УДК 629.7.05

В.М. Казак, І.В. Боярінов, Ю.Є. Боярінова

СИНТЕЗ ЗАКОНУ КЕРУВАННЯ ЛІТАЛЬНИМ АПАРАТОМ

Запропоновано засіб побудови перших інтегралів спряженої системи методом інтегрованих комбінацій, проведення кінцевого замикання закону наведення у формі зворотного зв'язку за допомогою методів встановлення залежностей.

Задача керування літальним апаратом відноситься до класу задач, які вирішуються за допомогою методів теорії оптимального керування.

Фазовий стан прямуючого літального апарата $x^T(t) = (x_1(t),..., x_n(t)) \in R^n$ в евклідовому просторі R^n описано системою нелінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \hat{f}(t,x,u), \tag{1}$$

де $F^T = (f_1,...,f_n)$; $t \in R^1$ – час (параметр інтегрування) з інтервалу $\Delta:[t_0,t^1]$; $x \in R^n$ – фазовий вектор стану ЛА; $u \in U \subset R^m$ – керування; U – замкнута опукла множина допустимих значень керування.

Нехай $\Phi(t_0,t_1,x_0,x_1)$ – вектор-функція, що $\Phi: R^1 \times R^1 \times R^n \times R^n \to R^{k-1}$ неперервна разом зі своєю першою похідною, та $k-1$ компонента цієї функції визначає граничні умови для траєкторії системи (1) за допомогою рівнянь:

$$\Phi_j(t_0,t_1,x(t_0),x(t_1)) = 0,\ j = 2...k. \tag{2}$$

Потрібно знайти рівняння $u = U^t(t) = (u_1(t),...,u_m(t))$, що належить замкнутій, обмеженій, опуклій множині $U \in R^m$, яке мінімізує функціонал

$$J = \hat{\Phi}_1(t_0,t_1,x(t_0),x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t,x,u)dt \tag{3}$$

на траєкторіях системи (1), які задовольняють умовам (2). Введемо вимоги

$$\dot{X}_0 = f_0(t,x,u),\ x_0(t_0) = 0$$

та розглянемо розширену систему

$$\dot{X} = f(t,x,u),$$
$$x \in R^{n+1},\ f^T = \left(f_0, \hat{f}_1,...,\hat{f}\right)$$

і розширену функцію

$$\Phi^T = (\Phi_1,...,\Phi_{k+1}),$$
$$\Phi_{k+1} = x_0(t_0),\ \Phi_1 = \hat{\Phi}_1 + x_0(t_1).$$

Тоді для розширеної задачі оптимального керування

$$\dot{X} = f(t,x,u),\ x \in R^{n+1}; \tag{4}$$

$$\Phi_j = 0,\ j = 2,...,k+1; \tag{5}$$

$$J(u) = \Phi_1(t_0,t_1,x(t_0),x(t_1)) \to \min \tag{6}$$

справедливий принцип максимуму Понтрягіна з теореми [1].

Теорема 1. Необхідні умови того, що $u^*(t)$ є оптимальним керуванням за початковими умовами $x(t_0) = x_0$ для задачі оптимального керування (4)–(6) полягають в існуванні ненульового (k+1)-мірного вектора λ та $(n+1)$-мірного вектора функції $\Psi^T(t) = (\Psi_0(t),...,\Psi_n(t))$, таких, що для (t_0,t_1)

$$\dot{\Psi}^T(t) = -\Psi^T(t) f_x(t, x^*(t), u^*(t)) \qquad (7)$$

при $t \in (t_0, t_1)$, і $u \in U$ виконуються

$$\Psi^T(t)(f(t, x^*(t), u) - f(t, x^*(t), u^*(t)) \le 0; \qquad (8)$$

$$\Psi^T(t) = \lambda \Phi_{x1}(t_0, t_1, \quad), \quad)); \qquad (9)$$

$$\Psi^T(t_0) = -\lambda \Phi_{x0}(t_0 \qquad x(t_1)); \qquad (10)$$

$$\Psi^T(t_1)(f(t_1, x^*(t_1), u^*(t_1)) = -\lambda^T \Phi_{t1}(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)); \qquad (11)$$

$$\Psi^T(t_0) f(t_0, x^*(t_0), u^*(t_0)) = -\lambda^T \Phi_{t0}(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)). \qquad (12)$$

Якщо функція $f(t, x, u)$ має неперервну частинну похідну $f_t(t, x, u)$, то умова

$$\Psi^T(t) f(t, x^*(t), u^*(t)) = \lambda^T \Phi_{t0}(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) +$$

$$+ \int_{t_0} \Psi^T(s) f_t(s, x^*(s), u^*(s)) ds,$$

виконується для кожного $t \in (t_0, t_1)$.

Зауваження 1. Через $f_x(t, x, u)$ позначена матриця, для якої елемент i-го рядка та j-го стовпця є частинна похідна $\partial f_i / \partial x_j$.

Умову (7) можна записати так:

$$\max_{u \in U} H[t, x^*(t), u) = H(t, x^*(t), u^*(t)), \qquad (13)$$

$$H[t, x^*(t), u^*(t)) = \Psi^T f(t, x^*, u^*),$$

де H – гамільтоніан або функція Понтрягіна системи (4).

Умови (8)–(12) є умовами трансверсальності. Якщо виконані умови (8)–(12) і відповідна траєкторія задовольняє граничні умови, тоді таке керування називається екстремаллю.

Зауваження 2. У деяких задачах оптимального керування і зокрема в задачі, яка розглядається, додаткові умови (5) можуть задаватися у вигляді нерівностей

$$\Phi_j < (>) \, 0, \quad j = k+2, ..., k+r+1.$$

У такому випадку задача зводиться до вигляду (4)–(6) так: функціонал (6) приймає вигляд додаткової нежорсткої умови [2] , а до умови (5) додаються

$$J(u) = \Phi_1 + \nu_1 \Phi_1 + ... + \nu_r \Phi_{k+r+1} \; ;$$

$$\nu_i \Phi_{k+1+1} = 0, \quad \iota = 1, ..., r$$

та додатково присутні умови узгодження знаків

$$\nu_i < (>) \, 0, \quad i = 1, ..., r.$$

Для знаходження екстремалей потрібно розв'язати двоточкову крайову задачу (4)–(6) з граничними умовами (5), (8)–(12). Ця задача є досить складною, тому що не існує загального числового методу, який гарантує збіжність з розв'язком (3). Найкращим виходом з цього є визначення перших інтегралів системи (7), для чого пропонується використати метод комбінацій, які інтегруються.

Розглянемо цей метод на прикладі автономної системи наведення ракети

$$x = f(x, t) \qquad (14)$$

з нефіксованим часом t_1 у функціоналі (6). Поділимо i-те рівняння системи (6) на i-те рівняння системи (3). Після чого одержимо:

$$\_\_\_\_ \quad \frac{\Psi^T f_{xi}}{f_i} \qquad (15)$$

Рівняння (15) зводиться до рівняння у повних диференціалах відносно Ψ_i *і* x_i.

Отже, перший інтеграл F_i визначається так:

$$F_i = \int\limits_{\Psi_i(t_1)}^{\Psi_i} f_i(x, u(x,\Psi))d\Psi_i + c = 0, \qquad (16)$$

де c – функція, яка незалежна від Ψ_i, а $u(x,\Psi)$ визначається відношенням (13). Після диференціювання F_i по x_i одержимо

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\Psi(t_1)}^{\Psi} f_i d\Psi_i + \frac{\partial c}{\partial x_i} = \Psi^T f_{xi} \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial x_i} = \Psi^T f_{xi} - \int\limits_{\Psi_i(t_1)}^{\Psi} f_i d\Psi_i \Rightarrow$$

$$c = \sum_k \int\limits_{x_i(t_1)}^{x_i} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} dx_i \Psi_k - \int\limits_{\Psi_i(t_1)}^{\Psi_i}\int\limits_{x_i(t_1)}^{x_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i d\Psi_i = \Psi^T f(x,u) -$$

$$- \Psi^T f(x_i(t_1), \widetilde{x}, u(x_i(t_1), \widetilde{x}, \Psi)) -$$

$$- \int\limits_{\Psi_i(t_1)}^{\Psi_i} (f_1(x, u(x,\Psi)) - f_i(x_i(t_1), \widetilde{x}, u(x_i(t_1), \widetilde{x}, \Psi)))d\Psi_i,$$

де $\widetilde{x} = (x_0, ..., x_{i-1}, ..., x_n)$.

Перша складова – функція Понтрягіна, яка на оптимальній траєкторії дорівнює нулю для задачі (14). Після підстановки значення c у вираз для F_i (16) одержимо

$$\begin{gathered} F_i = \int\limits_{\Psi_i(t_1)}^{\Psi_i} f_i(x_i(t_1), \widetilde{x}, u(x_i(t_1), \widetilde{x}, \Psi))d\Psi_i - \\ - \Psi^T(t) f(x_i(t_1), \widetilde{x}, u(x_i(t_1), \widetilde{x}, \Psi)) = 0, \\ i = 1...n, \quad \Psi_0 = \mathrm{const}, \quad \widetilde{x} = (x_0, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, x_n). \end{gathered} \qquad (17)$$

Крім цього, для системи

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \Psi}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

можна отримати ще один перший інтеграл, що лінійно залежний від виразу (17), а сама функція Понтрягіна є першим інтегралом:

$$F_H = H(x,\Psi) - H(x(t_1), \Psi(t_1)) = 0.$$

За умови розв'язання рівнянь (17) відносно функцій Ψ, використовуючи F_H, одержимо аналітичні залежності для спряжених функцій, що залежать від кінцевих умов. Можна отримати вираз для Ψ, що залежить від початкових умов. Принцип максимуму Понтрягіна дає необхідні умови екстремуму, якщо оптимальне керування існує.

Але метод без доведення існування розв'язку, заснований на необхідних умовах не задовольняє, бо може призвести до помилки типу парадоксу Персона [3].

Існування розв'язку задачі оптимального керування дає наступна теорема.

Теорема 2. Припустимо умови (7)–(12) виконані, крім того додамо, що U – компактна множина; $-H(t,x,\cdot) = -\Psi^T f(t,x,\cdot)$ – строго опукла функція на U. Тоді u^* – неперервна функція на $[t_0, t_1]$.

Після того, як доведено існування розв'язку, одержані екстремалі, необхідно перевірити їх на виконання умов достатності. Це можна зробити порівнянням значень функціонала на екстремалях або розв'язанням рівняння динамічного програмування, яке надає достатності умові оптимальності.

Введемо до розглядання наступні множини: $F_{t_0 x_0}$ – множина керувань, визначених на інтервалі $[t_0, t_1]$; $Q \in R^{n+2}$ – множина пар (t,x), для яких існує керування $u = u(t,x)$ та єдиний розв'язок системи диференціальних рівнянь $\dot{x} = f(t, x, u(t, x))$; M – множина, яка описує граничні умови.

Далі розглянемо функцію

$$B(t_0, x_0) = \inf_{u \in F_{t_0 x_0}} \Phi_1(t_1, x(t_1)), \tag{18}$$

яка називається ціною (функція Белмана). Тоді достатні умови оптимальності дає наступна теорема.

Теорема 3. Нехай $W(t,x)$ – гладкий розв'язок рівняння динамічного програмування

$$\min_{u \in U}\{\frac{\partial w}{\partial t} + \sum \frac{\partial w}{\partial x_i} f(t,x,u)\} = 0, \tag{19}$$

задовольняє граничну вимогу

$$W(t,x) = \Phi_1(t,x) \text{ для } (t,x) \in M.$$

Нехай $(t_0, x_0) \in Q$, $u \in F_{x_0 t_0}$, x – відповідний розв'язок системи (4). Тоді $W(t, x(t))$ – незменшувана функція часу. Якщо $u^* \in F_{x_0 t_0}$, і визначено на інтервалі $[t_0, t_1]$, x^* – відповідний розв'язок рівнянь (4) на інтервалі $[t_0, t_1]$, для якого

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t, x^*(t)) + \sum \frac{\partial w}{\partial x_i}(t, x^*(t)) f(t, x^*(t), u^*(t)) = 0,$$

тоді u^* – є оптимальне керування на $F_{x_0 t_0}$ та $W(t,x) = B(t,x)$, де $B(t,x)$ є ціною.

Функцію $B(t,x)$ важко визначити з рівняння (19), але якщо визначити функцію Ψ з (17), то можна отримати і вираз для ціни. Зв'язок між функцією Ψ та ціною дає наступна теорема [1].

Теорема 4. Нехай $Q \subset R^{n+2}$, а $(t_0, x(t_0))$ – внутрішня точка множини $Q - M$, крім того, u є оптимальним керуванням для задачі оптимізації (4)–(6) з початковими умовами $x(t_0)$. Припустимо, що відповідна цьому керуванню траєкторія $(t, x^*(t)) \subset Q$, крім кінцевої точки (t, x_1), лежить всередині множини Q. Також припустимо $B(t,x)$ визначена з рівняння (17) і двічі неперервна диференційована на $Q - M$.

Нехай $\Psi^T(t) = -B_x(t, x^*(t))$. Тоді $\Psi(t)$ задовольняє рівняння

$$\dot{\Psi}^T(t) = -\Psi^T(t) f_x(t, x^*(t), u^*(t))$$

та вимоги для

$$\max_{u \in U}\{\Psi^T(t) f(t, x^*(t), u)\} = \Psi^T(t) f(t, x^*(t), u^*(t))$$

для кожного $t \in [t_0, t_1]$.

Теорема 4 дозволяє одержати розв'язок рівняння динамічного програмування (19), а вже на основі цього розв'язку вибирається та екстремаль, для якої справедливий вираз (18).

Таким чином, за допомогою теорем 1–4 отримано оптимальний розв'язок, але якщо розв'язок спряженої системи одержаний з виразу (17), то керування має невизначені параметри, або компоненти фазового вектора чи спряженого вектора в кінцевий момент часу. Назвемо таке керування керуванням з точністю до параметрів, які прогнозуються, та розглянемо можливість виразити їх через поточні значення фазового вектора. Основою для цього є теорема про неявність функції [4].

Нехай дана система з m рівнянь з $n + m$ змінними,

$$\begin{gathered} F_1(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0, \end{gathered} \tag{20}$$

яка визначена на $n + m$ -мірному паралелепіпеді

$$D = \{x_1,...,x_n, y_1,..., y_m : x_i \in [x_i^0 - \Delta_i, x_i^0 + \Delta_i], \quad y_j \in [y_j^0 - \Delta'_j, y_j^0 + \Delta'_j], \quad j = 1...m\},$$

$$i = 1...n$$

із центром в точці $(x_1^0,..., x_n^0, y_1^0,..., y_m^0)$.

Нехай J -якобіан від функції (20) за змінними $y_1,..., y_m$

$$J = \frac{D(F_1,..., F_m)}{D(y_1,...my_m)} = \left\| \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right\|, \quad i, j = 1...m.$$

Тоді справедлива наступна теорема [4].

Теорема 5. Припустимо, що всі функції $F_1...F_m$ визначені та неперервні в D, існують і неперервні в D частинні похідні від цих функцій за всіма аргументами; точка $(x_1^0,..., x_n^0, y_1^0,..., y_m^0)$ задовольняє систему (20); якобіан в цій точці не дорівнює 0.

Тоді у деякому околі точки $(x_1^0,..., x_n^0, y_1^0,..., y_m^0)$ система (20) визначає $y_1,..., y_m$ як однозначні функції від $x_1,..., x_n$

$$y_i = g_i(x_1,..., x_n), i = 1...m,$$

при $x_1 = x_1^0,..., x_n = x_n^0$ ці функції мають відповідні значення $y_1^0,..., y_m^0$, функції $g_1,..., g_m$ неперервні і мають неперервні частинні похідні за всіма аргументами.

Нехай $u = u(x, c)$ – керування з точністю до постійних параметрів, які прогнозуються c. Підставимо це рівняння у вираз (4), позначивши ним через $\varphi(x, c) = 0$ перші інтеграли цієї системи.

Тоді при виконанні умов теореми 5 одержимо відношення:

$$\frac{\partial c_1}{\partial x_i} = -\frac{D(\varphi_1,...m\varphi_n)}{D(x_i, c_2,..., c_n)} / \frac{D(\varphi_1,..., \varphi_n)}{D(c_1,..., c_n)}, ...,$$

$$\frac{\partial c_n}{\partial x_i} = -\frac{D(\varphi_1,...m\varphi_n)}{D(c_1, c_2,..., x_i)} / \frac{D(\varphi_1,..., \varphi_n)}{D(c_1,..., c_n)}, \quad i = 1...n,$$

що дозволяють отримати константи $c_1...c_n$ як функції фазових координат $c_i(x)$. Підставимо $c_i(x)$ у співвідношення u=$u(x,c)$, одержимо закон керування у формі зворотного зв'язку.

Через те, що аналітичний розв'язок системи (4) і функцій $c_i(x)$ важко одержати, пропонується шукати константи c_i в такий спосіб [5]:

– оберненим інтегруванням з кінцевої точки (t_1, x) отримаємо множину оптимальних керувань та траєкторій;

– фіксуємо на даних траєкторіях точку, яка відповідає початковим умовам (t_0, x_0);

– на підставі одержаних оптимальних траєкторій та відповідних до них керувань будуємо матрицю експериментальних даних аргументів $x_1,..., x_n$ функцій $c_1...c_n$;

– за допомогою методів апроксимації будуємо функції $c_i = g_i(x)$, які описує залежність $C_i(x)$.

Функції c_i пропонується описувати за допомогою методів установлення залежностей, або за допомогою методу групового врахування аргументів (МГВА) [6], або методами регресивного та дисперсного аналізів [7].

Сформульована задача наведення належить до класу задач, що вирішуються за допомогою методів теорії оптимального керування на підставі теорем 1–5.

Задача наведення є некоректно поставленою і її регуляризація укладається в завданні стабілізуючого функціонала.

Регулярне розв’язання задачі наведення міститься у класі неперервних функцій та одержується в результаті розв’язку задачі оптимального керування.

Список літератури

1. *Флеминг У., Ришел Л.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами: Пер. с англ. – М.: Мир,1978. – 320 с.
2. *Брайсон А., Хо Ю-Ши* Прикладная теория оптимального управления: Пер. с англ. – М.: Мир,1972. – 544 с.
3. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – М.: Гос.изд-во физ.-мат. лит.1958. – 608 с.
4. *Ивахненко А.Г.* Индуктивный метод самоорганизации сложных систем. –К.: Наук. думка, 1982. – 296 с.
5. *Сильвестров А.Н., Чинаев П.И.* Идентификация и оптимизация автоматических систем. – М.: Энергоатомиздат,1987. – 200 с.
6. *Бояринов В.А., Лумпов Н.А.* Уточнение структуры начальних значений сопряженной системы в задачах принципа максимума Понтрягина// Авиационное вооружение.– К.: КВВАИУ, 1990.– Вып. 4. – С.47-52.
7. *Федоренко Р.В.* Приближенное решение задачи оптимального управления.– М.: Наука,1978. – 488 с.

Стаття надійшла до редакції 06.07.01.

УДК 532.526.4:597.31

В. І. Коробов, Н.О. Клешня

КОМБІНОВАНИЙ ВПЛИВ ПОЛІМЕРНИХ ДОБАВОК І ПОДАТЛИВОСТІ СТІНКИ НА ГІДРОДИНАМІЧНЕ ТЕРТЯ

Експериментально досліджено в діапазоні чисел Рейнольдса $10^6 - 2\cdot10^7$ *гідродинамічний опір подовжньо обтічних жорсткого циліндра і циліндра з еластичним покриттям при подачі в примежову область через носову щілину водяного розчину поліетиленоксиду. При комплексному впливі одержано підвищення гідродинамічної ефективності в порівнянні із застосуванням окремих факторів.*

У результаті еволюції в природі у літаючих і плаваючих об'єктів вироблені різні механізми і пристосування, спрямовані на підвищення ефективності (ККД) або швидкодії, що допомагає виживанню (життєзабезпеченню) різновиду в екологічній ніші. Особливості геометрії зовнішніх обводів ряду гідробіонтів сприяють зменшенню відривних зон і зниженню опору форми. Морфологічні особливості побудови зовнішніх покривів спрямовані на зниження турбулентного тертя. Вони дуже різноманітні і діють на різні області примежового шару [1;2].

У гідробіонтів, які швидко плавають, є пристосування для інжекції біополімера (слизу) через зяброві щілини або зі спеціальних залоз і ампул у специфічних зонах примежового шару, що допомагає істотно знизити опір, щонайменше, на форсованих режимах плавання.

Зовнішні покриви морських тварин, що швидко плавають (дельфінів), і риб (луска акули, меч-риби) мають подовжні мікроскладки, які сприяють організації і підтримці статистично упорядкованих, спрямованих уздовж потоку когерентних вихорових структур у примежовому шарі, що зменшує гідродинамічні втрати.

Також спостерігається утворення в риб гребінцево подібної луски в зоні турбулентного обтікання, причому тільки в області турбулентного потоку [2]. Оскільки висота гребінців менша за допустиму висоту шорсткості і вони на відміну від попереднього випадку не структурують потік, то в цьому разі зубоподібна структура цих лусочок може допомогти утримувати дифузійно активний біополімерний слиз у критичній області біля стінки. Це, з одного боку, дозволяє зменшити витрату (вимивання) гідродинамічно активного полімеру, а з іншого боку, утримуваний полімер утворить тонкий і дуже податливий в'язкопружний шар з досить великим коефіцієнтом поглинання. Тоді він виступає як елемент (1-й шар) складного