

При гіперболічному затуханні, коли  $d_2 \neq 0$ , а інші коефіцієнти дорівнюють нулю, одержимо спектр, який наведено у таблиці, рядки 7–9. Згідно з цими даними, вищі гармоніки в цьому спектрі, як і у випадку лінійно затухаючого коливального процесу присутні, але закон зменшення їх амплітуд декілька інший.

У випадку, коли всі три коефіцієнти не дорівнюють нулю, одержимо спектр, який не є лінійною суперпозицією трьох наведених вище спектрів (див. таблицю, рядки 22–24).

На основі проведеного аналізу можна зробити висновок про можливість виявлення дефектів (джерел розсіювання енергії) в елементах конструкції на ранній стадії розвитку за допомогою поданої методики.

### Список літератури

1. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 348 с.
2. Хармут Х. Теория секвентного анализа. – М.: Мир, 1980 – 574 с.
3. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток: Пер. с англ./ Под ред. В.М.Амербаева, Т.Э.Кренкеля. – М.: Радио и связь, 1985. – 284 с.

Стаття надійшла до редакції 06.07.01.

УДК 629.735.015.4:537.221.005.57(045)

В.М. Синєглазов, М.П. Мухіна

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ

*Розглянуто задачу математичного моделювання електромагнітних полів, що спричинюються проходженням імпульсу струму блискавки по обшивці літального апарата і оцінка впливу поверхневого ефекту на резистивну складову імпульсів наведеної напруги. За математичну модель процесу використано рівняння Максвелла, розв'язання яких здійснено методом інтегральних рівнянь на імпедансних поверхнях.*

Завади, що створюються атмосферною електрикою, зокрема грозовими розрядами, є джерелом наведених імпульсів напруги в з'єднувальних колах бортового обладнання. Залежно від конструкції, матеріалу обшивки літального апарата (ЛА), типу та місця розташування інформаційних ліній бортового обладнання величина наведених напруг може змінюватися від часток до декількох кіловольт [1]. Зростання насиченості ЛА електронними пристроями та широке використання композитних матеріалів у конструкції ЛА обумовлюють збільшення ймовірності та небезпеки виходу з ладу або неправильного функціонування бортового обладнання при його взаємодії з електромагнітним полем блискавки.

При проведенні дорогих і тривалих високовольтних натурних випробувань ЛА навіть незначні зміни або модифікації, що вносяться в конструкцію ЛА, бортових кіл або радіоелектронних систем, вимагають повторних випробувань літака в цілому. Тому доцільно створити математичну модель процесу електромагнітної взаємодії блискавки з ЛА, щоб потім мати можливість замінити окремі етапи випробувань числовими розрахунками.

Залежно від механізму наведення перенапруг виділяють три основні складові імпульсів наводок: апертурну, обумовлену наявністю отворів і радіопрозорих елементів в обшивці ЛА, дифузійно-магнітну внаслідок прямого проникнення електромагнітного поля крізь ділянки корпусу, що зроблені з композитних матеріалів, і резистивну, обумовлену скінченною провідністю корпусу ЛА [2]. Деякі ділянки обшивки ЛА, наприклад, носовий обтічник, обтічник радіолокатора, мотогондоли двигунів, мають форму, подібну до сферичної. Якщо ці елементи корпусу ЛА апроксимувати сферичними поверхнями, то провідна сферична оболонка з деякою ненульовою товщиною буде геометричною моделлю процесу розряду блискавки (рис.1). Для такого представлення розглянемо лише одну з трьох складових – резистивну.

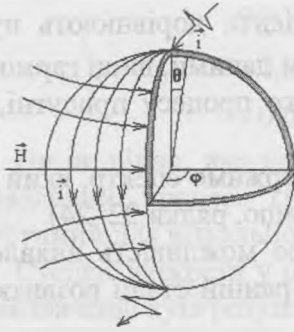


Рис.1. Геометрична модель розряду блискавки

Резистивна складова визначається спадом напруги при протіканні струму блискавки по внутрішній поверхні корпусу ЛА

$$U = \int_0^l \vec{E}_{BH} \cdot d\vec{l},$$

де  $l$  – довжина лінії проходження струму;  $\vec{E}_{BH}$  – напруженість поля на внутрішній поверхні обшивки.

Якщо знехтувати поверхневим ефектом в обшивці, то напруженість електричного поля на внутрішній поверхні дорівнює [3]

$$\vec{E}_{BH}(t) = \frac{1}{2} R_0 I_m(t),$$

де  $R_0$  – опір матеріалу обшивки постійному струму;  $I_m(t)$  – імпульс струму блискавки, що має таку біекспоненціальну форму

$$i(t) = I_m(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}), \quad (1)$$

де  $I = 10^5$  А,  $\alpha = 1,5 \cdot 10^4$  с<sup>-1</sup>,  $\beta = 2,5 \cdot 10^6$  с<sup>-1</sup>.

У подальшому будемо використовувати тільки першу компоненту  $e^{-\alpha t}$ . Розв'язок для повного імпульсу струму буде лінійною комбінацією обох компонент.

Універсальною математичною моделлю будь-яких електромагнітних процесів є система рівнянь Максвелла

$$\begin{aligned} \vec{B}_t + \text{rot} \vec{E} &= 0; \quad \vec{D}_t - \text{rot} \vec{H} = -\vec{J} - \vec{I}, \\ \text{div} \vec{D} &= \rho; \quad \text{div} \vec{B} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  – вектори індукції електричного та магнітного полів;  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  – вектори напруженості електричного та магнітного полів;  $\vec{J}$  – тримірний вектор сторонніх струмів, що збуджують електромагнітне поле;  $\vec{I}$  – тримірний вектор струмів провідності, що породжуються сторонніми струмами;  $\rho$  – об'ємна густина заряду.

З урахуванням матеріальних рівнянь поля

$$\vec{I} = \gamma \vec{E}; \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu \vec{H},$$

де  $\gamma$  – провідність середовища;  $\epsilon$  і  $\mu$  – відносні діелектрична та магнітна проникності речовини, запишемо рівняння (2) у такому вигляді:

$$\text{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} + \epsilon \vec{D}_t, \quad \text{rot} \vec{E} = -\mu \vec{H}_t. \quad (3)$$

Візьмемо  $\text{rot}$  від обох частин першого рівняння (3) та врахуємо останнє

$$\text{rot} \text{rot} \vec{H} + \gamma \mu \vec{H}_t = \epsilon \text{rot} \vec{D}_t.$$

Знехтуємо  $\vec{D}_t$ , оскільки для діапазону часу, характерного для імпульсу блискавки, у більшості скупчених об'єктів, зокрема ЛА, припустимо нехтувати хвильовими процесами, тоді

$$\text{rot} \text{rot} \vec{H} + \gamma \mu \vec{H}_t = 0. \quad (4)$$

Оскільки область, що розглядається (рис.1), складається з трьох різних середовищ (повітря – провідна оболонка – повітря), то застосування рівнянь Максвелла в диференціальній формі можливе лише при наявності умов спряження або граничних умов. Стрибок  $[H_\tau] = [E_\tau]$  при відсутності поверхневих зарядів на поверхні провідної сфери повинен дорівнювати нулю – перша умова спряження. З рівняння (4) отримаємо другу умову спряження, а саме  $[\text{rot}_\tau H] = 0$ .

, ( .1), = 0,

$h = h(r, Q, t);$

(5)

(6)

$$h = T(\theta)R(r)e^{j\omega t},$$

$$j\omega\gamma\mu r^2 - \frac{(r^2 R_r)_r}{R} = \frac{(T_\theta \sin\theta)_\theta}{T \sin\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta} = -n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

(0)

cos0 =

$$(1-x^2)T_{xx} - 2xT_x + \left(n(n+1) - \frac{1}{1-x^2}\right)T = 0,$$

,(1)

$$T(\theta) = a_1 P_n^{(1)}(\cos\theta) + a_2 Q_n^{(1)}(\cos\theta),$$

2 -

( , )

$$j\omega\gamma\mu r^2 - \frac{1}{R}(2rR_r + r^2 R_{rr}) + n(n+1) = 0.$$

(7)

$$R = \frac{y}{\sqrt{r}}$$

$$\frac{y_{rr}}{\sqrt{r}} + \frac{y_r}{r\sqrt{r}} - \left( j\omega\gamma\mu + \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{r^2} \right) y = 0,$$

отримаємо 
$$y_{rr}(\sigma r) + \frac{y_r(\sigma r)}{\sigma r} + \left(1 - \frac{k^2}{\sigma^2 r^2}\right) = 0, \text{ де } \sigma = \sqrt{-j\omega\gamma\mu}.$$

Розв'язок рівняння (7) в оболонці буде таким

$$R = \frac{c_1}{\sqrt{r}} J_k(\sigma r) + \frac{c_2}{\sqrt{r}} N_k(\sigma r), \quad (8)$$

де  $J_k(\sigma r)$  і  $N_k(\sigma r)$  – функції Бесселя першого та другого роду відповідно;  $k = \left|n + \frac{1}{2}\right|$ .

Для повітря ( $\gamma = 0$ ) розв'язок рівняння (7) буде таким:

$$R = b_1 r^l \left(R_r = \frac{l}{r} R\right) - \text{всередині}; \quad R = b_2 r^n \left(R_r = \frac{n}{r} R\right) - \text{ззовні}, \quad (9)$$

де  $b_1, b_2$  – сталі інтегрування, що визначають характер сторонніх струмів,  $l(l+1) = n(n+1)$ , причому  $n < 0, l > 0$ .

З урахуванням виразу (5) запишемо умови спряження для одержаних розв'язків (8) і (9)

$$\begin{cases} \frac{c_1}{\sqrt{a}} J_k(\sigma a) + \frac{c_2}{\sqrt{a}} N_k(\sigma a) = b_1 a^l; \\ \frac{c_1}{\sqrt{A}} J_k(\sigma A) + \frac{c_2}{\sqrt{A}} N_k(\sigma A) = b_2 A^n, \end{cases}$$

де  $a, A$  – внутрішній і зовнішній радіуси сфери відповідно.

$$\begin{cases} \frac{c_1}{\sqrt{a}} J_k^\circ(\sigma a) - \frac{c_1}{2a\sqrt{a}} J_k(\sigma a) + \frac{c_2}{\sqrt{a}} N_k^\circ(\sigma a) - \frac{c_2}{2a\sqrt{a}} N_k(\sigma a) = \frac{l}{a} \left( \frac{c_1}{\sqrt{a}} J_k(\sigma a) + \frac{c_2}{\sqrt{a}} N_k(\sigma a) \right), \\ \frac{c_2}{\sqrt{A}} J_k^\circ(\sigma A) - \frac{c_2}{2A\sqrt{A}} J_k(\sigma A) + \frac{c_1}{\sqrt{A}} N_k^\circ(\sigma A) - \frac{c_1}{2A\sqrt{A}} N_k(\sigma A) = \frac{n}{A} \left( \frac{c_1}{\sqrt{A}} J_k(\sigma A) + \frac{c_2}{\sqrt{A}} N_k(\sigma A) \right). \end{cases} \quad (10)$$

Виконавши перетворення, запишемо систему (10) в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{k(1-\sigma)}{\sigma A} J_k(\sigma A) - J_{k+1}(\sigma A) & \frac{k(1-\sigma)}{\sigma A} N_k(\sigma A) - N_{k+1}(\sigma A) \\ \frac{k(1-\sigma)}{\sigma a} J_k(\sigma a) - J_{k+1}(\sigma a) & \frac{k(1-\sigma)}{\sigma a} N_k(\sigma a) - N_{k+1}(\sigma a) \end{pmatrix} = 0, \quad (11)$$

де визначник

$$\begin{aligned} & \left( \frac{k(1-\sigma)}{\sigma A} J_k(\sigma A) - J_{k+1}(\sigma A) \right) \left( \frac{k(1-\sigma)}{\sigma a} N_k(\sigma a) - N_{k+1}(\sigma a) \right) - \\ & - \left( \frac{k(1-\sigma)}{\sigma a} J_k(\sigma a) - J_{k+1}(\sigma a) \right) \left( \frac{k(1-\sigma)}{\sigma A} N_k(\sigma A) - N_{k+1}(\sigma A) \right) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

служить для визначення невідомого порядку функцій Бесселя  $k$ . Коефіцієнт  $\sigma$  може змінюватися в межах від 100 (для авіаційного матеріалу ВТ-6) до 10 000 (для матеріалу Д19), тому в будь-якому разі аргументи  $\sigma a$  і  $\sigma A$  будуть достатньо великі. Використавши формули Ватсона [4], знайдемо розв'язок рівняння (12) при заданому значенні товщини оболонки (рис.2).

Вибір порядку функцій у кожному конкретному випадку буде залежати від початкових параметрів струму блискавки. При знайдених порядках  $k$  система (11) перетворюється в рівняння, з якого можна отримати співвідношення між  $c_1$  і  $c_2$ :

$$c_1 = -\lambda c_2, \text{ де } \lambda = \frac{\frac{k(1-\sigma)}{\sigma A} J_k(\sigma A) - J_{k+1}(\sigma A)}{\frac{k(1-\sigma)}{\sigma A} N_k(\sigma A) - N_{k+1}(\sigma A)}$$

Розв'язок для  $R(r)$  в оболонці з точністю до сталої буде мати вигляд:

$$R(r) = \frac{c_1}{\sqrt{r}} (J_k(\sigma r) - \lambda N_k(\sigma r)).$$

Напруженість електричного поля визначається як

$$\vec{E} = \frac{1}{\gamma} \text{rot} \vec{H},$$

$$\text{де } \text{rot} \vec{H} = \left\{ \frac{(h \sin \theta)}{r \sin \theta} \theta, -\frac{(rh)}{r} r, 0 \right\}.$$

Знайдемо закон змінення амплітуди  $\vec{E}$  за радіальною складовою в оболонці

$$E(r) = \frac{1}{\gamma r} (R(r) T_\theta(\theta) + R(r) T(\theta) \text{ctg} \theta) e^{-\alpha r},$$

при цьому

$$E(r) = \frac{1}{\gamma r} W R(r) e^{-\alpha r}, \quad (13)$$

де  $W$  – константа, що залежить тільки від кута  $\theta$ .

Розрахунок напруженості електричного поля за формулою (13) наведений на рис. 3.

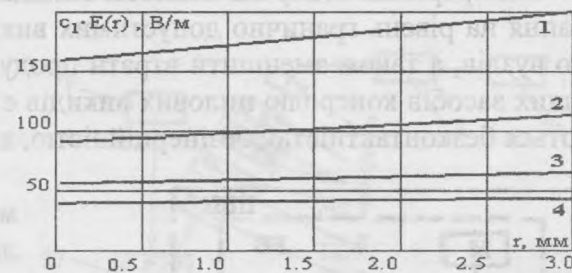
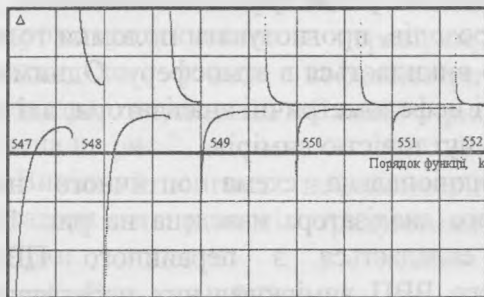


Рис. 2. Розв'язок рівняння (12) при товщині дюралюмінієвої оболонки 3 мм і провідності матеріалу  $\gamma = 6,25 \cdot 10^5$  См/м ( $k_1 = 547,277$ ,  $k_2 = 548,096$ ,  $k_3 = 549,021$ ,  $k_4 = 550,003$ )

Рис. 3. Змінення напруженості електричного поля  $E(r)$  в дюралюмінієвій оболонці: 1, 2, 3, 4 відповідають порядкам функцій Бесселя  $k_1, k_2, k_3, k_4$

Запропонований метод визначення резистивної складової перенапруг при розряді блискавки в сферичну провідну оболонку дозволяє враховувати кривизну провідної поверхні. Аналітичний вираз для вектора напруженості електричного поля отриманий за умови припущення присутності в повітряному просторі каналу блискавки, який імітується сторонніми струмами. При розв'язанні рівнянь Максвелла з урахуванням прийнятих припущень методом інтегральних рівнянь на імпедансних поверхнях з одержанням граничних умов було встановлено, що амплітуда перенапруг за рахунок поверхневого ефекту знижується в середньому на 16 %.

### Список літератури

1. Юман М.А. Естественная и искусственно инициированная молнии и стандарты на молниезащиту // ТИИЭР. – 1988. – Т. 76. – № 12. – С. 5-26.
2. Perala R.A., Rudolph T., Eriksen F. Electromagnetic interaction of lightning with aircraft // IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility. – 1982. – Vol.24 – № 2. – P. 173-201.
3. Бабинов М.Б., Базелян Э.М. Перенапряжение во внутренних цепях объекта при распространении тока молнии по его обшивке // Электричество. – 1983 – №6. – С. 44-46.
4. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1977.

Стаття надійшла до редакції 05.09.01.