

УДК 519.254

665.6132.141

А.Я. Білецький, П.О. Приставка

### ЗАСТОСУВАННЯ ПОЛІНОМІАЛЬНОГО СПЛАЙНА ТРЬОХ ЗМІННИХ НА ОСНОВІ В-СПЛАЙНІВ ПРИ ОБРОБЦІ РЕЗУЛЬТАТІВ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

*Наведено обчислювальну схему локального поліноміального сплайна другого порядку на основі В-сплайнів. Розглянуто постановку задачі на використання такого сплайна при обробці результатів спостережень.*

Однією з основних задач, що виникає при обробці результатів спостережень, є така: за масивом спостережень вигляду  $\{x_{ij}, p_j; i = \overline{1, k}, j = \overline{1, n}\}$  знайти наближення деякої функції

$p = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ , реалізацією якої є масив, що спостерігається. Нехай обробці підлягає масив  $n$  спостережень реалізацій за  $k+1$  ознаками об'єкта (явища, процесу). Причому як мінімум одна з ознак функціонально пов'язана з  $k$  іншими. Прикладами таких залежностей при  $k=3$  можуть бути вміст концентрацій хімічних речовин у земній корі визначений у просторових точках з координатами  $(x, y, z)$ , температура у точках вимірювання деякого тіла або області, усереднене значення функції щільності розподілу реалізацій тривимірної випадкової величини за результатами спостереження певного об'єкта за ознаками  $x_1, x_2, x_3$ . У випадку  $k=1$  існує достатньо методів розв'язання задачі наближення функції вигляду  $p = f(x)$ . Сформульовану задачу при  $k=3$  розв'яжемо за допомогою поліноміальних сплайнів на основі В-сплайнів другого порядку для випадку трьох змінних. Отже, маємо таку постановку задачі на дослідження: за масивом спостережень вигляду

$$\{t_i, q_i, g_i, p_i; i = \overline{1, n}\}, \quad (1)$$

де трійка  $\{t, q, g\}$  визначає точку простору одночасної реалізації спостережень за ознаками  $T, Q, G$ ;  $p$  – залежну величину, аргументами якої є реалізації ознак  $T, Q, G$ ; побудувати наближення функції  $p(t, q, g)$ , реалізацією якої є масив, що спостерігається. При цьому зробимо додаткове припущення, що функція  $p(t, q, g) \in C^{2,2,2}$  є гладкою та неперервною разом з усіма своїми похідними.

Поняття локального поліноміального сплайна за рівномірним розбиттям осі спостережень  $\Delta_h$  можна узагальнити на випадок двох і більшого числа змінних [1]. Для спостережень масиву (1) фіксуємо три розбиття  $\Delta_{h_t}, \Delta_{h_q}, \Delta_{h_g}$  осей спостереження ознак  $T, Q, G$  точками  $t_i = ih_t$  ( $i \in Z$ ) з кроком розбиття  $h_t$ , точками  $q_j = jh_q$  ( $j \in Z$ ) з кроком  $h_q$  і  $g_v = vh_g$  ( $v \in Z$ ) з кроком  $h_g$ , відповідно до яких задається  $\Delta_{h_t, h_q, h_g}$  розбиття площини спостереження одночасної реалізації ознак  $T, Q, G$ .

Тривимірним сплайном порядку  $m$  дефекту  $k$  ( $1 \leq k \leq m$ ) за змінною  $t$ , порядку  $n$  дефекту  $l$  ( $1 \leq l \leq n$ ) за  $q$  і порядку  $s$  дефекту  $f$  ( $1 \leq f \leq s$ ) за  $g$  щодо розбиття  $\Delta_{h_t, h_q, h_g}$  називають функцію  $S(t, q, g) \in C^{m-k, n-l, s-f}$ , яка на кожному елементі розбиття  $\Delta_{h_t, h_q, h_g}$  є алгебричним багаточленом ступеня  $m$  за  $t$ , ступеня  $n$  за  $q$  і ступеня  $s$  за  $g$ . Лінійну різноманітність таких сплайнів позначимо  $S_{m, n, s}^{k, l, f}(\Delta_{h_t, h_q, h_g})$ . Природною є можливість розг-

ляду лінійної різноманітності  $S_m^k(\Delta_{h_t}), S_n^l(\Delta_{h_q}), S_s^f(\Delta_{h_g})$  одновимірних сплайнів за змінними  $t, q$  і  $g$  відповідно.

Якщо задано базиси сплайнів  $S_m^k(\Delta_{h_t}), S_n^l(\Delta_{h_q}), S_s^f(\Delta_{h_g})$ , то система функцій утворена з різних добутоків функцій базисів одновимірних сплайнів, буде базисом тривимірного сплайна.

У результаті проведення розбиття  $\Delta_{h_t, h_q, h_g}$  простору спостереження характеристик  $T, Q, G$  фіксуються  $a \times b \times c$  областей розбиття, у межах яких шукається наближення функції  $p(t, q, g)$  у вигляді сплайна  $S_{m, n, s}^{k, l, f}(\Delta_{h_t, h_q, h_g})$ , отже, одержано масив даних для подальшої обробки вигляду

(2)

де  $(t_i, q_j, g_v)$  – внутрішня точка  $(i, j, v)$ -ї області розбиття;  $p_{i, j, v}$  – усереднене значення функції  $p(t, q, g)$  у  $(i, j, v)$ -й області.

Отже, задача зводиться до проведення інтерполяції у середньому по рівномірній сітці розбиття за значеннями  $p_{i, j, v}, i \in Z, j \in Z, v \in Z$ , кожне з яких належить області

$$\{(t_i - h_t/2; t_i + h_t/2), (q_j - h_q/2; q_j + h_q/2), (g_v - h_g/2; g_v + h_g/2)\}.$$

Тоді, якщо задано системи базисних функцій у вигляді  $B$ -сплайнів [2], можемо одержати тривимірний поліноміальний сплайн другого порядку, що є наближенням функції  $p(t, q, g)$ . Інакше масиву (2) значень  $p_{i, j, v}$  можемо поставити у відповідність сплайн вигляду

$$S_{2,0}(p, t, q, g) = \sum_{i \in Z} \sum_{j \in Z} \sum_{v \in Z} B_{2, h_t}(t - ih_t) B_{2, h_q}(q - jh_q) B_{2, h_g}(g - vh_g) p_{i, j, v}, \quad (3)$$

де з урахуванням відповідного аргументу

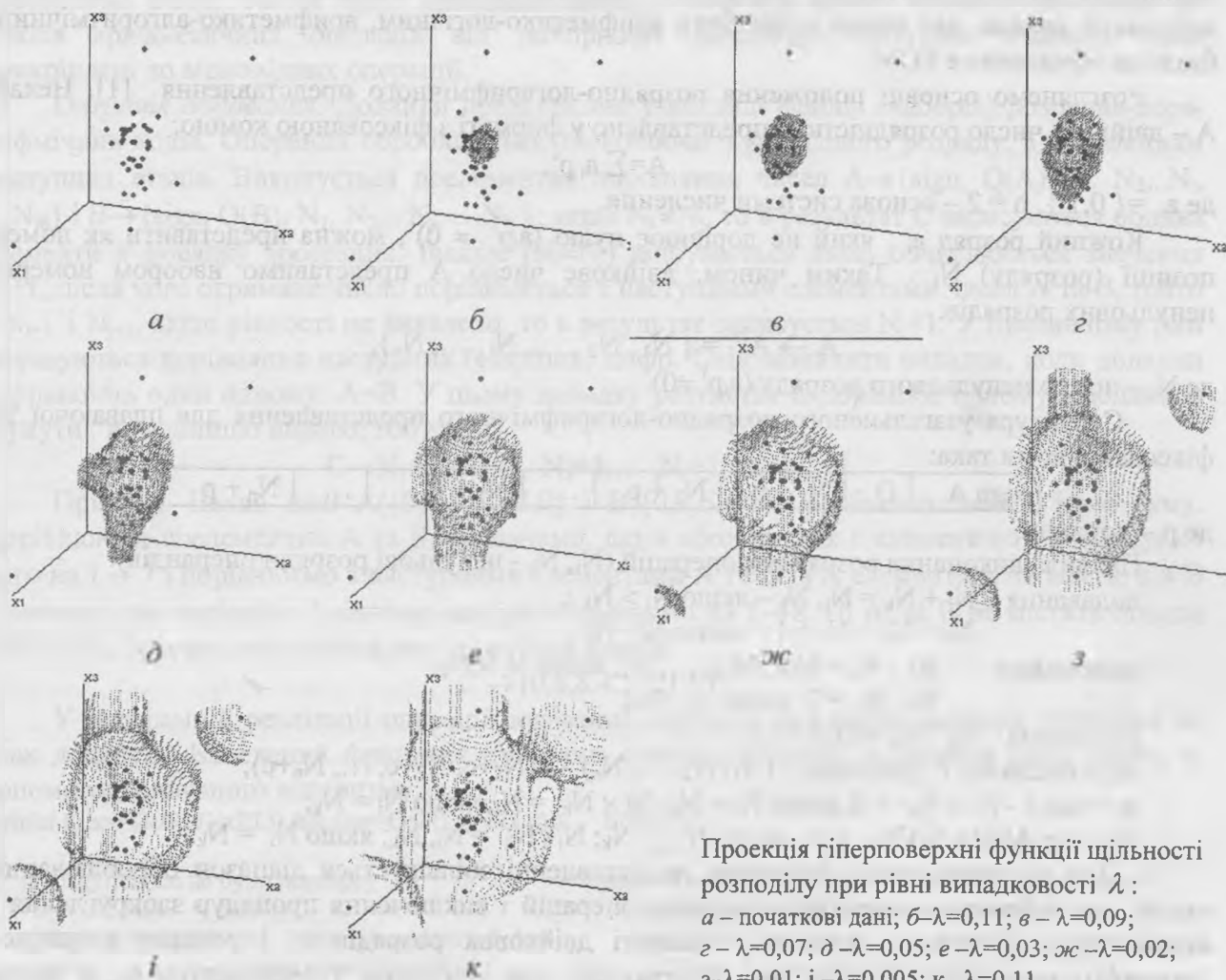
$$B_{2, h_t}(t) = \begin{cases} 0, & |t| \geq 3h_t/2, \\ \frac{(3 + 2t/h_t)^2}{8}, & t \in [-3h_t/2; -h_t/2], \\ \frac{3 - (2t/h_t)^2}{4}, & t \in [-h_t/2; h_t/2], \\ \frac{(3 - 2t/h_t)^2}{8}, & t \in [h_t/2; 3h_t/2]. \end{cases}$$

Наведений явний вигляд сплайна (3) дозволяє застосовувати його в задачах обробки результатів різного роду спостережень. Коло подібних задач досить широке: від побудови просторових моделей за результатами моніторингу до наближення теоретичної функції щільності розподілу ймовірностей реалізації випадкової величини. За рахунок використання в обчислювальних схемах найпростіших арифметичних операцій (+, -, \*, /) розроблювач математичного забезпечення ЕОМ одержує найбільш оптимізований, швидкодіючий програмний код. Крім того, маючи явний вигляд наближення функції  $p(t, q, g)$ , можна проводити подальше дослідження відносно апроксимаційних властивостей сплайна (3).

Зрозуміло, що сплайн  $S_{2,0}(p, t, q, g)$  – це гіперповерхня. Тому для візуалізації одержаних результатів слід відображати відповідні проекції сплайна (3) у звичний тривимірний простір. На рисунку показано приклад реалізації обчислювальної схеми наведеного поліноміального сплайна при наближенні функції щільності розподілу ймовірностей реалізацій тривимірної випадкової величини за наступним масивом спостережень:

{(156.4, 305.5, 1168.6), (147.4, 271.2, 557.3), (172.0, 340.8, 379.1), (183.5, 261.9, 605.8), (170.3, 270.6, 407.8), (174.5, 317.6, 500.0), (191.3, 218.0, 680.0), (188.5, 300.9, 279.1), (167.0, 295.0, 440.0), (191.6, 250.3, 841.2), (145.3, 255.4, 446.5), (133.9, 273.9, 384.2), (151.8, 307.1, 272.7), (222.6, 328.4, 865.3), (172.0, 328.5, 684.2), (138.2, 335.4, 720.5), (173.6, 337.0, 685.4), (178.6, 334.1, 619.2), (174.9, 281.7, 41.2), (180.4, 656.6, 1247.9), (380.7, 85.1, 165.5), (190.4, 273.6, 280.5), (143.1, 294.0, 661.0), (167.0, 304.0, 332.2), (151.7, 404.4, 328.7), (150.3, 237.1, 601.6), (120.2, 291.8, 495.4), (110.2, 237.1, 598.2), (110.2, 225.0, 573.8), (103.2, 202.6, 555.4), (110.2, 200.6, 563.2), (120.2, 243.2, 507.2), (130.3, 188.5, 500.0), (110.2, 212.8, 553.1), (140.2, 231.0, 397.7), (121.0, 247.2, 401.6), (90.2, 188.5, 468.1), (90.2, 188.5, 468.1), (150.3, 310.1, 528.1)}.

Наведений приклад (див.рисунок) демонструє не тільки можливість проведення ймовірнісної оцінки за тривимірним масивом спостережень. Щодо наближення сплайном (3)



Проекція гіперповерхні функції щільності розподілу при рівні випадковості  $\lambda$  :  
 а - початкові дані; б- $\lambda=0,11$ ; в -  $\lambda=0,09$ ;  
 г -  $\lambda=0,07$ ; д - $\lambda=0,05$ ; е - $\lambda=0,03$ ; ж - $\lambda=0,02$ ;  
 з - $\lambda=0,01$ ; і - $\lambda=0,005$ ; к - $\lambda=0,11$

функції щільності розподілу слід зазначити можливість його використання в задачах класифікації спостережень за ймовірнісною мірою, в задачах вилучення аномальних результатів експерименту, при обробці вибірок обмеженого обсягу та інших задачах.

#### Список літератури

1. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближений. М.: Наука, 1984. -352 с.
2. Лигун А.А., Шумейко А.А. Асимптотические методы восстановления кривых. - К.: ІМ НАН України, 1996. - 358 с.

Стаття надійшла до редакції 24.09.01.