{aligned}Q_{\text{cep}}(h) &= \frac{bR^2}{h} \left(\frac{2h}{R} \arcsin \sqrt{2\frac{h}{R}-\left(\frac{h}{R}\right)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \arcsin\left(1-\frac{h}{R}\right) - \frac{\pi}{2} + \left(3-\frac{h}{R}\right) \sqrt{2\frac{h}{R}-\left(\frac{h}{R}\right)^2} \right).\end{aligned}\quad (7)$$

Визначимо залежність об'ємного зносу та зносу за масою від середнього тиску на поверхню стику.

Величина абразивного зносу поверхонь матеріалів за масою W_m пропорційна середньому тиску на поверхню прилягання ролика та зразка:

$$W_m = kN_c,$$

де середній тиск на площину стикання зразка і ролика N_c дорівнює

$$N_c = \frac{P_{\text{cep}}(l, h)}{Q_{\text{cep}}(h)} = \frac{\frac{P_0 R}{h} \int_0^{\arccos\left(1-\frac{h}{R}\right)} \frac{\sin^2 t}{t} dt}{Q_{\text{cep}}(h)} = \frac{P_0 R \int_0^{\arccos\left(1-\frac{h}{R}\right)} \frac{\sin^2 t}{t} dt}{h Q_{\text{cep}}(h)}.$$

При одному значенні h об'єм і маса зносу прямо пропорційні ширині ролика, отже:

$$W_v = \frac{b R P_0 k \int_0^{\arccos\left(1-\frac{h}{R}\right)} \frac{\sin^2 t}{t} dt}{2 h Q_{\text{cep}}(h)}. \quad (8)$$

Математична модель залежності об'ємного зносу за масою від лінійного матиме такий вигляд

$$W_m = \frac{b R k \rho P_0 \int_0^{\arccos\left(1-\frac{h}{R}\right)} \frac{\sin^2 t}{t} dt}{h Q_{\text{cep}}(h)}. \quad (9)$$

Побудуємо модель залежності об'ємного зносу та зносу за масою від площі поверхні прилягання ролика і зразка, коефіцієнта K , навантаження P_0 .

Для цього підставляємо у формулу (9) замість $\frac{h}{R}$

вираз $1 - \cos \frac{Q}{2bR}$ [3].

Залежність величини абразивного зносу від середньої площі $Q(h)$ прилягання ролика та зразка протягом всього експерименту від часу $t_k = 0$ до часу $t = t_k$ (t_k) від радіуса ролика R , ширини ролика b , навантаження P_0 має вигляд

$$W_m = \frac{\rho P_0 k \int_0^{\frac{Q}{2bR}} \frac{\sin^2 t}{t} dt}{R \left(\frac{Q}{2bR} - \frac{Q}{bR} \cos \frac{Q}{2bR} + 2 \sin \frac{Q}{2bR} + \frac{1}{2} \sin \frac{Q}{bR} \right)}. \quad (10)$$

Залежність об'ємного зносу від середньої площі поверхні стику ролика та зразка, коефіцієнта k і розмірів ролика (R ; b) має вигляд

$$W_v = \frac{P_0 k \int_0^{\frac{Q}{2bR}} \frac{\sin^2 t}{t} dt}{R \left(\frac{Q}{2bR} - \frac{Q}{bR} \cos \frac{Q}{2bR} + 2 \sin \frac{Q}{2bR} + \frac{1}{2} \sin \frac{Q}{bR} \right)}.$$

Визначимо залежність об'ємного абразивного зносу та матеріалів від k , R , b , P_0 , Q , ρ і від k , R , b , P_0 , h , ρ .

Для побудови моделі залежності величини об'ємного абразивного зносу та зносу за масою поверхонь матеріалів від характерних параметрів, які впливають на зносостійкість, треба перемножити почленно формули (10) і

$$I_m = \rho W_v = \frac{1}{2} \rho R \left(Q - bR \sin \frac{Q}{bR} \right),$$

після чого отримаємо

$$W_m^2 = \frac{\rho^2 P_0 k \left(Q - bR \sin \frac{Q}{bR} \right) \int_0^{\frac{Q}{2bR}} \frac{\sin^2 t}{t} dt}{\frac{Q}{bR} - \frac{2Q}{bR} \cos \frac{Q}{2bR} + 4 \sin \frac{Q}{2bR} + \sin \frac{Q}{bR}};$$

$$W_m = \rho \sqrt{\frac{P_0 k \left(Q - bR \sin \frac{Q}{bR} \right) \int_0^{\frac{Q}{2bR}} \frac{\sin^2 t}{t} dt}{\frac{Q}{bR} - \frac{2Q}{bR} \cos \frac{Q}{2bR} + 4 \sin \frac{Q}{2bR} + \sin \frac{Q}{bR}}}. \quad (11)$$

Із залежності (11) і формули (8) одержимо

$$W_v = \sqrt{\frac{P_0 k \left(Q - bR \sin \frac{Q}{bR} \right) \int_0^{\frac{Q}{2bR}} \frac{\sin^2 t}{t} dt}{\frac{Q}{bR} - \frac{2Q}{bR} \cos \frac{Q}{2bR} + 4 \sin \frac{Q}{2bR} + \sin \frac{Q}{bR}}}.$$

Після почленного множення рівняння (9) і формули

$$W_m = \rho b R^2 \left(\arcsin \sqrt{2 \frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R} \right)^2} - \left(1 - \frac{h}{R} \right) \sqrt{2 \frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R} \right)^2} \right) \quad (12)$$

отримаємо залежність

$$W_m^2 = \frac{\rho^2 b^2 R^3 P_0 k}{h Q_{\text{cep}}(h)} \int_0^{\arccos\left(1 - \frac{h}{R}\right)} \frac{\sin^2 t}{t} dt \times$$

$$\times \left(\arcsin \sqrt{2 \frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2} - \left(1 - \frac{h}{R}\right) \sqrt{2 \frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2} \right).$$

Остаточно модель набуває вигляду

$$W_m = \rho b R \left(\frac{R P_0 k}{h Q_{\text{cep}}(h)} \int_0^{\arccos\left(1 - \frac{h}{R}\right)} \frac{\sin^2 t}{t} dt \times \right.$$

$$\left. \times \left(\arcsin \sqrt{2 \frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2} - \left(1 - \frac{h}{R}\right) \sqrt{2 \frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2} \right) \right)^{\frac{1}{2}},$$

де $Q_{\text{cep}}(h)$ визначається залежністю (7).

Розглянемо залежність

$$W_v = \frac{W_m}{\rho}. \quad (13)$$

Застосувавши залежність (13) до формули (12), маємо модель

$$W_v = b R \left(\frac{R P_0 k}{2 h Q_{\text{cep}}(h)} \int_0^{\arccos\left(1 - \frac{h}{R}\right)} \frac{\sin^2 t}{t} dt \times \right.$$

$$\left. \times \left(\arcsin \sqrt{2 \frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2} - \left(1 - \frac{h}{R}\right) \sqrt{2 \frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2} \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

О.А. Вишнеvский

Обобщенная математическая модель абразивного износа поверхностей материалов

Приведена математическая модель средней нагрузки, распределенной вдоль дуги соприкосновения ролика и образца. Определена средняя площадь соприкосновения ролика и образца и средняя нагрузка за время проведения эксперимента. Построена обобщенная модель абразивного износа поверхностей материалов при нежестко закрепленных абразивных частицах.

O.A. Vishnevsky

The generalized mathematical model of an abrasive wear of surfaces of materials

The mathematical model of the mean loading allocated along the arc of a touch of a roller and a sample is submitted. The mean contact area of the roller and the sample and the mean loading during realization of the experiment is defined. The generalized model of an abrasive wear of surfaces of materials is constructed, at not hard-mounted abrasive particles.

Висновки

1. Побудована математична модель визначення середнього розподільного вздовж дуги прилягання поверхонь ролика та зразка навантаження, а також середнього навантаження вздовж лінійного зносу h .

2. Визначена залежність середньої площі прилягання ролика та зразка, яка розподілена вздовж лінійного зносу h , від лінійного зносу та розмірів випробувального ролика.

3. Побудована модель залежності величини абразивного зносу при нежорстко закріплених абразивних частинках від середнього навантаження $P(l, h)$, середньої площі $Q(h)$, густини матеріалу ρ , розмірів ролика (b, R), лінійного зносу h , площі поверхні прилягання ролика та зразка Q .

Література

1. Сорокатый П.В. Моделирование поведения трибосистем методом трибоэлементов // Трение и износ. – 2002. – Т.23, №1. – С. 16–22.
2. Федоров С.В. Обобщенная модель трения // Трение и износ. – 1993. – Т.14, №3. – С. 460–470.
3. Вишнеvский О.А. Модель зависимости величины абразивного зносу від лінійного // Вісн. НАУ. – 2004. – №1. – С. 125–129.
4. Вишнеvский О.А. Модель зависимости оцінки абразивной зносостойкости материалов від навантаження та густини // Вісн. НАУ. – 2004. – №2. – С. 86–90.
5. Вишнеvский О.А., Давидов О.С. Нелінійне математичне моделювання процесу абразивного зносу поверхонь матеріалів // Вісн. НАУ. – 2005. – №1. – С. 101–104.
6. Вишнеvский О.А., Давидов О.С. Математичне моделювання процесів абразивного зносу поверхонь матеріалів з урахуванням деформації // Вісн. НАУ. – 2005. – №3. – С. 99–103.

Стаття надійшла до редакції 22.12.05.