УДК 62.50

В.К.Антонов

ПОСТРОЕНИЕ КАЧЕСТВЕННЫХ РЕГУЛЯТОРОВ С ПОМОЩЬЮ ПРИНЦИПА ОПТИМАЛЬНОСТИ БЕЛЛМАНА

Приведены условия принадлежности траекторий обыкновенных дифференциальных оптимальных систем многообразию, на котором достигается заданное качество движения.

Непосредственно принцип оптимальности Беллмана в задачах аналитического конструирования регуляторов позволяет получить устойчивые решения и таким образом выполнить главное требование работоспособности замкнутой системы. При этом не имеются в виду задачи, в которых требуется минимизировать расход ресурсов или время, т.е. задачи с функционалами, имеющими физический смысл и соответствующую размерность. Поэтому любая замкнутая устойчивая система является оптимальной в смысле некоторого функционала, который можно найти, решая задачу, обратную задаче аналитического конструирования,– задачу определения функционала по заданному регулятору. Эта задача имеет также конструктивный содержательный смысл, поскольку в заданной предметной области (на транспорте, в энергетике, экономике) рациональные решения, как правило, уже найдены другими методами, отличными от применяемых в теории оптимального управления.

Обратная задача эквивалентна отысканию функции Ляпунова, поскольку подынтегральная функция в функционале при постановке задачи конструирования регулятора определяет поведение во времени производной функции Ляпунова. В отличие от задач анализа устойчивости при постановке задач оптимального управления функция Ляпунова является предопределенной выбором функционала. Достаточность условий устойчивости по Ляпунову одновременно обусловливает неоднозначность выбора функционала.

Абсолютно однозначный выбор функционала невозможен, но достаточность условий устойчивости (оптимальности) не ограничивает возможности совершенствования постановки задачи конструирования регуляторов, например, путем наложения более жестких условий поведения функции Ляпунова. Таким образом, наложим дополнительное ограничение поведения функции Ляпунова в виде дифференциального уравнения, которое выполняет роль носителя показателей качества движения – вторичных показателей устойчивости. Поскольку исходное подынтегральное выражение функционала уже определяет в стандартной постановке поведение функции Ляпунова, дополнительное ограничение введем в виде добавки к нему с некоторым весовым коэффициентом, указывающим распределение влияния на поведение функции Ляпунова между подынтегральным выражением и дополнительным ограничением. При этом роль исходного подынтегрального выражения уменьшается, что частично компенсирует неоднозначность его выбора.

Пусть управляемый динамический объект описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений :

$$\frac{DX}{dt} = F(t, X, u)\,, \tag{1}$$

где X–n-мерный вектор фазовых координат, вектор состояния системы; t – независимая переменная – время; F – вектор правых частей, удовлетворяющий требованию гладкости и дифференцируемости по фазовым координатам и времени; u – m-мерный вектор управляющих воздействий, вектор управлений.

Пусть далее искомый регулятор должен минимизировать заданный функционал:

$$J_0 = \int_t^{\infty} \omega(\tau, X(\tau), u(\tau, X(\tau)))d\tau\ , \tag{2}$$

где $u(\tau, X(\tau))$ – искомый регулятор.

Одновременно с минимизируемым функционалом зададим вспомогательное уравнение порядка r для вспомогательной функции:

$$\varphi_0(t, X, \dot{v}, \ddot{v}, \dddot{v}, ..., \overset{r}{v}) = 0 . \tag{3}$$

При этом вспомогательную функцию, поведение которой во времени ограничивается вспомогательным дифференциальным уравнением (2), будем считать пока неизвестной функцией времени и фазовых координат :

$$v = v(t, X) . \tag{4}$$

Далее вспомогательной функции будем придавать смысл функции Ляпунова-Беллмана и исходя из этой дополнительной посылки построим уравнение, которому должна удовлетворять вспомогательная функция как функция времени и фазовых координат.

Минимизируемый исходный функционал обычно выбирают в виде положительно определенной функции. Поставим задачу ввести в него ограничение (3) на поведение вспомогательной функции таким образом, чтобы на результат минимизации влияло не только основное содержание исходного функционала (2), но и ограничение поведения вспомогательной функции. Задачу будем решать путем расширения исходного функционала. Для этого в случае его положительной определенности дополним подынтегральное выражение слагаемым, которое сконструируем, используя вспомогательное уравнение.

Уравнение (3) используем как уравнение связи и построим расширенный функционал, учитывающий связь (3) в виде штрафной функции:

$$J = \int_t^{\infty} [\omega(\tau, X(\tau), u(\tau, X(\tau))) + \lambda\phi(t, X, v, \dot{v}, \ddot{v}, \dddot{v}, \cdots, \overset{r}{v})] d\tau , \tag{5}$$

где λ выполняет роль весового коэффициента, учитывающего соотношение вкладов в основного функционала и дополнительной связи.

В уравнении (5) штрафная функция ϕ может определяться различными способами. Например, она может быть равна модулю функции ϕ_0, что гарантированно сохраняет положительную определенность расширенного функционала или может совпадать с ней. Для расширенного функционала (4) запишем уравнение Беллмана:

$$\min\left(\frac{\partial v(t, X)}{\partial t} + \frac{\partial v(t, X)}{\partial X^T} F(t, X, u) + \omega(t, X, u) + \lambda \cdot \phi(t, X, v, \dot{v}, \ddot{v}, \cdots, \overset{r}{v})\right) = 0 . \tag{6}$$

В уравнении (6) производные по времени от вспомогательной функции могут быть определены в силу исследуемой системы. При такой подстановке уравнение (6) можно решить относительно вспомогательной функции и определить управление, задав общий вид вспомогательной функции и сведя ее нахождение к решению алгебраических или обыкновенных дифференциальных уравнений.

Введем сопряженный фазовому вектору X вектор переменных ψ, который определим как градиент вспомогательной функции :

$$\psi = \frac{\partial v(t, X)}{DX} = \mathrm{grad}(v(t, X)) . \tag{7}$$

С учетом определения выражения (7) построим расширенную функцию Гамильтона :

$$H = \psi^T F(t, X, u) + \omega(t, X, u) + \lambda\varphi(t, X, v, \dot{v}, \ddot{v}, ... \overset{r}{v}) . \tag{8}$$

Из определения сопряженного вектора (7) путем разделения переменных и интегрирования получим соотношение

$$v = \int \psi^T DX , \tag{9}$$

Дифференцируя соотношение (9) по времени, получаем связь между производными по времени от вспомогательной функции Ляпунова-Беллмана и соответствующими производными от сопряженного вектора:

$$\overset{i}{\nu} = \int \overset{i}{\psi}{}^T DX = p_i , \tag{10}$$

где $i = \overline{0, r}$ - порядок производной по времени ; DX - векторный дифференциал фазового вектора; p_i - обозначение производных по времени от вспомогательной функции .

Функция Гамильтона (8) с учетом выражений (9) и (10) может быть представлена как

$$H = \psi^T F(t,X,u) + \omega(t,X,u) + \lambda\varphi(t,X,p_0,p_1,...,p_r) \ . \qquad (11)$$

Определяя производные по времени от вспомогательной функции (4), в силу исследуемой системы (1) с учетом соотношений (9) имеем:

$$\begin{gathered}
v(t,X) = \int \psi^T(t,X)DX ; \\
\dot{v} = \dot{v}(t,X,F(t,X,u)) = \frac{\partial v(t,X)}{\partial t} + \frac{\partial v(t,X)}{DX^T}F(t,X,u) = \int \dot{\psi}^T(t,X,F(t,X,u))DX = \int \dot{\psi}^T(t,X,u)DX ; \\
\ddot{v} = \ddot{v}(t,X,F(t,X,u)) = \frac{\partial^2 v(t,X)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v(t,X)}{DX^T \partial t}F(t,X,u) + \frac{\partial v(t,X)}{DX^T}\left(\frac{DF(t,X,u)}{\partial t} + \frac{DF(t,X,u)}{Du^T}\frac{Du^T}{\partial t}\right) + \\
+ \frac{\partial^2 v(t,X)}{\partial t DX^T}F(t,X,u) + F^T(t,X,u)\frac{\partial^2 v(t,X)}{DX^T DX}F(t,X,u) + \\
+ F^T(t,X,u)\left(\frac{Du^T}{DX}\frac{DF^T(t,X,u)}{Du} + \frac{DF^T(t,X,u)}{DX}\right)\frac{\partial v(t,X)}{DX} = \\
= \int \ddot{\psi}^T(t,X,F(t,X,u))DX = \int \ddot{\psi}^T(t,X,u)DX; \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\overset{r}{v} = \overset{r}{v}(t,X,F(t,X,u)) = \dots = \int \overset{r}{\psi}{}^T(t,X,F(t,X,u))DX = \int \overset{r}{\psi}{}^T(t,X,u)DX \ .
\end{gathered} \qquad (12)$$

В уравнениях (12) каждая высшая производная по времени определена решениями системы (1). При матрично-векторном дифференцировании определение производных выше второй естественно приводит к матричным объектам размерности 3 и более, которые могут быть записаны с помощью индексированных символов транспонирования.

Управление определим из условия минимума функции Гамильтона (11), приравняв производную по вектору управления от этой функции нулю:

$$\frac{\partial H}{Du^T} = 0 \ . \qquad (13)$$

В развернутом виде соотношение (13) имеет следующий вид:

$$\psi^T \frac{DF(t,X,u)}{Du^T} + \frac{\partial\omega(t,X,u)}{Du^T} + \lambda\frac{\partial\varphi(t,p_0,p_1,...,p_r)}{D(p_0,p_1,...,p_r)}\frac{D(p_0,p_1,...,p_r)}{DF^T(t,X,u)}\frac{DF(t,X,u)}{Du^T} = 0 \ . \qquad (14)$$

Пусть система уравнений (14) имеет решение

$$u = u(t,X,p_0,p_1,...,p_r) \ . \qquad (15)$$

Формально переменные p_0, p_1, ..., p_r можно считать образующими векторную переменную P размерности $r+1$:

$$P^T = (p_0,p_1,...,p_r) = P^T(t,X,F(t,X,u)) \ . \qquad (16)$$

Соотношения (11) и (14) перепишем с учетом обозначения (16):

$$\begin{gathered}
H = \psi^T F(t,X,u) + \omega(t,X,u) + \lambda\phi(t,X,P) , \\
\frac{\partial H}{Du^T} = \psi^T \frac{DF(t,X,u)}{Du^T} + \frac{\partial\omega(t,X,u)}{Du^T} + \lambda\frac{\partial\phi(p_0,p_1,...,p_r)}{D(p_0,p_1,...,p_r)}\frac{D(p_0,p_1,...,p_r)}{DF^T(t,X,u)}\frac{DF(t,X,u)}{Du^T} = 0 \ .
\end{gathered} \qquad (17)$$

Решение уравнения (17) запишем в форме, аналогичной решению уравнения (14):

$$u = u(t,X,P) = \Phi(t,X,P) \ . \qquad (18)$$

Подставим выражение для управления (18) в уравнение (6). Поскольку управление определено из условия минимума функции Гамильтона , выражение в скобках под знаком минимума по управлению (6) равно нулю:

$$\frac{\partial v(t,X)}{\partial t}+\frac{\partial v(t,X)}{DX^{T}}F(t,X,\Phi(t,X,P))+\omega(t,X,\Phi(t,X,P))+ \\ +\lambda\varphi(t,X,P(t,X,F(t,X,\Phi(t,X,P))))=0\,. \tag{19}$$

Уравнения (12), (18) и (19) образуют систему, решением которой является регулятор (18) и вспомогательная функция v(t,X). При этом достигается экстремум расширенного уравнением связи для вспомогательной функции функционала (5) при выполнении ограничений (3), накладываемых на поведение во времени вспомогательной функции и отражающих требования к качеству переходных процессов.

Далее выведем дифференциальное уравнение для сопряженной переменной. Для этого продифференцируем выражение (19) по фазовому вектору. При построении такого рода выражений в общем виде теряется их практическая целесообразность, так как громоздкость записи приводит к невозможности практического использования результатов. Поэтому актуальным является применение компьютерных систем аналитических вычислений, с помощью которых возможно выполнение объемных аналитических преобразований и последующее формирование рабочих файлов, которые затем можно использовать при построении соответствующих вычислительных процедур:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^{2}v(t,X0)}{\partial tDX}+\frac{\partial^{2}v(t,X)}{DX^{T}DX}F(t,X,\Phi(t,X,P))+ \\
+\frac{DF^{T}(t,X,\Phi(t,X,P))}{DX}\frac{\partial v(t,X)}{DX}+ \\
+\frac{\partial\omega(t,X,\Phi(t,X,P))}{DX}+\lambda\frac{\partial\Phi(t,X,P(t,X,F(t,X,\Phi(t,X,P))))}{DX}+ \\
\left[\begin{gathered}
+\frac{D\Phi^{T}(t,X,P)}{DX}\frac{DF^{T}(t,X,u)}{Du}\frac{\partial v(t,X)}{DX}+\frac{D\Phi^{T}(t,X,P)}{DX}\frac{\partial\omega(t,X,u)}{Du}+ \\
+\lambda\frac{D\Phi^{T}(t,X,P)}{DX}\frac{\partial\phi(t,X,P(t,X,F(t,X,\Phi(t,X,P))))}{Du}+ \\
+\lambda\frac{D\Phi^{T}(t,X,P)}{DX}\frac{DF^{T}(t,X,u)}{Du}\frac{DP^{T}(t,X,F(t,X,\Phi(t,X,P)))}{DF}\frac{\partial\varphi(t,X,P)}{DP}+
\end{gathered}\right] \\
+\lambda\frac{DP^{T}(t,X,F(t,X,\Phi(t,X,P)))}{DX}\frac{\partial\phi(t,X,P)}{DP}=0\,.
\end{gathered} \tag{20}$$

В выражении (20) первая строка представляет собой полную производную по времени от сопряженного вектора

$$\dot{\psi}=\frac{\partial^{2}v(t,X)}{\partial tDX}+\frac{\partial^{2}v(t,X)}{DX^{T}DX}F(t,X,\Phi(t,X,P))\,. \tag{21}$$

Правые части уравнения (3) в общем случае зависят непосредственно от вектора X в явном виде. Поэтому частная производная от ϕ по X, формально приведенная в уравнении (20), не равна нулю. Соотношение (20) содержит группу членов. повторяющих правую часть уравнения (17), имеющую общий для каждого слагаемого сомножитель – частную производную от вектора оптимального управления Ф по фазовому вектору X. На оптимальных траекториях эта группа членов согласно уравнению (17) равна нулю. Для удобства сравнения соотношения (20) с уравнением (17) равные нулю члены и группа членов взяты в квадратные скобки. Для рассмотрения последнего члена в соотношении (20) вернемся к определению вектора P согласно выражениям (15) и (12) . Его компонентами являются производные по времени от вектора сопряженных переменных, образующих матрицу – векторную строку, каждым элементом которой является вектор – производная по времени порядка от 0 до r от сопряженного вектора:

$$\frac{DP^{T}}{DX} = \left(\psi, \dot{\psi}, \ddot{\psi}, \cdots, \overset{r-1}{\psi}, \overset{r}{\psi} \right) = \Psi \quad . \tag{22}$$

Введя таким образом обозначение (22) в виде вектора Ψ, перепишем уравнение (20) с учетом соотношений (7), (17), (21). В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для вектора сопряженных переменных:

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial F^{T}(t, X, \Phi(t, X, P))}{DX}\psi - \frac{\partial \omega(t, X, \Phi(t, X, P))}{DX} - \\ -\lambda \frac{\partial \varphi(t, X, P(t, X, P(t, X, F(t, X, \Phi(t, X, P)))))}{DX} - \lambda \Psi \frac{\partial \varphi(t, X, P)}{DP} - \\ -\lambda \frac{D\Phi^{T}(t, X, P)}{DX} \frac{\partial \varphi(t, X, P(t, X, P(t, X, F(t, X, \Phi(t, X, P)))))}{Du} . \tag{23}$$

Уравнение (23) есть интегродифференциальное уравнение для вектора сопряженных переменных, образующее вместе с уравнением (1) при определении управления согласно выражению (18) систему Гамильтона. Его интегродифференциальный тип обусловлен соотношениями (12).

Для решения сопряженного уравнения (14) необходимо знать начальные условия для вспомогательной функции и ее производных, которые удовлетворяли бы условиям оптимальности и уравнению связи (3).

Решение задач конструирования регуляторов не предусматривает получения конечного результата с первой попытки, а включает многократное решение задачи синтеза, в результате чего находятся приемлемые значения настроечных параметров в функционале. Расширение функционала позволяет также решить дополнительную задачу. При найденном регуляторе может быть решена обратная задача конструирования – определен новый исходный функционал, и затем снова может решаться задача для расширенного функционала. Другой вариант построения итераций состоит в дополнении исследуемой управляемой системы найденным регулятором – отнесением его к непосредственно не управляемой части и последующим нахождением регулятора для расширенного функционала. Примеры расчета показывают, что каждая следующая итерация приводит к добавочному регулятору, коэффициенты которого уменьшаются, что означает сходимость итераций.

Рассмотрим в качестве примера процесс управления выделением тепла при трении. Соприкасающиеся движущиеся относительно друг друга трущиеся материальные поверхности имеют общий объем электронного газа. Для него условие прилипания выполняться не может в силу общности его объема и связи с внутренней структурой поверхностей. Поэтому в их поверхностных слоях образуются электрические вихревые токи, что приводит к нагреванию и электромагнитному излучению. Их взаимодействием можно объяснить возникновение силы трения. Из этого следует, что сверхпроводящие поверхности при трении тепла не выделяют, процессом выделения тепла можно управлять внешним электромагнитным воздействием, которое препятствовало бы возникновению вихревых токов и выделение тепла повышается при увеличении гладкости (чистоты) поверхностей. Выбрав в качестве управления шероховатость поверхностей, к исходному минимизируемому функционалу отнесем выделение тепла, а дополнительное ограничение свяжем с его минимумом. Тогда решением задачи управления является оптимальная шероховатость поверхностей.

При механической обработке поверхностей деталей механизмов абразивными инструментами измерение количества удаленного материала может осуществляться путем измерения связанного с ним электрического тока переноса, вызванного искровым потоком.

Стаття надійшла до редакції 06.07.01.