УДК 658.382.3

В.В. Матиборський

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СТАНІВ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ ОХОРОНОЮ ПРАЦІ З УРАХУВАННЯМ ЛЮДСЬКОГО ФАКТОРА

Показано можливість застосування методів вірогідного діагностування станів систем для побудови математичної моделі процесів керування охороною праці. Розраховано імовірність виникнення можливих ситуацій, що призводять до важких наслідків (травм, аварій, профзахворювань). Модель будується на прикладі людського фактора в системі керування охороною праці.

Система керування охороною праці являє собою складну структуру, у якій визначальну роль відіграє людина. Збої системи призводять до сумних наслідків (травм, профзахворювань). Найбільш об'єктивний критерій, який використовується при статистичній оцінці рівня безпеки – кількість подій на виробництві, зареєстрованих протягом досить тривалого часу.

На сьогоднішній день зібрані досить великі масиви статистичних даних щодо динаміки травматизму, його причин і наслідки як по галузях народного господарства, так і по окремих видах виробництв. Вивчення характеру розподілу подій у часі дає можливість прийняти гіпотезу про випадковий закон виникнення цих подій. Більш того, існує гіпотеза про пуассонівський характер кількості подій у потоці таких подій з використанням критерію Пірсона. Найбільший внесок у подію-інцидент вносить людина (рис. 1).

Переважаючими причинами (передумовами) подій є інциденти, пов'язані з помилками людини, що дозволяє стверджувати про домінуючу роль працюючих у формуванні первинних умов для виникнення подій. Це знаходить своє підтвердження в тім, що частка передумов, викликаних помилковими і несанкціонованими діями людей, складає приблизно 70% від усіх випадків аварійності і травматизму.

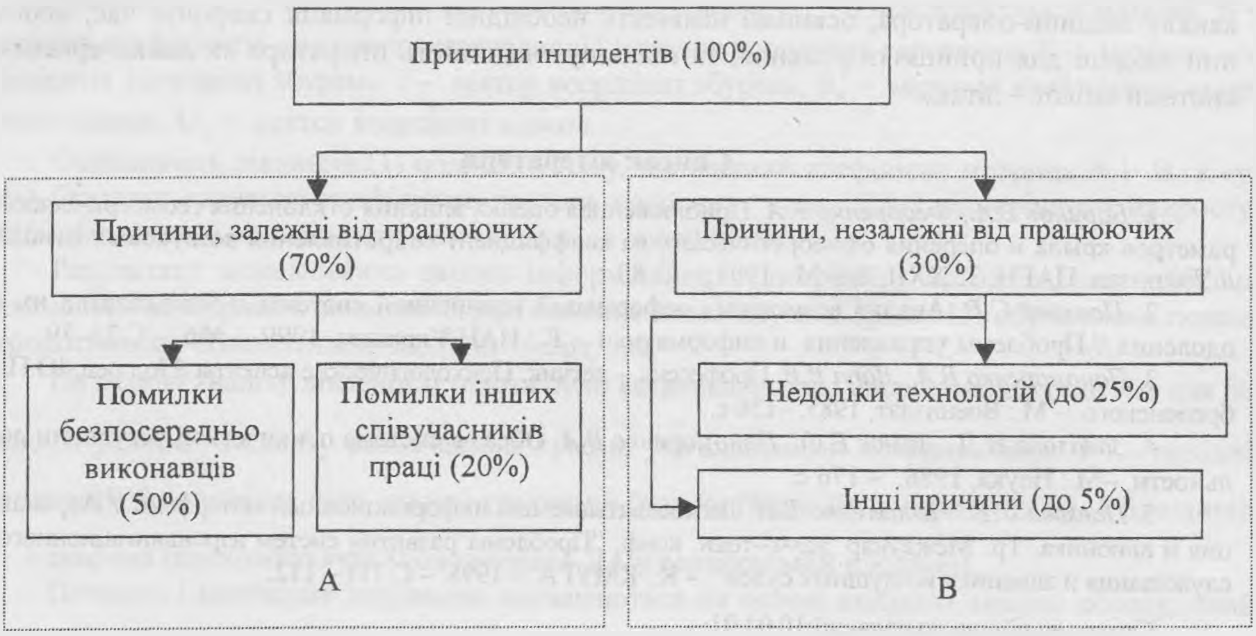

Рис. 1. Розподіл початкових причин подій

Основною причиною виникнення подій є людина (рис. 1, *А*). Місце людини в сфері виробництва можна подати у вигляді одноканальної системи керування охороною праці (рис. 2).

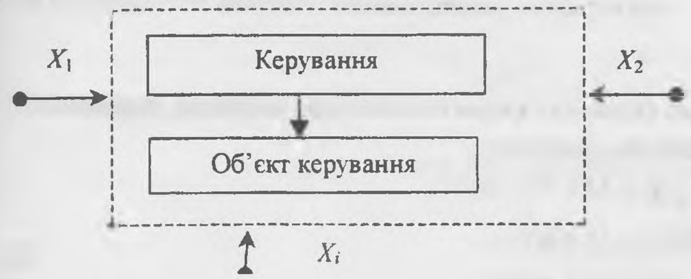

Рис. 2. Спрощена система керування охороною праці з урахуванням людського фактора

На рис. 2 X_i позначає фактори виробничого і навколишнього середовища, що впливають на систему, "керування" – людський фактор керування і контролю, "об'єкт керування" – людина, що піддається ризику інциденту.

Систему, наведену на рис. 2, можна транспонувати в різні стани (рис. 3).

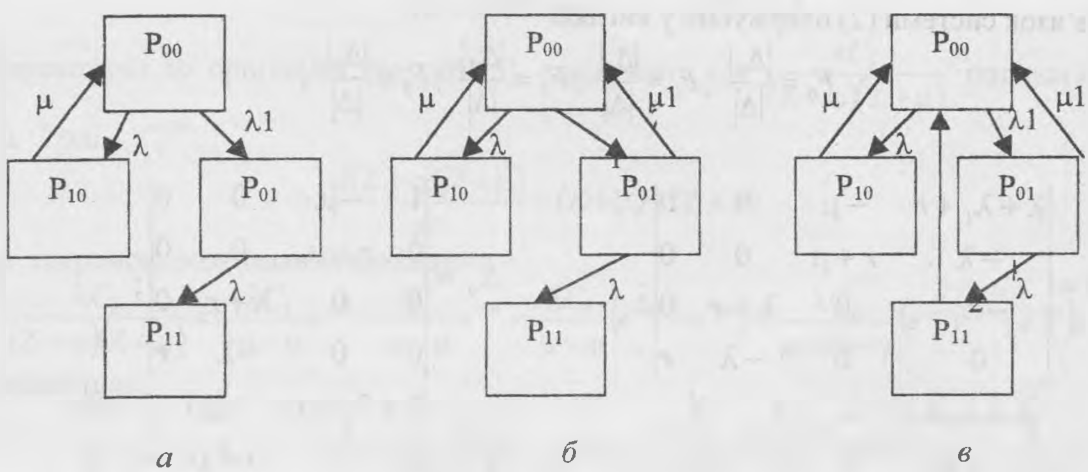

Рис. 3. Граф можливих станів системи:
а, *б*, *в* – варіанти станів;
P_{00} – система цілком справна (керуючий і керований елементи функціонують без помилок); P_{10}– відмова керуючого елемента, керований справний; P_{01}– відмова керованого елемента, керуючий справний; P_{11} – відмова обох елементів; λ і λ_1 – інтенсивності переходу з одного стану в інший; μ_1 – інтенсивності відновлення

За керуючий і керований елементи системи прийнята людина, що знаходиться як у системі, так і в об'єкті керування.

Графу станів такої системи (на прикладі рис. 3,*а*) відповідає система диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} P_0^1(t) = -(\lambda + \lambda_1)P_0(t) + \mu\ P_1(t); \\ P_1^1(t) = -\mu\ P_1(t) + \lambda\ P_0(t); \\ P_2^1(t) = \lambda_1 P_0(t) - \lambda\ P_2(t); \\ P_3^1(t) = \lambda\ P_2(t), \end{cases} \qquad (1)$$

де $P_{00}(t)=P_0(t)$, $P_{10}(t)=P_1(t)$, $P_{01}(t)=P_2(t)$, $P_{11}(t)=P_3(t)$.

Крім того, для спрощення подальших обчислень, проведемо заміни: $P_{00}(t)=P_0$; $P_{10}(t)=P_1$; $P_{01}(t)=P_2$; $P_{11}(t)=P_3$.

Початковими умовами системи (1) є $P_0(0)=1$, $P_1(0)=0$, $P_2(0)=0$, $P_3(0)=0$, необхідною умовою нормування є $\sum_{i=0}^{3} P_i(t)=1$, де $P_i(t)$ – імовірність перебування системи в одному із зазначених станів.

Розв'язок системи рівнянь (1) шукаємо одним із відомих методів, зокрема, переходячи до системи алгебричних рівнянь через оператори Лапласа:

$$\begin{cases} F_{00} = F_0(\lambda + \lambda 1 + r) - \mu F_1; \\ F_{10} = -\lambda F_0 + (r+\mu)F_1; \\ F_{20} = -\lambda 1 F_0 + (\lambda + r)F_2; \\ F_{30} = -\lambda F_2 + rF_3, \end{cases} \tag{2}$$

де F_i – перетворені функції, r – оператор Лапласа.

Розв'язок системи (2) одержуємо у вигляді

$$F_0 = \frac{|\Delta_0|}{|\Delta|};\ F_1 = \frac{|\Delta_1|}{|\Delta|};\ F_2 = \frac{|\Delta_2|}{|\Delta|};\ F_3 = \frac{|\Delta_3|}{|\Delta|},$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda+\lambda_1+r & -\mu & 0 & 0 \\ -\lambda & r+\mu & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & \lambda+r & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & r \end{vmatrix};\qquad \Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & r+\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+r & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & r \end{vmatrix};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \lambda+\lambda_1+r & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & \lambda+r & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & r \end{vmatrix};\qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda+\lambda_1+r & -\mu & 1 & 0 \\ -\lambda & r+\mu & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{vmatrix};$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \lambda+\lambda_1+r & -\mu & 0 & 1 \\ -\lambda & r+\mu & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & \lambda+r & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \end{vmatrix}.$$

Не зупиняючись на процедурі переходу отриманих зображень до оригіналу, наведемо одержані значення імовірностей $P_{00}(t)$:

$$P_{00}(t) = C_1 e^{-(\alpha-\gamma)t} + C_2 e^{-(\alpha+\gamma)t}. \tag{3}$$

Для визначення $P_{10}(t)$ використовуємо перетворення Лапласа, попередньо зробивши підстановку формули (3) у вихідне рівняння системи (2), при цьому

$$P'_{10} + \mu P_{10} = \lambda\left(C_1 e^{-(\alpha-\gamma)t} + C_2 e^{-(\alpha+\gamma)t}\right) \tag{4}$$

при початкових умовах $P_{10}(0)=0$.

Тоді перетворення Лапласа для лівої і правої частин рівняння (4) буде мати вигляд:

$$P'_{10}(t) \leftrightarrow ZP_{10}(Z) - P_{10}(0);$$

$$P_{10}(t) \leftrightarrow P_{10}(Z);$$

$$\lambda C_1 e^{-\varphi t} \leftrightarrow \int_0^\infty \lambda C_1 e^{-\varphi t} e^{-Zt} dt = \lambda C_1 \int_0^\infty e^{-(\varphi+Z)t} dt = -\frac{\lambda C_1}{Z+\varphi} e^{-(\varphi+Z)t}\Big|_0^\infty \frac{\lambda C_1}{z+\varphi};$$

$$\lambda C_2 e^{-\psi t} \Leftrightarrow \frac{\lambda C_2}{Z+\Psi}, \text{ де } (\alpha-\gamma=\varphi;\ \alpha+\gamma=\psi).$$

Операторне рівняння

$$ZP_{10}(Z)+\mu P_1(Z)=\frac{\lambda C_1}{Z+\varphi}+\frac{\lambda C_2}{Z+\psi},$$

звідки

$$p_{10}=\frac{\dfrac{\lambda C_1}{(z+\varphi)}+\dfrac{\lambda C_2}{(z+\psi)}}{z+\mu},$$

або

$$P_{10}(Z)=\frac{\lambda C_1}{(Z+\varphi)(Z+\mu)}+\frac{\lambda C_2}{(Z+\psi)(Z+\mu)}. \quad (5)$$

Переходячи до оригіналів функції (5), одержимо для $\frac{\lambda C_1}{(Z+\varphi)(Z+\mu)}$ полюси $Z_1=-\varphi$; $Z_2=-\mu$. Тоді

$$\frac{d(Z+\varphi)(Z+\mu)}{dz}=(Z+\mu)+(Z+\varphi).$$

За теоремою розкладання знаходимо

$$\frac{\lambda C_1}{(Z+\varphi)(Z+\mu)} \Leftrightarrow \frac{\lambda C_1}{\mu-\varphi}e^{-\varphi t}+\frac{\lambda C_1}{\varphi-\mu}e^{-\mu t}=\frac{\lambda C_1}{\mu-\varphi}\left(e^{-\varphi t}-e^{-\mu t}\right)=\frac{\lambda C_1}{\mu-\alpha+\gamma}\left(e^{-(\alpha-\gamma)t}-e^{-\mu t}\right). \quad (6)$$

Аналогічно

$$\frac{\lambda C_2}{(Z+\Psi)(Z+\mu)} \Leftrightarrow \frac{\lambda C_2}{\mu-\alpha-\gamma}\left(e^{-(\alpha+\gamma)t}-e^{-\mu t}\right). \quad (7)$$

Використовуючи властивість лінійності з рівнянь (6) і (7), остаточно одержимо

$$P_{10}(t)=\lambda\left[\frac{C_1}{\mu-\alpha+\gamma}\left(e^{-(\alpha-\gamma)t}-e^{-\mu t}\right)+\frac{C_2}{\mu-\alpha-\gamma}\left(e^{-(d+\gamma)t}-e^{-\mu t}\right)\right]. \quad (8)$$

Аналогічно одержимо імовірності $P_{01}(t)$ і $P_{11}(t)$:

$$P_{01}(t)=\lambda_1\left[\frac{C_1}{\lambda-\alpha+\gamma}\left(e^{-(\alpha-\gamma)t}-e^{-\lambda t}\right)+\frac{C_2}{\lambda-\alpha-\gamma}\left(e^{-(\alpha+\gamma)t}-e^{-\lambda t}\right)\right]; \quad (9)$$

$$P_{11}(t)=\mathrm{K}\left(1-e^{-(\alpha-\gamma)t}\right)+\Lambda\left(1-e^{-(\alpha+\gamma)t}\right)-\mathrm{M}\left(1-e^{-\lambda t}\right), \quad (10)$$

де $\mathrm{K}=\frac{\lambda_1 C_1}{(\lambda-\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)}$; $\Lambda=\frac{\lambda\lambda_1 C_2}{(\lambda-\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma)}$; $\mathrm{M}=\frac{\lambda_1 C_1(\lambda-\alpha-\gamma)+\lambda_1 C_2(\lambda-\alpha+\gamma)}{\left[(\lambda-\alpha)^2-\gamma^2\right]}$.

У наведених виразах були прийняті такі спрощення:

$$d=\frac{\lambda+\lambda_1+\mu}{2};\quad \gamma=\sqrt{\alpha^2-\lambda_1\mu};\quad \beta=\lambda+\lambda_1-\mu;\quad C_{1,2}=\frac{1}{2}\mp\frac{\beta}{4\sqrt{\frac{\beta^2}{4}-\lambda_1\mu}}.$$

Аналізуючи одержані залежності (3), (8), (9), (10), можна досліджувати стани системи при заданих інтенсивностях відмов і відновлення досліджуваної системи.

Стаття надійшла до редакції 17.04.01.