УДК 621.317.083

В.С. Єременко, канд. техн. наук
В.М. Мокійчук
О.В. Самойліченко

АЛГОРИТМ ГЕНЕРАЦІЇ ПСЕВДОВИПАДКОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ІЗ ДОВІЛЬНО ЗАДАНИМ ЗАКОНОМ РОЗПОДІЛУ

НАУ, кафедра інформаційно-вимірювальних систем, e-mail: nau_307@ukr.net

Запропоновано методику, яка дозволяє генерувати псевдовипадкові числові послідовності з довільним законом розподілу. Розглянуто приклади використання запропонованого алгоритму для генерування псевдовипадкових послідовностей з антимодальним і наближеним до нормального законами розподілу.

Постановка завдання

Методи імітаційного моделювання, які використовують під час проведення віртуальних експериментів, базуються на побудові певного алгоритму для генерації на ЕОМ реалізації досліджуваного процесу. При цьому широко застосовуються генератори числових послідовностей із різноманітними законами розподілу, наприклад, для дослідження сумарної випадкової похибки вимірювальної системи при різних варіаціях законів розподілу випадкових похибок елементів цієї системи.

На сьогодні існує багато алгоритмів генерації псевдовипадкових послідовностей із заданими функціями розподілу [1–3]:
– оберненої функції;
– кусково-лінійної апроксимації;
– підсумовування законів розподілу.

Ці алгоритми, на жаль, мають суттєві недоліки:
– не завжди задане аналітичне рівняння, яке визначає функцію розподілу;
– не завжди можна отримати аналітичним шляхом функцію, обернену до заданої функції розподілу;
– доволі складне визначення інтервалів розбиття реалізації випадкової послідовності;
– невизначеність необхідної кількості чисел в інтервалі.

Ці недоліки відсутні в розробленому авторами алгоритмі.

Алгоритм генерації

У загальному випадку алгоритм генерації псевдовипадкових числових послідовностей із довільно заданим законом розподілу такий.

1. Нехай необхідно згенерувати масив S_n, $n \in \overline{0 \ldots N-1}$ псевдовипадкових чисел обсягом N відліків із заданим законом розподілу. Функція густини ймовірності $P(x)$, що відповідає цьому закону розподілу, може бути задана або аналітично, або у векторній формі у вигляді дискретної множини точок.

2. Шляхом інтегрування функції густини ймовірності отримуємо інтегральну функцію розподілу $F(x)$.

3. Отриману функцію розподілу рівномірно розбиваємо на необхідну кількість інтервалів M залежно від потрібної якості генерації і формуємо масиви інтервалів F_m та X_m, $m \in \overline{0 \ldots M-1}$, значення яких дорівнюють відповідно значенням ординат та абсцис функції $F(x)$.

4. Генеруємо масив R_n випадкових чисел із рівномірним законом розподілу зі значеннями в діапазоні від 0 до 1, обсяг якого дорівнює обсягу N вихідного масиву S_n. Цей масив потрібен для випадкового змішування значень масиву S_n по довжині всієї вибірки N.

5. Генерація заданого масиву псевдовипадкових чисел S_n проводиться за таким алгоритмом:

$$S_n = rnd\left[X_m, X_{m+1}\right], \text{якщо } R_n \in \left[F_m, F_{m+1}\right],$$

де $n \in \overline{0 \ldots N-1}$; $m \in \overline{0 \ldots M-1}$.

Результати експериментальних досліджень

Для тестування алгоритму було проведено генерацію псевдовипадкових чисел з антимодальним законом розподілу та з законом розподілу, близьким до нормального з відмінним від нуля коефіцієнтом асиметрії.

Антимодальний закон розподілу використовується як одна зі стандартних апроксимацій функції густини ймовірності для випадкової похибки вимірювання (рис. 1).

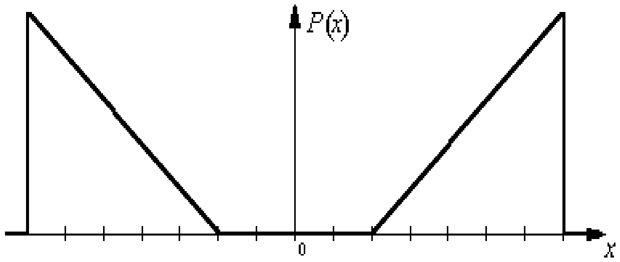

Рис. 1. Функція густини ймовірності антимодального закону розподілу

Інтегральна функція розподілу $F(x)$ розбита відповідно до пропонованого алгоритму на рівні інтервали в області визначення (рис. 2).

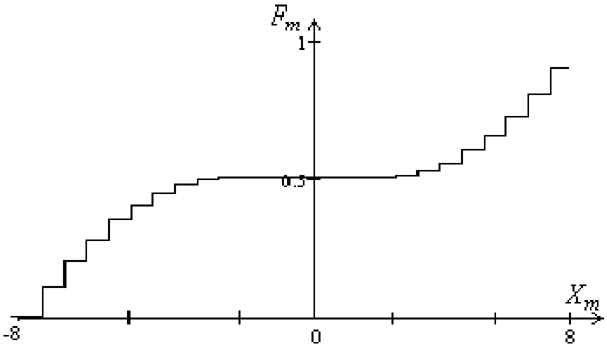

Рис. 2. Інтегральна функція розподілу $F(x)$ антимодального закону

Згенерований за запропонованим алгоритмом масив чисел у вигляді точок, розподілених за номером відліку, показано на рис. 3.

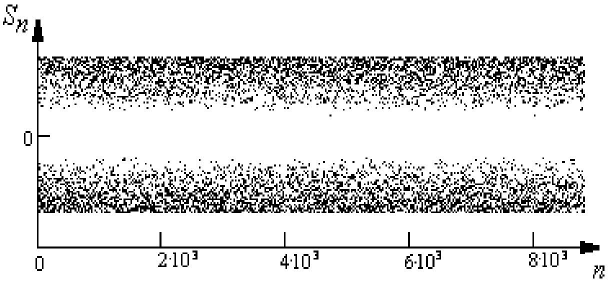

Рис. 3. Згенерований масив чисел

Усі значення отриманої послідовності зосереджені в зонах біля максимального і мінімального значень.

Отримана гістограма згенерованої послідовності за формою відповідає заданій функції густини ймовірності (рис. 4).

Для перевірки якості генерування була проведена оцінка узгодженості закону розподілу отриманої послідовності псевдовипадкових чисел із заданим законом розподілу.

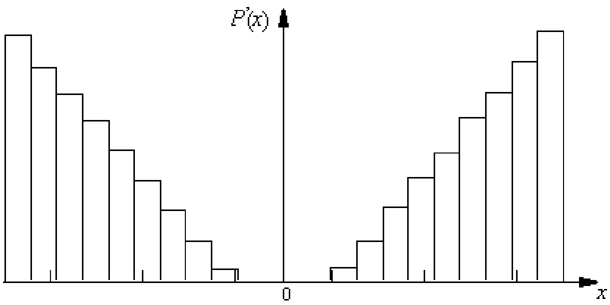

Рис. 4. Оцінка функції густини ймовірності $P'(x)$ для отриманого масиву чисел

Як критерій узгодженості використовували критерій Колмогорова–Смірнова [4]. Отримане значення статистики $\lambda = 0{,}63$ відповідає значенню критерію узгодженості 0,82. Це значення дає можливість стверджувати, що закон розподілу отриманої послідовності відповідає заданому з імовірністю 0,95.

Випадкову послідовність чисел із законом, близьким до нормального з відмінним від нуля коефіцієнтом асиметрії, зазвичай отримують змішуванням двох випадкових послідовностей із нормальним і рівномірним законами розподілу. Але потрібне значення коефіцієнта асиметрії можна отримати тільки підбором параметрів законів розподілу обох послідовностей та узгодженням їхніх обсягів вибірок.

Для побудови функції густини розподілу $P(x)$ із відмінним від 0 коефіцієнтом асиметрії можна використати, наприклад, коефіцієнти ортогонального ряду Грама–Шарльє [5], які визначаються через центральні моменти закону розподілу. Апроксимацію функції $P(x)$ отримуємо за виразом:

$$P(x) = \alpha(x)\left\{1 + \frac{1}{6}\mu_3 H_3(x) + \frac{1}{24}(\mu_4 - 3)H_4(x) + \ldots\right\}; \quad (1)$$

$$\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

де μ_i – центральні моменти розподілу i-го порядку; $H_r(x)$ – поліноми Чебишева–Ерміта:

$$H_r(x) = x^r - \frac{r^{[2]}}{2 \cdot 1!} x^{r-2} + \frac{r^{[4]}}{2^2 \cdot 2!} x^{r-4} - \ldots, \; r \in R.$$

Як приклад застосування ортогонального ряду Грама–Шарльє та запропонованого алгоритму розглянемо результат генерування псевдовипадкових чисел із законом розподілу, близьким до нормального та коефіцієнтом асиметрії, який дорівнює 0,5.

Отриману на основі рівняння (1) функцію густини ймовірності $P(x)$ показано на рис. 5 (крива *1*).

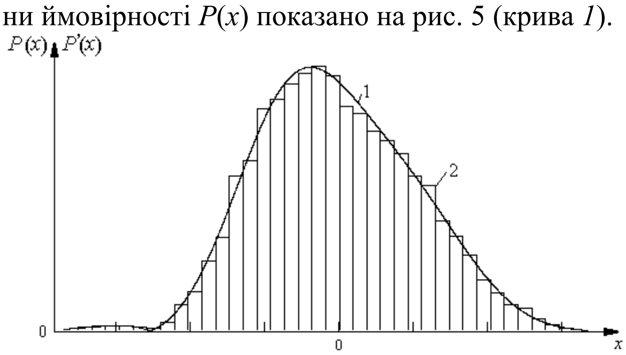

Рис. 5. Закон розподілу з коефіцієнтом асиметрії 0,5:
1 – функція густини ймовірності, яка отримана аналітично за виразом (1); *2* – оцінка функції густини ймовірності за результатом генерування

Оцінку функції густини ймовірності $P^{'}(x)$ для отриманої послідовності чисел у вигляді гістограми показано на рис. 5.

Узгодженість закону розподілу отриманої послідовності з заданим законом також перевірялася за критерієм Колмогорова.

Значення критерію узгодженості дорівнює 0,79. Отже, закон розподілу отриманої послідовності можна вважати узгодженим із заданим з імовірністю 0,95.

Висновок

Наведені результати дослідження запропонованого алгоритму показали, що він може застосовуватися для генерування псевдовипадкових числових послідовностей із довільно заданими законами розподілу, які можуть бути використані для розв'язку задач імітаційного моделювання. Згенеровані за запропонованим алгоритмом послідовності достатньо добре узгоджуються з теоретично заданими законами розподілу. Алгоритм відрізняється від відомих алгоритмів відносною простотою та достатньо високою якістю генерації.

Література

1. *Кнут Д.Э.* Искусство программирования. Т. 2. Получисленные алгоритмы. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 832 с.
2. *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло. – М.: Наука, 1973. – 312 с.
3. *Бабак В.П., Белецкий А.Я., Приставка А.Ф., Приставка Ф.А.* Стохастические сигналы и спектры. – К.: КИТ, 2004. – 290 с.
4. *Митропольский А.К.* Техника статистических вычислений. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
5. *Кендалл М., Стьюарт А.* Теория распределений. – М.: Наука, 1966. – 587 с.

Стаття надійшла до редакції 03.04.05.

В.С. Еременко, В.М. Мокийчук, О.В. Самойличенко

Алгоритм генерации псевдослучайных последовательностей с произвольно заданным законом распределения

Предложена методика, которая позволяет генерировать псевдослучайные числовые последовательности с произвольным законом распределения. Рассмотрены примеры использования предложенного алгоритма для генерирования псевдослучайных последовательностей с антимодальным и приближенным к нормальному законами распределения.

V.S. Eremenko, V.M. Mokychuk, O.V. Samoylichenco

Algorithm for generation pseudo-random series with arbitrarily assigned distribution law

Method for generation pseudo-random series with arbitrarily assigned distribution law has been proposed. The praxis of using proposed method for generation pseudo-random series with anti-modal and approximate to Gaussian distribution law has been investigated.