УДК 621.317

Ю.В. Куц, д-р техн. наук
Л.М. Щербак, д-р техн. наук

КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ ФАЗОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЦИКЛІЧНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

НАУ, кафедра інформаційно-вимірювальних систем, e-mail: iidsu@ukrpost.net

Запропоновано методику визначення кореляційних функцій фази циклічних випадкових процесів. Методика ґрунтується на використанні дискретного перетворення Гільберта, що дає змогу зменшити час аналізу. Реалізацію запропонованої методики розглянуто на прикладі аналізу кореляційних функцій фази адитивної суміші гармонічного сигналу та гауссівської завади.

Вступ

Фазові характеристики випадкових циклічних процесів використовують для дослідження систем, явищ, сигналів у технічній і медичній діагностиці, неруйнівному контролі, оптиці, радіолокації та радіонавігації, радіогеодезії та геофізиці тощо.

Часто досліджувані випадкові процеси $\xi(\omega,t)$, де ω – елементарна подія з простору подій Ω; t – дійсна змінна з множини раціональних чисел, R – це вузькосмугові стаціонарні дійсні випадкові процеси, які належать до класу процесів зі скінченною потужністю і допускають подання у вигляді [1]

$$\begin{aligned} &\xi(\omega,t) = \mathrm{A}(\omega,t)\cos[\Psi(\omega,t)]; \\ &\omega \in \Omega,\ \mathrm{A}(\omega,t) > 0,\ t \in R, \end{aligned} \tag{1}$$

де $\mathrm{A}(\omega,t)$ – амплітудна (амплітудно-часова) характеристика, або обвідна процесу; $\Psi(\omega,t)$ – фазова (фазово-часова) характеристика процесу.

Якщо $\mathrm{A}(\omega,t)$ та $\Psi(\omega,t)$ задано, то однозначне визначення процесу $\xi(\omega,t)$ очевидне.

Спектральна щільність вузькосмугового стаціонарного випадкового процесу $\xi(\omega,t)$ концентрується в околі певної частоти f_0.

Для вирішення завдань фазометрії становить практичний інтерес визначення як автокореляційної, так і взаємокореляційної функцій фазових характеристик (далі фази) [2; 3].

Взаємокореляційна функція найчастіше визначається відносно фази гармонічного сигналу вигляду $U_0 \cos(2\pi f_0 t)$, де U_0 – амплітуда сигналу, і має певний фізичний зміст – її максимум визначає затримку одного процесу відносно іншого в межах інтервалу часу $[0,T_0)$, де $T_0 = f_0^{-1}$.

Загальні питання вимірювання кореляційних функцій випадкових процесів та випадкової фази сигналів висвітлено в праці [4].

Проте в ній зосереджено увагу переважно на спрощенні апаратурної реалізації математичних операцій для обчислення кореляційних функцій, загальних принципах побудови та структурах кореляторів, у яких вибіркові значення фазових зсувів здебільшого формуються фазово-часовими перетворювачами.

У праці [2] також розглянуто різні методи визначення кореляційних функцій випадкових процесів стосовно визначення кореляційних функцій фази. Серед них такі методи: перетворення Фур'є, апроксимація кореляційної функції сумою членів її розкладу в ряд, перемноження, підсумовування (віднімання) та піднесення у квадрат тощо. У більшості відомих кореляторів передбачається, що відліки фазових зсувів формуються за допомогою допоміжного перетворення типу "фаза – часовий інтервал", або аналогових фазових детекторів. Під час виконання таких перетворень формується один відлік за час, не менший $T_0 = 1/f_0$. Отже, у статистичному сенсі оцінюється одне значення фазового зсуву за період сигналу T_0.

Такий підхід потребує для реалізації багато часу і має суттєві обмеження під час дослідження, наприклад, нестаціонарних випадкових фазових зсувів сигналів.

Водночас запропоновано інший перспективний метод: застосовуючи перетворення Гільберта, можна визначати за період досліджуваного сигналу не одне, а множину миттєвих значень фазової характеристики сигналу і за допомогою статистичної обробки отримати оцінки фазового зсуву [5], а отже, кореляційної (або взаємокореляційної відносно фазової характеристики іншого процесу) характеристики.

У цій роботі досліджуються особливості оцінювання кореляційної функції випадкової фази сигналу із застосуванням дискретного перетворення Гільберта для оцінок фазових характеристик сигналів.

Постановка завдання

Для дослідження реалізації вузькосмугового випадкового процесу (1) $u(t),\ t \in T_c$, де T_c – час спостереження, на інтервалі спостереження $[0, T_C]$ задано еквідистантну ґратку часу

$$S = \{t_1, t_2, \ldots t_n\}, \tag{2}$$

множина елементів якої впорядкована і для неї виконується нерівність

$$0 \le t_1 < t_2 < \ldots t_j < \ldots < t_n \le T_c.$$

Елементи ґратки S розміщені рівномірно і утворюють арифметичну прогресію

$$t_j = t_1 + (j-1)T_д,\ \ j \in [1, n],$$

де $T_д$ – крок ґратки (період дискретизації).

На ґратці S задано послідовність значень реалізації процесу (1)

$$u(t_j) = u[j] = U(t_j)\cos\left(2\pi f_0 t_j + \varphi(t_j)\right);$$
$$t_j \in S, \varphi(t_j) \in [0, 2\pi), \tag{3}$$

яка є по суті вкладеним у вираз (1) сигналом з дискретним аргументом (2). Значення частоти f_0 відоме. Значення $\varphi[j] = \varphi(t_j)$ є вибірковими значеннями стаціонарного випадкового процесу

$$\psi(\omega, t) = \Psi(\omega, t) - 2\pi f_0 t.$$

На інтервалі аналізу укладається не менше $k = [T_c / T]^+ >> 1$ періодів сигналу (3), де $[x]^+$ – операція виділення цілої частини числа x.

Необхідно визначити статистичну оцінку нормованої кореляційної функції початкового фазового зсуву сигналу $r_\varphi(\tau) \in [-1,\ 1]$ для затримки $\tau \in (-0{,}5T_c,\ 0{,}5T_c)$.

Розв'язання

Загальна ідея запропонованого підходу до розв'язання поставленого завдання полягає у знаходженні кореляційної функції випадкових фаз сигналу через його фазову характеристику $\Psi(\omega, t)$, однозначно визначити яку за відомих значень процесу $\xi(\omega, t)$ можна за допомогою перетворення Гільберта [5].

Розглянемо розв'язання задачі в загальному вигляді. Застосуємо до процесу (1) перетворення Гільберта й отримаємо гільбертів образ вихідного випадкового процесу

$$\hat{\xi}(\omega, t) = \mathbf{G}[\xi(\omega, t)], \tag{4}$$

де $\mathbf{G}[f(t)]$ – оператор перетворення Гільберта функції

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(t+\tau) - f(t-\tau)}{\tau} d\tau. \tag{5}$$

На підставі рівняння (4) визначимо фазу випадкового процесу (1) як

$$\Psi(\omega, t) = \mathbf{L}\left[\xi(\omega, t), \hat{\xi}(\omega, t)\right] + \mathbf{K}\left[\xi(\omega, t), \hat{\xi}(\omega, t)\right], \tag{6}$$

де $\mathbf{L}\left[\xi(\omega, t), \hat{\xi}(\omega, t)\right]$ – оператор однозначного в інтервалі $[0, 2\pi)$ визначення фази процесу (1):

$$\mathbf{L}\left[\xi(\omega, t), \hat{\xi}(\omega, t)\right] = \mathrm{arctg}\left(\frac{\hat{\xi}(\omega, t)}{\xi(\omega, t)}\right) +$$
$$+ \frac{\pi}{2}\left\{2 - \left[\mathrm{sign}\left(\hat{\xi}(\omega, t)\right)\right] \cdot \left[1 + \mathrm{sign}(\xi(\omega, t))\right]\right\}, \tag{7}$$

де $\mathrm{sign}(\cdot)$ – знакова функція; $\mathbf{K}[\cdot]$ – оператор, що усуває стрибки фазової характеристики в точках $2\pi n, n \in N$.

Маючи фазову характеристику (6), можна визначити центральну частоту процесу (1) на інтервалі спостереження T_C як відношення набігання фази процесу за час T_C до величини $2\pi T_c$:

$$f_0 = \frac{\Delta\Psi(\omega, t)}{2\pi T_c} = \frac{\Psi(\omega, t_п + T_c) - \Delta\Psi(\omega, t_п)|}{2\pi T_c}. \tag{8}$$

Випадковий процес $\Psi(\omega, t)$, описаний формулою (6), нестаціонарний. Перехід від процесу $\Psi(\omega, t)$ до стаціонарного $\psi(\omega, t)$ виконаємо так: виключимо з $\Psi(\omega, t)$ залежну від часу лінійну складову $\Delta\Psi(\omega, t)\dfrac{t}{T_c}$:

$$\psi(\omega, t) = \Psi(\omega, t) - \Delta\Psi(\omega, t)\frac{t}{T_c}. \tag{9}$$

Після центрування випадкового стаціонарного процесу (9) отримуємо

$$\overset{o}{\psi}(\omega, t) = \psi(\omega, t) - \mathbf{M}\psi(\omega, t), \tag{10}$$

де $\mathbf{M}$ – оператор математичного сподівання.

Тепер можна визначити нормовану автокореляційну функцію процесу (10) як

$$r_\varphi(\tau) = \frac{\mathbf{M}\left[\overset{o}{\psi}(\omega, t)\overset{o}{\psi}(\omega, t+\tau)\right]}{\mathbf{D}\left[\overset{o}{\psi}(\omega, t)\right]}, \tag{11}$$

де $\mathbf{D}$ – оператор дисперсії.

Застосуємо формули (4) – (9) до реалізації випадкового процесу (3)
$u(t_j) = u[j]$,

вважаючи, що для $\overset{\circ}{\psi}(\omega, t)$ існує ергодична гіпотеза відносно перших двох моментних функцій.
Згідно з викладеною в праці [5] методикою застосуємо до вибірки (3) дискретне перетворення Гільберта і, визначивши гільбертів образ вибірки $\hat{u}[j]$, обчислимо фазову характеристику вибірки та її центральну частоту:

$$\Phi[j] = \mathbf{L}[u[j], \hat{u}[j]] + \mathbf{K}[u[j], \hat{u}[j]]; \qquad (12)$$

$$f = \frac{\Phi[n] - \Phi[1]}{2\pi T_c}.$$

Використовуючи формули (9), (10), вилучимо лінійну складову фази й отримаємо миттєві значення початкового фазового зсуву, після чого виконаємо їх центрування:

$$\varphi[j] = \Phi[j] - 2\pi f j T_д;$$

$$\overset{\circ}{\varphi}[j] = \varphi[j] - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi[j].$$

Визначення автокореляційної функції безпосередньо за формулою (11) має певні труднощі.
Найчастіше [2; 4], застосовуючи гіпотезу про ергодичність вибірки $\overset{\circ}{\varphi}[j]$ і довівши ергодичність випадкового процесу $\psi(\omega, t)$, можна значно спростити розрахунки.
У цьому випадку автокореляційну та нормовану автокореляційну функції випадкового початкового фазового зсуву можна оцінити за однією реалізацією випадкового процесу за відомими формулами [2]:

$$R_\varphi(l) = \frac{1}{n-l}\sum_{j=1}^{n-l}\overset{\circ}{\varphi}[j]\overset{\circ}{\varphi}[j+l-1], \ l = 1, 2, \ldots n/2; \qquad (13)$$

$$r_\varphi(l) = (n-1)\frac{R_\varphi(l)}{\sum_{j=1}^{n}\left(\overset{\circ}{\varphi}[j]\right)^2}. \qquad (14)$$

Точність статистичних оцінок кореляційної функції залежить від обсягу n аналізованої вибірки $\overset{\circ}{\varphi}[j]$.
Раніше значення фазових зсувів визначалось один раз за період чи декілька періодів сигналу [5].

Використання дискретного перетворення Гільберта дає змогу сформувати статистично незалежні відліки фази сигналу за період сигналу, що дозволить значно скоротити час аналізу з одночасним збереженням точності оцінок кореляційної функції. Проілюструємо визначення кореляційної функції на прикладі адитивної суміші гармонічного сигналу та гауссівської завади. Такі сигнали часто трапляються у практиці фазових вимірювань.

Моделювання

Сформуємо вибіркові значення адитивної суміші гармонічного сигналу та гауссівської завади відповідно до виразу

$$u[j] = U\cos(2\pi f T_д j + \varphi_п) + \beta y[j], \qquad (15)$$

де $y[j]$ – вибіркові значення реалізації гауссівської завади з нульовим математичним сподіванням і середньоквадратичним відхиленням $\sigma = 1\text{В}$; β – дійсний коефіцієнт, $\beta > 0$.
Задамо наступні значення параметрів:
$U = 1$ В;
$f = 100$ Гц;
$T_д = 10^{-4}$ с;
$\varphi_п = 0{,}5\pi$;
$j = \overline{1{,}901}$;
$T_c = 0{,}09$ с;
$\beta = 0{,}3$.
Відношення сигнал/завада для цього випадку дорівнює

$$\chi = \frac{U^2}{\beta^2\sigma^2} = 11.$$

На інтервалі аналізу укладається $k = 9$ періодів гармонічного сигналу частотою 100 Гц.
На рис. 1, *а* показано розрахунок за формулою (15) вихідного сигналу (крива *1*) і його гільбертового образу $\hat{u}[j]$ (крива *2*), на рис. 1, *б* – графік фази за модулем 2π, тобто

$$\Phi'[j] = \Phi[j] \bmod 2\pi = L(u[j], \hat{u}[j]).$$

На рис. 1, *в* показано значення отриманої за формулою (12) фази $\Phi[j]$, на рис. 1, *г* – центровані значення $\overset{\circ}{\varphi}[j]$.
За отриманою множиною

$$\left\{\overset{\circ}{\varphi}[j], j = \overline{1, n}\right\}$$

розраховано значення дисперсії початкового фазового зсуву, яке становило $\sigma_\varphi \approx 0{,}16$ рад, та нормовану кореляційну функцію $r_\varphi(\tau)$, $\tau = lT_д$ (рис. 2).

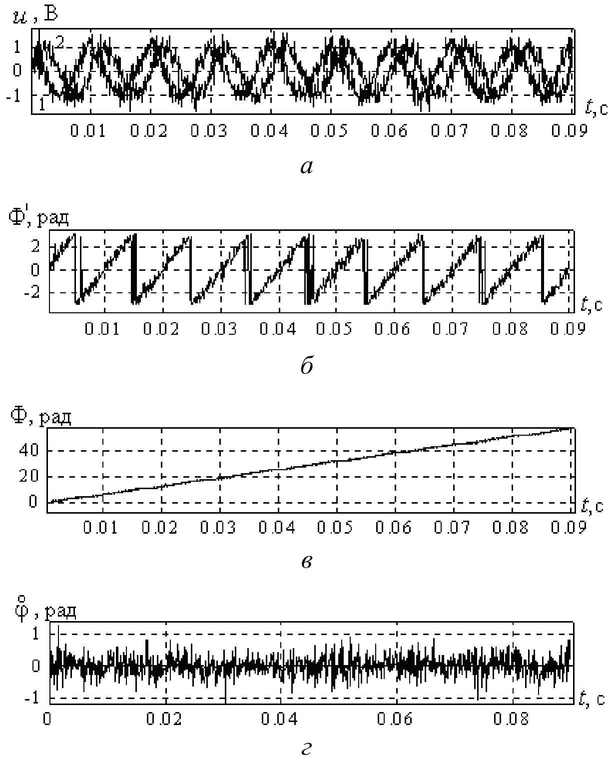

Рис. 1. Графіки вихідного сигналу і його гільбертового образу (*а*), фази за модулем 2π (*б*), повної фази (*в*), центрового початкового фазового зсуву (*г*):
1 – вихідний сигнал; *2* – гільбертів образ

Для коректного обчислення $r_\varphi(\tau)$ було враховано таке.

Обмеження в часі T_c призводить до значних спотворень у визначенні оцінок $\Phi[j]$ на початку та у кінці часу аналізу T_c [3].

Тому доцільно визначати $r_\varphi(\tau)$ за центральною частиною вибірки $\overset{o}{\varphi}[j]$, тобто для $j=\overline{m,n-m}$, де m – кількість відкинутих значень.

У цьому випадку формули (13), (14) набувають такого вигляду:

$$R_\varphi(l)=\frac{1}{n-2m-l}\sum_{j=m}^{n-m-l}\overset{o}{\varphi}[j]\overset{o}{\varphi}[j+l-1];$$

$$l=1,2,...\frac{n-2m}{2}; \tag{16}$$

$$r_\varphi(l)=(n-2m-1)\frac{R_\varphi(l)}{\sum\limits_{j=m}^{n-m}\left(\overset{o}{\varphi}[j]\right)^2}.$$

Із рис. 2 видно, що кореляційна функція фазового шуму наближається до дельта-функції.

Крім того, результати моделювання підтвердили можливість отримання кореляційної функції фазової характеристики сигналів за обмеженою в часі вибіркою. У цьому випадку оцінку $r_\varphi(\tau)$ виконано за дев'ять періодів досліджуваного сигналу.

Застосуємо до вибірки $\left\{\overset{o}{\varphi}[j], j=\overline{1,n}\right\}$ медіанну фільтрацію [6] і пересвідчимось у правильності виконання розрахунків. Графіки нормованих кореляційних функцій $r_\varphi(\tau)$ для $\beta=0{,}03$ показано на рис. 3.

Головна пелюстка кореляційної функції фази розширюється пропорційно порядку фільтра, що підтверджує правильність розрахунку кореляційної функції. Аналогічно обчислюємо і взаємокореляційну функцію фазових характеристик двох різних процесів. Для цього у формулах (13) та (16) підсумовуємо добутки миттєвих значень фазового зсуву не одного процесу, а двох досліджуваних процесів.

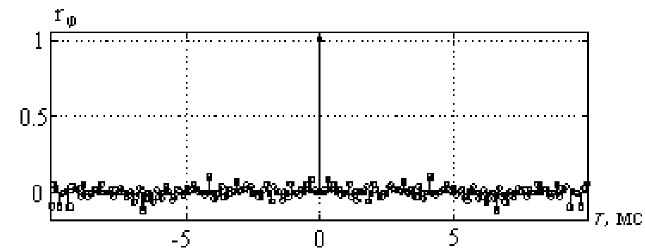

Рис. 2. Кореляційна функція

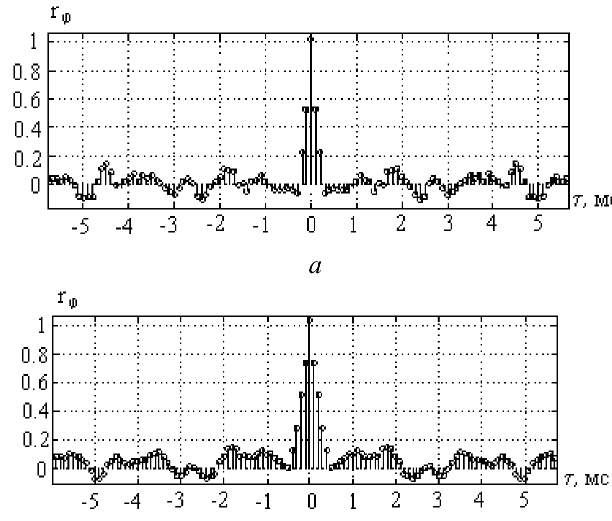

Рис. 3. Графіки нормованих кореляційних функцій $r_\varphi(\tau)$ після застосування медіанної фільтрації третього (*а*) і п'ятого (*б*) порядків до вибірки $\varphi[j],\ j=\overline{1,n}$

Запропонований спосіб кореляційного аналізу фазових характеристик можна використовувати у теоретичних і експериментальних дослідженнях циклічних випадкових процесів з метою отримання їх статистичних характеристик, дослідженні фазових шумів джерел періодичних сигналів, дослідженні та обґрунтуванні нових способів статистичної обробки результатів фазових вимірювань.

Моделювання задач обчислення дискретних значень статистичної оцінки кореляційної функції $r_{\varphi}(\tau)$ виконано в системі MatLab.

Висновок

Розглянуто спосіб визначення кореляційних функцій фазових характеристик циклічних випадкових процесів на основі дискретного перетворення Гільберта, який дозволяє значно скоротити час обчислення значень статистичних оцінок кореляційних функцій.

Час аналізу зменшено за рахунок визначення та використання декількох відліків фази за період сигналу.

Раніше значення фазових зсувів визначали один раз за період чи декілька періодів сигналу.

Скорочення часу статистичного аналізу дає змогу застосувати запропонований метод і для кореляційного аналізу швидкоплинних циклічних випадкових процесів.

Запропонований спосіб визначення кореляційних функцій фазових характеристик випадкових процесів можна використовувати як під час дослідження випадкових циклічних процесів, так і для розроблення та обґрунтування нових методів статистичної обробки результатів фазових вимірювань.

Проведене в системі MatLab моделювання завдань визначення статистичних оцінок кореляційних функцій фазових характеристик випадкових сигналів підтверджує ефективність запропонованого способу.

Література

1. *Дёч Р.* Нелинейные преобразования случайных процессов. – М.: Сов. радио, 1965. – 206 с.
2. *Переход Н.Г.* Измерение параметров фазы случайных сигналов. – Томск: Томское отд-ние. Радио и связь. – 1991. – 310 с.
3. *Чмыч М.К.* Цифровая фазометрия. – М.: Радио и связь, 1993. – 184 с.
4. *Мирский Г.Я.* Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения. – М.: Энергоиздат, 1982. – 320 с.
5. *Куц Ю.В., Щербак Л.М.* Застосування перетворення Гільберта у фазометрії // Технол. системы. – 2004. – №2. – С. 50–55.
6. *Быстрые* алгоритмы в цифровой обработке изображений / Т.С. Хуанг, Дж.-О. Эклунд, Г. Дж. Нуссбаумер и др.; Под ред. Т.С. Хуанга; Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1984. – 224 с.

Стаття надійшла до редакції 05.10.05.

Ю.В. Куц, Л.Н. Щербак

Корреляционный анализ фазовых характеристик циклических случайных процессов

Предложена методика определения корреляционных функций фазы циклических случайных процессов. Методика основывается на использовании дискретного преобразования Гильберта, что позволяет уменьшить время анализа. Реализация предложенной методики рассмотрена на примере анализа корреляционных функций фазы аддитивной смеси гармонического сигнала и гауссовской помехи.

Y.V. Kuts, L.N. Scherbak

The correlation analysis of the cyclic casual process phase characteristics

The technique of correlation functions of cyclic casual processes phase definition is offered. The technique is based on use of discrete Hilbert transformation, that allows to reduce the analysis time. The realization of the offered technique is considered on an example of the correlation functions analysis of a phase of a sine wave signal and gaussian noise additive mix.