Список літератури

1. *Романов А.И.* Управление потоками речевых сообщений на сети связи. – К.: КВИУЗ, 1998. – 272 с.
2. *Корнійчук М.Т., Совтус І.К.* Стохастичні моделі інформаційних технологій оптимізації надійності складних систем. – К.: КВІУЗ, 2000. – 316 с.

Стаття надійшла до редакції 30.04.01.

УДК 621.396.67

А.Я. Білецький, М.О. Рашевський, І.В. Шелевицький, В.М. Шутко

УМОВИ НЕПЕРЕРВНОСТІ ДВОХ ПОХІДНИХ В СПЛАЙНОВИХ БАЗИСАХ, ОТРИМАНИХ ЗГОРТКОЮ

Розглянуто спосіб побудови базисних сплайнів на рівномірних сітках вузлів згорткою функцій. Досліджено умови стосовно породжуючих функцій, за яких базисний сплайн матиме дві неперервні похідні у вузлах.

При застосуванні сплайнів в системах цифрової обробки даних зручною формою їх подання є лінійна комбінація локальних базисних сплайнів, тобто B-сплайни. Найбільш відомими і дослідженими є алгебричні B-сплайни, одним із способів отримання яких є згортка трикутників [1].

Аналогічно можна одержати сплайнові базиси з фрагментами, що не є алгебричними поліномами [2]. Так можна синтезувати базисні сплайни довільного вигляду в залежності від виду функцій, що згортають. Одним із принципових моментів синтезу базисного сплайна є забезпечення неперервності щонайменше двох перших похідних. Розглянемо побудову базисного сплайна.

Нехай маємо деяку локальну функцію $f(x)$, неперервну на $[a,b]$:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) \text{ для } x\in[a,\frac{a+b}{2}]; \\ f_2(x) \text{ для } x\in[\frac{a+b}{2},b]; \\ 0 \text{ для } x\notin(a,b), \end{cases}$$

причому

$$f_1(a+x)=f_2(b-x),\ x\in[0,\frac{b-a}{2}],$$

тобто $f(x)$ – симетрична функція.

Крім того припустимо, що існує інша функція $\varphi(x)$, яка має властивості, аналогічні $f(x)$. Базові функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ зображені на рис.1.

Лінійна згортка $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(x-t)dt$ є локальним сплайном, що складається з чотирьох фрагментів і має в точках стику неперервні значення функції і першої та другої похідних.

Для зручності позначимо $(b-a)/2=h$, тоді

$$F(x)=\begin{cases} \int_a^x f_1(t)\varphi_1(x-t)dt, & x\in[a,a+h];\\ \int_{x-h}^{a+h} f_1(t)\varphi_2(x-t)dt+\int_a^{x-h} f_1(t)\varphi_1(x-t)dt+\int_{a+h}^{x} f_2(t)\varphi_1(x-t)dt, & x\in[a+h,a+2h];\\ \int_{x-2h}^{a+h} f_1(t)\varphi_2(x-t)dt+\int_{a+h}^{x-h} f_2(t)\varphi_2(x-t)dt+\int_{x-h}^{a+2h} f_2(x)\varphi_1(x-t)dt, & x\in[a+2h,a+3h];\\ \int_{x-2h}^{a+2h} f_2(t)\varphi_2(x-t)dt, & x\in[a+3h,a+4h];\\ 0, & x\notin[a,a+4h]. \end{cases}$$

Функція $F(x)$ є сплайном, що складається з чотирьох фрагментів (рис. 2) і має в точках стику неперервні першу та другу похідні.

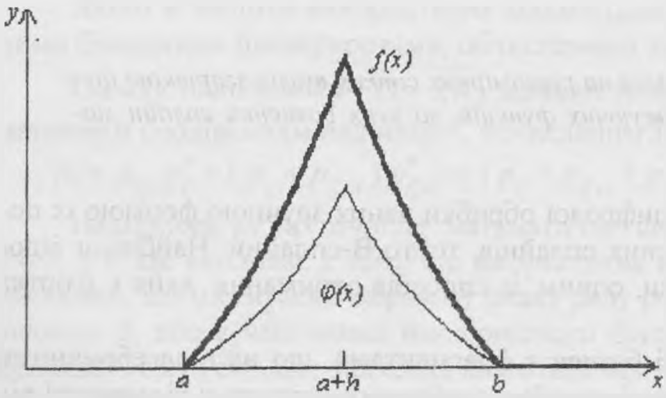

Рис. 1. Функції, що породжують базисний сплайн

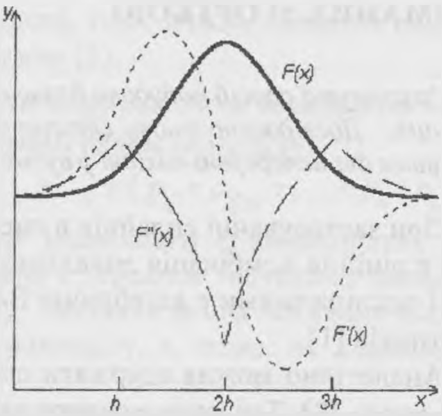

Рис. 2. Базисний сплайн та його похідні

Визначимо диференціальні властивості побудованого сплайна [3]. Позначимо підінтегральну функцію $Q(x,t)=f(t)\,\varphi(x-t)$, що є добутком породжуючих функцій. Функція $Q(x,t)$ задана в прямокутнику **П**, який включає область, визначену співвідношенням $\{d(x)\le t\le u(x),\ c\le x\le v\}$. Позначимо також інтеграл

$$I(x)=\int_{d(x)}^{u(x)} G(x,t)dt.$$

Визначимо межі прямокутника **П** для нашого випадку. Функції нижньої $d(x)$ та верхньої $u(x)$ межі є лінійними функціями. Межі зміни параметра x: $c=a-h$, $v=b+h$.

Теорема 1. Нехай $Q(x,t)$ неперервна на прямокутнику **П**, а функції $u(x)$, $d(x)$ неперервні на сегменті $[c,v]$. Тоді функція $I(x)$ неперервна на сегменті $[c,v]$.

Теорема 2. Нехай функція $Q(x,t)$ та її похідна $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в прямокутнику **П**. Нехай $d(x)$, $u(x)$ диференційовані на сегменті $[c,v]$. Тоді $I(x)$ диференційована на сегменті $[c,v]$ і її похідна $I'(x)$ задовольняє рівнянню

$$I'(x)=\int_{d(x)}^{u(x)}\frac{\partial Q}{dx}dt+u'(x)Q(u(x),x)-d'(x)Q(d(x),x).$$

З теореми 1 випливає, що сплайн є неперервним на сегменті, оскільки $Q(x,t)$ є добутком неперервних функцій, а $u(x)$ та $d(x)$ прямі або константи.

Розглянемо питання неперервності значень та першої і другої похідних в точках стику сплайна. Для спрощення нехай $a=0$. З'ясуємо неперервність функції в точках стику. В точці $x=0$:

$$\lim_{x\to 0+0} F(x) = \lim_{x\to 0+0} \int_0^x f_1(t)\varphi_1(x-t)dt = 0.$$

Аналогічно в точках $x = nh$, $n = \overline{1,4}$:

$$imF(x) = \begin{cases} \int_0^h f_1(t)\varphi_1(x-t)dt = \lim\limits_{x\to h-0} F(x), & x \to h+0; \\ \int_0^h f_1(t)\varphi_1(x-t)dt + \int_h^{2h} f_2(t)\varphi_1(x-t)dt, & x \to 2h-0; \\ \int_h^{2h} f_2(t)\varphi_2(x-t)dt, & x \to 3h-0; \\ \int_{2h}^{2h} f_2(t)\varphi_2(x-t)dt = 0, & x \to 4h-0. \end{cases}$$

Таким чином, F(x) є безумовно неперервною у всіх точках стику.

Скориставшись теоремою 2, визначимо першу похідну

$$F'(x) = \begin{cases} \int_a^x f_1(t)\varphi_1'(x-t)dt + f_1(x)\varphi_1(0), & x \in (0,h]; \\ \int_0^{x-h} f_1(t)\varphi_2'(x-t)dt + \int_{x-h}^h f_1(t)\varphi_1'(x-t)dt + \int_h^x f_2(t)\varphi_1'(x-t)dt + \\ \quad + f_1(x-h)(\varphi_2(h)-\varphi_1(h)) + f_2(x)\varphi_1(0), & x \in (h,2h]; \\ \int_{x-2h}^h f_1(t)\varphi_2'(x-t)dt + \int_h^{x-h} f_2(t)\varphi_2'(x-t)dt + \int_{x-h}^{2h} f_2(x)\varphi_1'(x-t)dt + \\ \quad + f_2(x-h)(\varphi_2(h)-\varphi_1(h)) - f_1(x-2h)\varphi_2(2h), & x \in (2h,3h]; \\ \int_{x-2h}^{2h} f_2(t)\varphi_2'(x-t)dt - f_2(x-2h)\varphi_2(2h), & x \in (3h,4h]; \\ 0, & x \notin (0,4h]. \end{cases}$$

Розглянемо неперервність першої похідної в точках стику. В точці $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0-0} F'(x) = 0$,

$$\lim_{x\to 0+0} F'(x) = \int_0^0 f_1(t)\varphi_1'(x-t)dt + f_1(0)\varphi_1(0) = f_1(0)\varphi_1(0).$$

Для неперервності $F'(x)$ необхідно, щоб $f_1(0)\varphi_1(0)=0$. Тобто для неперервності першої похідної в точці $x=0$ необхідно, щоб $f_1(0)=0$ або $\varphi_1(0)=0$.

Розглянемо можливий стрибок похідної в точці $x=h$.

$$\Delta F'(h) = \lim_{x\to h+0} F'(x) - \lim_{x\to h-0} F'(x) = f_1(0)(\varphi_2(h)-\varphi_1(h)) + f_2(h)\varphi_1(0) - f_1(h)\varphi_2(0).$$

Для рівності стрибка нулю необхідно, щоб функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ були неперервними в точці $x=h$. Тобто необхідно, щоб $\varphi_1(h)=\varphi_2(h)$ та $f_1(h)=f_2(h)$.

Розглянемо можливий стрибок похідної в точці $x=2h$:

$$\Delta F'(2h) = \lim_{x\to 2h+0} F'(x) - \lim_{x\to 2h-0} F'(x) = (\varphi_2(h)-\varphi_1(h))(f_2(h)-f_1(h)) - f_2(2h)\varphi_1(0) - f_1(0)\varphi_2(2h).$$

Для рівності стрибка нулю необхідно, щоб функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ були неперервними в точці $x=h$. Тобто необхідно, щоб $\varphi_1(h)=\varphi_2(h)$ та $f_1(h)=f_2(h)$ і $f_1(0)=\varphi_1(0)=0$.

В точці $x=3h$:

$$\Delta F'(3h) = \lim_{x\to 3h+0} F'(x) - \lim_{x\to 3h-0} F'(x) = \varphi_2(2h)(f_1(h)-f_2(h)) - f_2(2h)(\varphi_2(h)-\varphi_1(h)).$$

Для рівності стрибка нулю необхідно, щоб функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ були неперервними в точці $x = h$. Тоді необхідно, щоб

$$\varphi_1(h) = \varphi_2(h) \text{ та } f_1(h) = f_2(h), \text{ або } f_2(2h) = \varphi_2(2h) = 0.$$

В точці $x = 4h$ перша похідна також неперервна, що очевидно з міркувань, аналогічних для точки $x = 0$.

Знайдемо значення другої похідної:

$$F''(x) = \begin{cases} \int_a^x f_1(t)\varphi_1''(x-t)dt + f_1(x)\varphi_1'(0) + f_1'(x)\varphi_1(0), & x \in (0,h]; \\ \int_0^{x-h} f_1(t)\varphi_2''(x-t)dt + \int_{x-h}^{h} f_1(t)\varphi_1''(x-t)dt + \int_h^x f_2(t)\varphi_1''(x-t)dt + & \\ + f_1(x-h)(\varphi_2'(h) - \varphi_1'(h)) + f_1'(x-h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) + f_2'(x)\varphi_1(0) + f_2(x)\varphi_1'(0), & x \in (h,2h]; \\ \int_{x-2h}^{h} f_1(t)\varphi_2''(x-t)dt + \int_h^{x-h} f_2(t)\varphi_2''(x-t)dt + \int_{x-h}^{2h} f_2(x)\varphi_1''(x-t)dt + f_2(x-h)(\varphi_2'(h) - \varphi_1'(h)) + & \\ + f_2'(x-h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) - f_1(x-2h)\varphi_2'(2h) - f_1'(x-2h)\varphi_2(2h), & x \in (2h,3h]; \\ \int_{x-2h}^{2h} f_2(t)\varphi_2''(x-t)dt - f_2(x-2h)\varphi_2'(2h) - f_2'(x-2h)\varphi_2(2h), & x \in (3h,4h] \\ 0, & x \notin (0,4h]. \end{cases}$$

З'ясуємо умови неперервності другої похідної в точках стику.

В точці $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0-0} F''(x) = 0;$$

$$\lim_{x \to 0+0} F''(x) = f_1(0)\varphi_1'(0) + f_1'(0)\varphi_1(0);$$

$$\lim_{x \to 0+0} F''(x) - \lim_{x \to 0-0} F''(x) = 0, \text{ якщо } f_1(0) = \varphi_1(0) = 0.$$

В точці $x = h$:

$$\Delta F''(h) = \lim_{x \to h+0} F''(x) - \lim_{x \to h-0} F''(x) = \varphi_1'(0)(f_2(h) - f_1(h)) + f_1'(0)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) + f_1(0)(\varphi_2'(h) - \varphi_1'(h)).$$

Отже умовами неперервності є

$$f_1(0) = 0 \text{ та } f_1(h) = f_2(h) \text{ і } \varphi_1(h) = \varphi_2(h).$$

В точці $x = 2h$:

$$\Delta F''(2h) = (f_2(h) - f_1(h))(\varphi_2'(h) - \varphi_1'(h)) + (f_2'(h) - f_1'(h))(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) - \\ - \varphi_1'(2h) f_1(0) - f_1'(0)\varphi_2(2h) - f_2'(2h)\varphi_1(0) + f_2(2h)\varphi_1'(0).$$

Умовами неперервності є

$f_2(2h) = 0$, $\varphi_2(2h) = 0$, $f_1(0) = 0$, $\varphi_1(0) = 0$ та $f_1(h) = f_2(h)$ і $\varphi_1(h) = \varphi_2(h)$.

В точці $x = 3h$:

$$\Delta F''(3h) = -f_2(2h)(\varphi_2(h) - \varphi_1'(h)) - f_2'(2h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) + \\ + \varphi_2(2h)(f_1'(h) - f_2'(h)) + \varphi_1'(2h)(f_1(h) - f_2(h)).$$

Умовами неперервності є

$f_2(2h) = 0$, $\varphi_2(2h) = 0$, $f_1(0) = 0$, $\varphi_1(0) = 0$ та $f_1(h) = f_2(h)$ і $\varphi_1(h) = \varphi_2(h)$.

В точці $x = 4h$:

$$\lim_{x \to 4h-0} F''(x) = -f_2(h)\varphi_2'(2h) - f_2'(h)\varphi_2(2h);$$

$$\lim_{x \to 4h+0} F''(x) = 0.$$

Умовами неперервності є $f_2(2h) = 0$, $\varphi_2(2h) = 0$.

З викладеного випливає, що функція $F(x)$ є неперервною, включаючи точки стику, має неперервну першу та другу похідні, якщо виконуються наступні умови: функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ – симетричні, а на межах інтервалу визначеності (в точках $x = 0$ та $x = 2h$) функції дорівнюють нулю, як показано на рис. 1. При цьому необхідно також, щоб функції $f(x)$, $\varphi(x)$ були неперервними та інтегрованими на фрагментах.

З отриманого базисного сплайна шляхом його зміщення на відстань кратну довжині фрагмента будуємо систему базисних функцій, що є зручною моделлю для багатьох практичних задач обробки цифрових даних. Описаний підхід до синтезу сплайнових базисів дає можливість цілеспрямовано вибирати базиси, що найкраще підходять до характеру конкретних даних. Зручним критерієм відповідності є відповідність спектральних характеристик базисного сплайна та даних. Це більше обгрунтовано тим, що імпульсні характеристики нерекурсивних цифрових фільтрів відповідають встановленим вимогам і є хорошими претендентами на роль породжуючих функцій.

Список літератури

1. *Unser M.* Splines: a perfect fit for signal and image processing // IEEE Signal Processing Magazine. – Vol. 16, no. 6. – 1999. – P. 22 – 38.

2. *Побудова* квазіортогональних сплайнових базисів з неперервною першою похідною / А.Я. Білецький, І.В. Шелевицький, В.М. Шутко та ін.// Вісн. центрального наук. центру транспортної Акад. України. – Вип.2. – К., 1999. – С. 49-51.

2. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Ч. 2. – М.:Наука, 1973. – 448 с.

Стаття надійшла до редакції 30.04.01.

УДК 656.7.052.002.5

Н.В. Ладогубець, О.М. Сігнаєвський

ПІДВИЩЕННЯ СТІЙКОСТІ АЛГОРИТМІВ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЗАСТОСУВАННЯМ ЗНАКОВИЗНАЧЕНИХ ФУНКЦІЙ ЛЯПУНОВА

Подано результати використання знаковизначених векторних функцій Ляпунова в задачах ідентифікації динамічних об'єктів. Розглянутий підхід дозволяє уникнути звуження областей стійкості натурної інформації, яка містить перешкоди в спостереженнях і в самому об'єкті й одержати рівномірно асимптотично стійкі алгоритми настроювання параметрів керованих динамічних систем.

Відомий метод векторних функцій Ляпунова в динаміці систем і теорії керування є точним і ефективним методом дослідження динамічних властивостей складних систем.

Теорія ідентифікації динамічних об'єктів значну увагу приділяє алгоритмам ідентифікації, які утворюються з достатніх умов стійкості із застосуванням напіввизначених функцій Ляпунова [1]. Але недоліком таких алгоритмів є звуження областей стійкості натурної інформації, які містять перешкоди в спостереженнях і в самому об'єкті. Крім того, ці алгоритми дуже чутливі до "модельної недостатності" обраного класу моделей.

Асимптотично стійкі алгоритми, отримані на підставі застосування знаковизначених функцій Ляпунова, які пропонується використовувати для задач ідентифікації, потребують знання спеціальним способом складеної матриці, елементи якої містять середні значення фазових координат і керуючих впливів.

Рух об'єкта описується системою диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = Ax + Bu\,, \qquad (1)$$

де **x** – вектор фазових змінних; $x \in R^n$; **A** та **B** – сталі матриці розмірів $(n \times n)$ і $(n \times s)$ відповідно; **u**- вектор керуючих впливів.