ОБРОБКА СИГНАЛІВ

УДК 62-501.1

А.Я. Білецький, О.А.Білецький, О.Г.Кучер

СИНТЕЗ СИМЕТРИЧНИХ МАТРИЦЬ УОЛША ЗА МЕТОДОМ СПРЯМОВАНОЇ ПЕРЕСТАНОВКИ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ

Запропоновано алгоритм регулярного синтезу повного набору симетричних матриць Уолша, розмір яких є довільним двійково-раціональним числом. Основу алгоритму складає метод спрямованої перестановки базисних функцій Уолша, що забезпечує мінімальний обсяг обчислень.

Функціями Уолша називаються дискретні функції, задані на кінцевому інтервалі зміни змінної, що включає в себе N точок від 0 до $N-1$, причому на кожному еквідистантному напівінтервалі змінної $n=\overline{0,N-1}$ функція приймає всього два значення (+1 або –1).

Загальноприйняте позначення для функцій Уолша $\omega(k,n)$, у якому k – номер функції, а n – аргумент функції (нормований дискретний час), причому $n \in [0,N-1]$. Число N спрощено будемо називати інтервалом, який визначає порядок (розмірність) функції Уолша. Функції Уолша, як правило, задають на двійково-раціональному інтервалі $N = 2^m$, де $m=1,2,\ldots$.

Розрізняють функції Уолша трьох типів. До першого типу відноситься так звана нульова функція $\omega(0,n)$, яка на всьому інтервалі визначення приймає значення, рівне +1, тобто

$$\omega(0,n) = +1, \quad n=\overline{0,N-1}.$$

До другого типу відноситься функція вигляду

$$\omega(k,n)=\begin{cases} +1, n=\overline{0,\frac{N}{2}-1}, \\ -1, n=\overline{\frac{N}{2},N-1}, \end{cases}$$

тобто функція, яка приймає значення +1 на лівому напівінтервалі аргументу n і –1 – на правому напівінтервалі аргументу.

Третій тип складають решта $N-2$ функцій Уолша, характерна риса яких полягає в тому, що як на лівому, так і на правому напівінтервалах аргументів функція однакове число разів приймає значення +1 і –1, причому $\omega(k,0)=+1$, $k=\overline{0,N-1}$.

Зведені разом і пронумеровані функції Уолша утворюють системи. Число функцій, які включаються в систему, звичайно дорівнює числу N відліку функції, тобто $k=\overline{0,N-1}$. Параметр k визначає номер функції. До системи функцій Уолша в обов'язковому порядку входять функції всіх трьох типів. Оскільки нумерація (упорядкування) функцій Уолша може бути виконана різними способами, то можливі різні системи функцій Уолша. Зручним способом представлення цих систем є зображення їх у вигляді квадратних матриць, в яких кожний рядок – це функція Уолша, причому для простоти замість значень елементів +1 і –1 записують тільки їхні знаки + або – [1].

Незалежно від способу упорядкування функцій Уолша в будь-якій системі Уолша нульова функція займає фіксоване місце в матриці Уолша будучи її першим рядком. Інші $N-1$ функції можна переставляти різними способами. Число можливих перестановок дорівнює $(N-1)!$ Отже, на інтервалі N визначення функцій Уолша існує $(N-1)!$ систем (матриць) Уолша.

Особливе місце в множині $(N-1)!$ матриць Уолша займають симетричні матриці, для яких

$$\omega(k,n) = \omega(n,k).$$

Дана умова означає, що якщо W_N – матриця Уолша N-го порядку, то

$$W_N^T = W_N ,$$

де W_N^T – транспонована матриця.

Базисна система функцій, придатна для проведення спектрального аналізу, включаючи пряме і обернене дискретне перетворення Фур'є, повинна мати визначений мінімальний набір властивостей. Необхідно, щоб ця система була повною, мультиплікативною, ортогональною і симетричною щодо номера функції k і номера відліку n [2]. Саме такий набір властивостей мають симетричні матриці Уолша. Отже, системи симетричних функцій Уолша можуть бути використані як базисні системи. Кожну k-ту функцію Уолша в цій системі (чи k-й рядок симетричної матриці Уолша) будемо називати k-ю базисною функцією.

На інтервалі $N = 4$ усього існує 3! = 6 базисних систем функцій Уолша, серед яких чотири системи – симетричні. Не складає особливих труднощів виписати всі шість систем функцій Уолша і відібрати з них симетричні. Інтервалу $N = 8$ відповідають 7! = 5040 систем функцій Уолша. При $N = 16$ число систем (симетричних і несиметричних) складає величину порядку $1{,}3 \cdot 10^{12}$. Якщо для $N = 8$ можливо (принаймні на комп'ютері) здійснити перебір усіх перестановок базисних функцій Уолша і відібрати симетричні матриці, то для $N = 16$ ця задача нездійсненна.

Розглянемо запропонований алгоритм синтезу симетричних матриць Уолша довільного (але двійково-раціонального) порядку N за методом спрямованих перестановок базисних функцій Уолша. Ідею методу пояснимо на прикладі матриць Уолша восьмого порядку.

Стартовою (базовою) матрицею може бути прийнята будь-яка симетрична матриця Уолша. Зупинимося на матриці Пелі:

$$P_8 = \{\,p(k,n)\} = \begin{array}{c} \\ 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\ k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 0&1&2&3&4&5&6&7 \end{array}\;\; n \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} +&+&+&+&+&+&+&+\\ +&+&+&+&-&-&-&-\\ +&+&-&-&+&+&-&-\\ +&+&-&-&-&-&+&+\\ +&-&+&-&+&-&+&-\\ +&-&+&-&-&+&-&+\\ +&-&-&+&+&-&-&+\\ +&-&-&+&-&+&+&- \end{array}\right] \\ \end{array} . \qquad (1)$$

У будь-якій системі функцій Уолша перший рядок матриці (нульова базисна функція) не може бути переставлений ні на який інший рядок, тому що це свідомо призведе до порушення симетричності матриці. На місці другого рядка симетричної матриці може знаходитися кожен з $N-1$ рядків, що залишилися, (функцій Уолша) матриці (1). Приймемо за таку першу базисну функцію, тобто функцію $p(1,n)$, у результаті чого одержимо такі два рядки сформованої матриці:

$$\begin{array}{c} \\ 0\\1\\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 0&1&2&3&4&5&6&7 \end{array}\;\; n \\ \left[\begin{array}{cccccccc} +&+&+&+&+&+&+&+\\ +&+&+&+&-&-&-&- \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccccccc} &&2{,}3&&&&& \end{array} \end{array} \qquad (2)$$

Вибір третього рядка обмежений умовою збереження симетричності матриці. Для того, щоб дотримати цю умову, з рядків матриці (1), що залишилися, потрібно вибрати такі, початкові елементи яких збігаються з початковими елементами другого стовпця (відлік номерів стовпців починається з нульового) матриці (2). У співвідношенні (2) початкові елементи другого стовпця матриці виділені круглими дужками. Виділеним елементам матриці (2) відповідають друга і третя базисні функції матриці (1). Номери цих функцій наведені знизу під круглими дужками в матриці (2). За третій рядок формованої симетричної матриці приймемо другу базисну функцію системи (1), одержимо

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \end{array}\right] \\ & \begin{array}{cccccccc} & & & 3 & & & & \end{array} \end{array} \quad . \tag{3}$$

На наступному кроці з базисних функцій системи (1) вибираємо такі, початкові елементи яких відповідають виділеним елементам матриці (3). Цій умові відповідають друга і третя базисні функції системи (1). Але друга базисна функція вже задіяна в матриці (3). Тому на місці четвертого рядка формованої матриці можна поставити лише функцію $p(3, n)$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \end{array}\right] \\ & \begin{array}{cccccccc} & & & & 4{,}5 & & & \end{array} \end{array} \quad . \tag{4}$$

Четвертому стовпцю матриці (4) відповідають четверта і п'ята базисні функції системи (1). Спочатку виберемо четверту і приходимо до матриці

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \end{array}\right] \\ & \begin{array}{cccccccc} & & & & & 5 & & \end{array} \end{array} \quad . \tag{5}$$

Починаючи з фрагмента (5) на місцях шостого, сьомого і восьмого рядків формованої матриці можуть бути поставлені лише п'ята, шоста і сьома базисні функції системи (1) відповідно. У результаті зазначених перестановок приходимо до симетричної матриці (1). Цю матрицю позначимо M1.

Звернемося до матриці (4). Четвертому стовпцю цієї матриці відповідає не тільки четверта (вже використана в матриці (5)), але й п'ята базисна функція системи (1). Розміщуючи функцію $p(5, n)$ на місці п'ятого рядка формованої матриці, одержимо

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & + & - & - & + & - & + \end{array}\right] \\ & \begin{array}{cccccccc} & & & & & 4 & & \end{array} \end{array} \quad . \tag{6}$$

З матриці (6) випливає, що її шостому і сьомому стовпцю відповідають лише сьома і шоста базисні функції системи (1) відповідно. Таким чином, одержимо другу симетричну матрицю:

$$\mathrm{M2} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \quad n \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & - & - & + & - & + & + & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \end{bmatrix} \end{array} .$$

Повернемося до матриці (2), відповідно до якої на місці третього рядка може бути поставлена не тільки друга базисна функція системи (1), але і третя функція. Одержимо матрицю

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \quad n \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{cccccccc} & & & 2 & & & & \end{array} \end{array} . \qquad (7)$$

На наступному кроці описаного алгоритму від матриці (7) приходимо до таких двох симетричних матриць:

$$\mathrm{M3} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \quad n \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathrm{M4} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \quad n \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & - & + & + & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \end{bmatrix} \end{array}$$

Матриця M4 є четвертою й останньою із серії симетричних матриць, в яких у другому рядку знаходиться перша базисна функція системи (1). Продовження процедури спрямованої перестановки базисних функцій полягає в тому, що замість першої в другому рядку формованої матриці записується друга базисна функція системи (1) і т.д. Повний набір перестановок базисних функцій системи Уолша-Пелі восьмого порядку, які відповідають симетричним матрицям, розташованим в порядку зростання їх номерів рядків і стовпців відносно базисної системи функцій, наведений у табл. 1.

Співвідношення між порядком N матриць Уолша і числом L симетричних матриць, які відповідають даному порядку, одержаних за методом спрямованих перестановок базисних функцій, визначене в табл. 2.

Таблиця 1

M	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	1	2	3	5	4	7	6
3	0	1	3	2	6	7	5	4
4	0	1	3	2	7	6	4	5
5	0	2	4	6	1	3	5	7
6	0	2	5	7	3	1	6	4
7	0	2	6	4	1	3	7	5
8	0	2	7	5	3	1	4	6
9	0	3	4	7	5	6	1	2
10	0	3	5	6	7	4	2	1
11	0	3	6	5	4	7	2	1
12	0	3	7	4	6	5	1	2
13	0	4	1	5	2	6	3	7
14	0	4	1	5	3	7	2	6
15	0	4	2	6	1	5	3	7
16	0	4	3	7	2	6	1	5
17	0	5	1	4	6	3	7	2
18	0	5	1	4	7	2	6	3
19	0	5	2	7	4	1	6	3
20	0	5	3	6	7	2	4	1
21	0	6	4	2	1	7	5	3
22	0	6	5	3	2	4	7	1
23	0	6	7	1	2	4	5	3
24	0	6	7	1	3	5	4	2
25	0	7	4	3	5	2	1	6
26	0	7	5	2	6	1	3	4
27	0	7	6	1	4	3	2	5
28	0	7	6	1	5	2	3	4

P_n

Таблиця 2

N	1	2	4	8	16	32	64
L	1	1	4	28	448	13888	888832

Рядки N і L (табл. 2) можна відобразити мнемонічною схемою (див.рисунок). Позначимо

$$L = L_N = L_{2^m}.$$

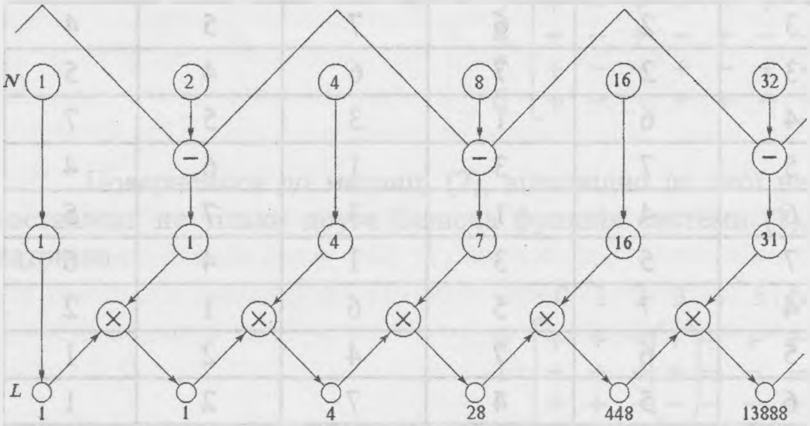
За дедукцією для $m \geq 2$ приходимо до рекурентної формули

$$L_N = \begin{cases} L_{N-1}N, & \text{якщо } m - \text{парне;} \\ L_{N-1}(N-1), & \text{якщо } m - \text{непарне}, \end{cases} \qquad (8)$$

Співвідношення (8) дає загальну оцінку числа L симетричних матриць Уолша дл довільного двійково-раціонального інтервалу N. Раніше в роботі [1] емпірично одержан інший вираз для L. А саме

$$L = 3\cdot 2^{m-1} - m\ ,\qquad (9$$

де m – показник степеня 2 інтервалу $N = 2^m$.



Мнемонічна схема визначення числа симетричних матриць Уолша:
$\otimes$ – помножувач; $\ominus$ – зменшувач одиниці

Оцінки числа симетричних матриць Уолша за формулами (8) і (9) істотно розходятьс що є свідченням помилковості співвідношення (9).

Описаний алгоритм синтезу симетричних систем Уолша розмірності N, що дорівню степеню 2, не тільки забезпечує можливість одержання повного набору цих систем, але складає мінімум витрат машинного часу при формуванні симетричних матриць, оскільк виключає тупикові перестановки базисних функцій стартової матриці Уолша.

Список літератури

1. *Трахтман А.М., Трахтман В.А.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интерва лах. – М.: Сов. радио, 1975. – 208 с.

2. *Трахтман А.М.* Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. – М.: Сов.радис 1975. – 326 с.

Стаття надійшла до редакції 05.09.01.

УДК 517.511:535
ББК Ј973.235-013

С.А. Ясенко, В.М. Шутко, О.В. Савченк

ОСОБЛИВОСТІ ФОРМУВАННЯ ЗОБРАЖЕННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ МАТРИЧНОГО ПРИЙМАЧА

Розглянуто особливості одержання оцінки функції вхідного сигналу в системах з матричним приймачем зображення.

На сьогоднішній день розвинуті комп'ютерні системи обробки інформації дозволяют реалізувати алгоритми цифрової обробки зображень у реальному часі для зображень характеристиками телевізійних форматів, в тому числі і формату високої чіткості [1]. Пр розробці систем з високою роздільною здатністю спостереження у оптичному діапазон актуальними є задачі, пов'язані з одержанням цифрових зображень з більшою кількістк елементів розрізнення. Ефективність використання таких систем визначається повното використання можливостей окремих складових. Існують відомі системи з високою роздільнок здатністю, яка реалізована за рахунок використання нових датчиків або їх сукупності [2; 3].

Для вирішення певного кола задач, пов'язаних з відтворенням сигналів, доцільним використання алгоритмічного (наприклад, інтерполяційного) способу збільшення відлік сигналу [4].